EQUIDISTRIBUTION ARITHMÉTIQUE ET ESPACES DE PARAMÈTRES DE POLYNÔMES

par

Thomas Gauthier

Résumé. — Il s'agit des notes du mini-cours que j'ai donné lors de la réunion inaugurale du projet ANR Lambda, les 14 et 15 avril 2014 à l'Université Paris Est Marne La Vallée.

Introduction

Le but de ces notes est d'expliquer de façon schématique le théorème d'équidistribution de Yuan dans le cas des espaces projectifs, ainsi que d'expliquer comment en déduire une description de la distribution des paramètres postcritiquement finis à combinatoire donnée dans l'espace des modules des polynômes d'un degré donné.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à un résultat d'équidistribution arithmétique sur $\mathbb{P}^1$. Nous nous concentrerons sur une version non-optimale de ce résultat et nous en donnerons une démonstration. On s'intéressera ensuite à ses applications dans la famille quadratique. Plus précisément, nous en déduirons l'équidistribution des centres des composantes hyperboliques vers la mesure harmonique de l'ensemble de Mandelbrot et nous verrons comment une version raffinée du théorème d'équidistribution arithmétique permet d'obtenir des estimées de vitesse de convergence.

L'étape suivante consiste à généraliser le résultat d'équidistribution arithmétique aux espaces projectifs de dimension plus grande. A cette fin, nous commencerons par reformuler le théorème sur $\mathbb{P}^1$ en des termes plus géométriques. On ne donnera pas la preuve du théorème général. Finalement, nous nous concentrerons sur le but des deux exposés: les applications de cette généralisation à l'espace des modules des polynômes cubiques, en particulier, l'équidistribution des centres des composantes hyperboliques de type IV (i.e. dans lesquelles les paramètres ont deux cycles attractifs distincts) vers la mesure de bifurcation. Nous essayerons de donner une idée des difficultés supplémentaires qui apparaîssent, par rapport au cas quadratique.

Table des matières

Introduction 1
1. Equidistribution arithmétique sur $\mathbb{P}^1$ 2
2. Application dans la famille quadratique 8
3. Equidistribution arithmétique sur $\mathbb{P}^k$ 12
4. Application dans l'espace des modules des polynômes cubiques 15

Références 19

Nota Bene. — Les sections 1 et 2 ont fait l'objet du premier exposé et les sections 3 et 4 du second. Par ailleurs, ce texte est un petit peu plus fourni que le contenu des exposés eux-mêmes et certains passages restent volontairement d'une précision relative, afin de donner une idée générale sans rentrer dans certains détails techniques.

Remerciements. — L'auteur tient à remercier Gabriel Vigny pour sa relecture et ses commentaires utiles. Les recherches de l'auteur bénéficient du soutien du projet ANR-13-BS01-0002.

1. Equidistribution arithmétique sur $\mathbb{P}^1$

Le but de cette section est de donner une version simple du théorème d'équidistribution des points de petite huateur sur $\mathbb{P}^1$, ainsi que de donner une idée de la démonstration. Nous suivons de près l'exposition de [**R**].

1.1. Fonctions hauteurs

Commençons par définir la hauteur naïve h_{nv}. Nous définirons ensuite la notion de fonction hauteur (ou hauteur de Weil). Pour ce paragraphe, on pourra consulter par exemple [**CL2**].

Pour $x \in \mathbb{Q}$, si $x = a/b$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$, on pose

$$h_{\mathrm{nv}}(x) := \log^+ \max\{|a|, |b|\} = \max\left(\log \max\{|a|, |b|\}, 0\right) \ .$$

Cette définition semble difficile à étendre à $\bar{\mathbb{Q}}$. On va donc commencer par la reformuler.

1.1.1. La hauteur naïve h_{nv}

Rappelons que si p est un nombre premier, tout $x \in \mathbb{Q}^\times$ s'écrit $x = \frac{a}{b}p^\alpha$ avec $a \wedge b = a \wedge p = b \wedge p = 1$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$. La norme p-adique de x est $|x| = p^{-\alpha}$. La norme p-adique est *non-archimédienne*, c'est-à-dire qu'elle satisfait l'inégalité triangulaire forte:

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \ .$$

Soit $\mathcal{P} = \{p \text{ premiers}\}$. Dans ce qui suit, on note $|\cdot|_p$ la norme suivante:

$$|\cdot|_p = \begin{cases} \text{la norme } p\text{-adique} & \text{si } p \in \mathcal{P}, \\ \text{la norme euclidienne} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Le fait que $\mathbb{Q}$ soit un anneau factoriel implique que l'on dispose de la formule du produit:

$$\prod_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}} |x|_p = 1 \ , \quad x \in \mathbb{Q}^\times.$$

On peut donc facilement voir que l'on peut réécrire $h_{\mathrm{nv}}(x)$ pour $x \in \mathbb{Q}$:

$$h_{\mathrm{nv}}(x) = \sum_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}} \log^+ |x|_p \ .$$

Cette formule est possible à étendre aux extensions algébriques de $\mathbb{Q}$. Voilà comment on procède. Pour $p \in \mathcal{P}$, on note $\mathbb{Q}_p$ le complété du corps normé $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$. Il s'agit d'un corps non-algébriquement clos. Soit $\bar{\mathbb{Q}}_p$ sa clôture algébrique. Ce corps est non-complet. Par contre, son complété $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clos. Pour $p=\infty$, on pose $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}$. On note encore $|\cdot|_p$ la norme $|\cdot|_p$ étendue à $\mathbb{C}_p$.

Pour un nombre algébrique $x\in\bar{\mathbb{Q}}$, le corps $\mathbb{Q}(x)$ est une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$. Soit $p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}$. Choisir un élément de son groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q})$ revient à choisir une façon de plonger x et son orbite de Galois dans $\mathbb{C}_p$, et donc de plonger $\mathbb{Q}(x)$ dans $\mathbb{C}_p$. On peut alors poser

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{nv}}(x) &:= \frac{1}{[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}]}\sum_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}\sum_{\sigma:\mathbb{Q}(x)\hookrightarrow\mathbb{C}_p}\log^+|\sigma(x)|_p \\ &= \frac{1}{[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}]}\sum_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q})}\log^+|\sigma(x)|_p\ . \end{aligned}$$

Un théorème important est le suivant:

Théorème 1.1 (Northcott). — *Pour tout $B>0$ et tout $R\geq 1$, l'ensemble*

$$\{x\in\bar{\mathbb{Q}}\,;\ h_{\mathrm{nv}}(x)\leq B\ \text{et}\ [\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}]\leq R\}$$

est un ensemble fini.

Démonstration. — Si $x\in\bar{\mathbb{Q}}$, si d est son degré et si $P=a_dX^d+\cdots+a_0\in\mathbb{Z}[X]$ est son polynôme minimal, on pose $H(P):=\max_{0\leq k\leq d}\{|a_k|\}$. Il suffit de montrer que $\log H(P)\leq d\cdot(h_{\mathrm{nv}}(x)+\log d)$ pour conclure. En effet, on a $d\leq R$ et $\log H(P)\leq R\cdot(B+\log R)<+\infty$, et il n'y a qu'un nombre fini de coefficients entiers possibles pour le polynôme P.

Soient $z_1,\ldots,z_d\in\bar{\mathbb{Q}}$ les racines de P. Alors on a

$$\frac{a_k}{a_d}=(-1)^k\sum_{i_1<\cdots<i_k}z_{i_1}\cdots z_{i_k}\ .$$

Soit $p\in\mathcal{P}$. Puisque $a_k\in\mathbb{Z}$, on a $|a_k|_p\leq 1$ et puisque les a_k peuvent être choisis premiers entre eux, l'un d'entre eux est premier avec p, et on trouve

$$1=\max_{0\leq k\leq d}|a_k|_p\leq|a_d|_p\prod_{i=1}^d\max\{1,|z_i|_p\}\leq|a_d|_p\max\{1,|z_i|_p\}^d\ .$$

Ainsi, grâce à la formule du produit et au fait que $\{z_1,\ldots,z_d\}$ est l'orbite de Galois de x,

$$0=\sum_{p\in\mathcal{P}}\log 1\leq-\log|a_d|_\infty+d\cdot h_{\mathrm{nv}}(x)-d\cdot\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\log^+|\sigma(z)|\ . \tag{1}$$

Finalement, à la place complexe, on trouve pour tout k

$$|a_k|_\infty\leq|a_d|_\infty\sum_{i_1<\cdots<i_k}\max_{1\leq i\leq d}\{1,|z_i|_\infty\}^k\leq d!|a_d|_\infty\max_{1\leq i\leq d}\{1,|z_i|_\infty\}^d\ .$$

Ainsi, grâce à (1), on trouve $\log H(P)\leq d\cdot h_{\mathrm{nv}}(x)+\log d!\leq d\cdot(h_{\mathrm{nv}}(x)+\log d)$. □

Corollaire 1.2. — $h_{\mathrm{nv}}(x)=0$ *si et seulement si $x=0$ ou x est une racine de l'unité.*

Démonstration. — Commençons par remarquer, d'après la définition de h_{nv}, que pour tout entier $N\geq 1$ et tout $x\in\bar{\mathbb{Q}}$, on a $h_{\mathrm{nv}}(x^N)=N\cdot h_{\mathrm{nv}}(x)$.

Tout d'abord, $h_{\mathrm{nv}}(0)=h_{\mathrm{nv}}(1)=0$. Supposons d'abord que $x^N=1$ pour $N\geq 1$. Alors $0=h_{\mathrm{nv}}(1)=h_{\mathrm{nv}}(x^N)=N\cdot h_{\mathrm{nv}}(x)$. Ainsi, puisque $N\geq 1$, on a $h_{\mathrm{nv}}(x)=0$.

Supposons maintenant que $h_{\mathrm{nv}}(x) = 0$ et $x \neq 0$. Puisque $x^N \in \mathbb{Q}(x)$ et puisque $h_{\mathrm{nv}}(x^N) = N \cdot h_{\mathrm{nv}}(x) = 0$, le Théorème 1.1 stipule que

$$\{x^n\, ;\ n \geq 1\} \subset \{y \in \bar{\mathbb{Q}}\, ;\ h_{\mathrm{nv}}(y) = 0 \text{ et } [\mathbb{Q}(y) : \mathbb{Q}] \leq [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]\}$$

est fini. Ainsi, il existe $n > k \geq 0$ tels que $x^n = x^k$, d'où $x^{n-k} = 1$. □

1.1.2. Fonctions hauteur

Une *fonction hauteur* $h = \bar{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ est une fonction définie par des fonctions locales $h_p : \bar{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ telles que

$$h(x) = \frac{1}{[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]} \sum_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q})} h_p(\sigma(x)) \ ,$$

et telles que

- il existe $p_0 \in \mathcal{P}$ tel que pour tout $p \in \mathcal{P}$, $p \geq p_0$, $h_p = \log^+ |\cdot|_p$,
- pour tout $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$, il existe $C_p > 0$ telle que $\|h_p - \log^+ |\cdot|_p\|_{L^\infty(\mathbb{C}_p)} \leq C_p$.

Pour toute fonction hauteur, il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$|h(x) - h_{\mathrm{nv}}(x)| \leq C$$

pour tout $x \in \bar{\mathbb{Q}}$. En particulier, on a la propriété suivante.

Proposition 1.3. — *Pour tout $B > 0$ et tout $R > 0$, l'ensemble*

$$\{x \in \bar{\mathbb{Q}}\, ;\ h(x) \leq B \text{ et } [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] \leq R\}$$

est un ensemble fini.

Remarque. — Si $h_p \neq \log^+ |\cdot|_p$ pour un seul $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $\{h = 0\}$ peut être très différent de l'ensemble des racines de l'unité. On verra un exemple concret dans la seconde partie.

1.2. Un peu de théorie du potentiel

Nous allons avoir besoin de certains résultats classiques de théorie du potentiel dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}_p}$. En voilà un résumé. A noter que, pour être rigoureux, lorsque $p \in \mathcal{P}$, on devrait se placer sur la droite affine de Berkovitch, et non sur la droite affine classique. Pour donner une idée des choses, nous omettrons de le faire. On pourra se référer à [**Ra**] pour le cas complexe et à [**BaR**] pour le cas non-archimedien.

1.2.1. A la place complexe

Soit $E \subset \mathbb{C}$ un compact plein non-polaire. La *fonction de Green* de E est l'unique fonction sous-harmonique $g_E : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ telle que

- $\{z \in \mathbb{C}\, ;\ g_E(z) = 0\} = E$,
- $g_E(z) = \log^+ |z| - c + o(1)$ au voisinage de ∞,
- g_E est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus E$.

La constante e^c est appelée la *capacité logarithmique* de E et noté $\gamma_\infty(E)$. La mesure de probabilité $\mu_E = \Delta g_E$ est appelée la *mesure d'équilibre* de E. Il s'agit d'une mesure d'équilibre au sens suivant.

Si μ est une mesure de probabilité supportée par E, l'énergie de μ est

$$I(\mu) = \iint \log|z-w|\, d\mu(z) d\mu(w) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \ .$$

La mesure μ_E est l'unique mesure de probabilité portée par E telle que

$$I(\mu_E) = \log(\gamma_\infty(E)) = \sup_{\mu \in \mathrm{Proba}(E)} I(\mu) \ .$$

1.2.2. Aux places p-adiques

Soit maintenant $E_p \subset \mathbb{C}_p$ un ensemble fermé borné "'non-polaire". La *fonction de Green-Arakelov* de E_p est l'unique fonction "sous-harmonique" $g_{E_p} : \mathbb{C}_p \to \mathbb{R}_+$ telle que

- $\{z \in \mathbb{C}_p\,;\ g_{E_p}(z) = 0\} = E_p$,
- $g_{E_p}(z) = \log^+|z|_p - c_p + o(1)$ lorsque $|z|_p \to \infty$,
- g_{E_p} est harmonique sur $\mathbb{C}_p \setminus E_p$ (quel que soit le sens que cela puisse avoir).

La constante e^{c_p} est appelée la *capacité logarithmique* de E_p et noté $\gamma_p(E_p)$. On peut aussi montrer dans ce contexe-là que la "mesure" Δg_{E_p} est l'unique extremum de l'énergie et qu'en cet extremum, l'énergie atteind la valeur $\log\gamma_p(E_p)$.

1.2.3. Ensembles adéliques et hauteur associée

Un *ensemble adélique* est une collection $\mathbb{E} = \{E_p\}_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}}$ d'ensembles tels que

- E_∞ est un compact plein non-polaire de $\mathbb{C}$,
- pour tout $p \in \mathcal{P}$, E_p est un fermé borné de $\mathbb{C}_p$,
- il existe $p_0 \in \mathcal{P}$ tel que pour tout $p \in \mathcal{P}$ tel que $p \geq p_0$, $E_p = \bar{B}_p(0,1)$ est la boule unité fermée de $\mathbb{C}_p$.

La *capacité adélique* de $\mathbb{E}$ est le nombre

$$\gamma(\mathbb{E}) := \prod_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}} \gamma_p(E_p) \ .$$

Dans toute la suite, nous considérerons des ensembles adéliques de capacité 1.

A un ensemble adélique $\mathbb{E} = \{E_p\}_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}}$, on peut naturellement associer une fonction hauteur. Pour tout $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$, on définit la hauteur locale à la place p comme la fonction de Green g_{E_p} de E_p, i.e. on pose

$$h_{\mathbb{E}}(x) = \frac{1}{[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}]} \sum_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q})} g_{E_p}(\sigma(x)), \quad x \in \bar{\mathbb{Q}} \ .$$

Remarque. — Les hypothèses que l'on fait sur la collection $\mathbb{E}$ garantissent que $h_{\mathbb{E}}$ est bien une fonction hauteur au sens que l'on a défini précédemment.

1.3. Equidistribution des points de petite hauteur

Soit h une fonction hauteur. Nous dirons qu'une suite d'ensembles finis $X_n \subset \bar{\mathbb{Q}}$ est de *petite hauteur pour* h si $X_n = \{P_n = 0\}$ avec $P_n \in \mathbb{Q}[z]$ et si

$$h(X_n) = \frac{1}{\# X_n} \sum_{x \in X_n} h(x) \longrightarrow_{n \to \infty} 0 \ .$$

Le théorème suivant est connu sous le nom de *théorème d'équidistribution des points de petite hauteur sur la droite projective.* De multiples versions de ce résultat ont été établies dans la littérature, notamment par Bilu [**Bi**], Rumely [**R**], Baker et H'sia [**BaH**], Favre et Riera-Letelier [**FRL**], ...

Théorème 1.4. — *Soit $\mathbb{E} = \{E_p\}_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}$ un ensemble adélique de capacité adélique $\gamma(\mathbb{E}) = 1$. Soit $X_n \subset \bar{\mathbb{Q}}$ une suite d'ensembles finis de petite hauteur pour la hauteur $h_{\mathbb{E}}$ telle que $n \neq m \Rightarrow X_n \neq X_m$. Alors la suite de mesures*

$$\mu_n := \frac{1}{\# X_n} \sum_{z\in X_n} \delta_z$$

équidistribuées sur les X_n converge au sens faible des mesures vers la mesure d'équilibre μ_{E_∞} du compact E_∞ du plan complexe.

Démonstration dans le cas $E_p = \bar{B}_p(0,1)$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. — Commençons par poser $N_n := \# X_n$. Puisque X_n est une suite de petite hauteur et puisque les X_n sont deux-à-deux distincts, on peut remarquer que le degré de $\mathbb{Q}(X_n)$ comme extension algébrique de $\mathbb{Q}$ tend vers $+\infty$, ce qui implique que $N_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. De plus, la mesure μ_n étant une mesure de probabilité, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\mu_n \to \nu$ au sens faible des mesures. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\nu \neq \mu_{E_\infty}$.

Remarquons que lorsque $E_p = \bar{B}_p(0,1)$ pour tout $p \in \mathcal{P}$, l'hypothèse $\gamma(\mathbb{E}) = 1$ impose $\gamma_\infty(E_\infty) = 1$. Remarquons par ailleurs que, puisque $h_{\mathbb{E}}(X_n) \to 0$, la mesure ν doit être supportée par E_∞. Puisque μ_{E_∞} est la mesure d'équilibre de E_∞, l'hypothèse $\nu \neq \mu_{E_\infty}$ peut donc être traduite par

$$I(\nu) < I(\mu_{E_\infty}) = \log(\gamma_\infty(E_\infty)) = 0 \ .$$

Soit $D_n := \prod_{x,y\in X_n, x\neq y}(x-y)$. Comme D_n est $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q})$-invariant, $D_n \in \mathbb{Q}^\times$. Tout consiste maintenant à relier D_n à $h_{\mathbb{E}}(X_n)$ et à $I(\nu)$ pour aboutir à une contradiction.

−Etape 1: à la place archimédienne. On va s'appuyer sur le lemme suivant.

Lemme 1.5. — *Si Δ est la diagonale de $\mathbb{C}^2$, alors*

$$\limsup_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{C}^2\setminus\Delta} \log|z-w|\, d\mu_n(z) d\mu_n(w) \leq I(\nu) < 0 \ .$$

Il est clair que

$$\frac{1}{N_n^2}\log|D_n|_\infty = \frac{1}{N_n^2}\sum_{\substack{x,y\in X_n\\ y\neq y}} \log|x-y|_\infty = \iint_{\mathbb{C}^2\setminus\Delta} \log|z-w|\, d\mu_n(z)d\mu_n(w) \ ,$$

donc le Lemme 1.5 donne

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{N_n(N_n-1)} \log|D_n|_\infty \leq I(\nu) < 0 \ .$$

−Etape 2: aux places non-archimédiennes. Pour $p \in \mathcal{P}$, puisque $|\cdot|_p$ est non-archimédienne, pour tout choix de $x \in X_n$, on a

$$\begin{aligned}\log|D_n|_p &= \sum_{\substack{x,y\in X_n\\ y\neq y}} \log|x-y|_p \leq 2(N_n-1)\sum_{x\in X_n}\log^+|x|_p\\ &\leq 2N_n(N_n-1)\cdot\frac{1}{N_n}\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(X_n)/\mathbb{Q})}\log^+|\sigma(x)|_p\ .\end{aligned}$$

En sommant sur $p \in \mathcal{P}$, on trouve que

$$\sum_{p\in\mathcal{P}}\log|D_n|_p \leq 2N_n(N_n-1)h_{\mathbb{E}}(X_n)\ .$$

−Etape 2: conclusion. Fixons une $\epsilon > 0$ tel que $I(\nu) < -3\epsilon < 0$. D'après ce que l'on a vu jusqu'à présent, on peut trouver $n \geq 1$ assez grand pour que

- $N_n > 1$,
- $h_{\mathbb{E}}(X_n) < \epsilon$ et
- $\frac{1}{N_n(N_n-1)}\log|D_n|_\infty \leq I(\nu)+\epsilon$.

Comme $D_n \in \mathbb{Q}^\times$, on a $\sum_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}\log|D_n|_p = \log\left(\prod_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}|D_n|_p\right) = \log 1 = 0$ d'où

$$\begin{aligned}0 &\leq 2N_n(N_n-1)h_{\mathbb{E}}(X_n) + N_n(N_n-1)(I(\nu)+\epsilon)\\ &\leq 2N_n(N_n-1)\epsilon + N_n(N_n-1)(I(\nu)+\epsilon)\\ &\leq N_n(N_n-1)(I(\nu)+3\epsilon) < 0\ ,\end{aligned}$$

d'où la contradiction. □

Démonstration du Lemme 1.5. — Il faut commencer par montrer que pour tout $M > 0$, si on pose $u_M(z,w) := \max\{\log|z-w|, -M\}$, alors

$$\limsup_{n\to\infty}\iint_{\mathbb{C}^2\setminus\Delta} u_M(z,w)\,d\mu_n(z)d\mu_n(w) \leq \iint_{E_\infty\times E_\infty} u_M(z,w)\,d\nu(z)d\nu(w)\ . \tag{2}$$

Tout d'abord, remarquons que

$$\iint_{\mathbb{C}^2\setminus\Delta} u_M(z,w)\,d\mu_n(z)d\mu_n(w) = \iint_{\mathbb{C}^2} u_M(z,w)\,d\mu_n(z)d\mu_n(w) - \frac{M}{N_n}\ .$$

Soient $E_\infty \Subset U \Subset V \Subset \mathbb{C}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_U = 1$ et $\varphi|_{\mathbb{C}\setminus V} = 0$. Alors il est clair que l'on a

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{C}^2} u_M(z,w)\,d\mu_n(z)d\mu_n(w) &= \iint_{V^2} u_M(z,w)\varphi(z)\varphi(w)\,d\mu_n(z)d\mu_n(w)\\ &\quad +2\iint_{(\mathbb{C}\setminus U)\times V} u_M(z,w)(1-\varphi(z))\varphi(w)\,d\mu_n(z)d\mu_n(w)\\ &\quad +\iint_{(\mathbb{C}\setminus U)^2} u_M(z,w)(1-\varphi(z))(1-\varphi(w))\,d\mu_n(z)d\mu_n(w).\end{aligned}$$

Par ailleurs, il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\begin{cases}\log|z-w| \leq g_{E_\infty}(z) + L & (z,w)\in(\mathbb{C}\setminus U)\times V,\\ \log|z-w| \leq g_{E_\infty}(z) + g_{E_\infty}(w) + L & (z,w)\in(\mathbb{C}\setminus U)^2.\end{cases}$$

De plus, il est clair que

$$\frac{1}{N_n}\sum_{x\in X_n} g_{E_\infty}(x) = \frac{1}{N_n^2}\sum_{x\in X_n}\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(X_n)/\mathbb{Q})} g_{E_\infty}(\sigma(x)) \leq h_{\mathbb{E}}(X_n)\ ,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{C}^2\setminus\Delta} u_M(z,w)\, d\mu_n(z)d\mu_n(w) \quad &\leq \quad \iint_{V^2} u_M(z,w)\, d\nu(z)d\nu(w)\\ &\quad +4h_{\mathbb{E}}(X_n) + 3L\cdot\mu_n(\mathbb{C}\setminus U) - \frac{M}{N_n}\ .\end{aligned}$$

On obtient (2) en passant à la limsup. Pour conclure, il suffit de remarquer que le membre de droite converge vers $I(\nu)$ par convergence L^1_{loc} de u_M vers $\log|z-w|$ et de remarquer que $\log|z-w| \leq u_M(z,w)$. □

Favre et Rivera-Letelier [**FRL**] ont montré le raffinement suivant, qui donne des estimées de vitesse de convergence. La preuve est nettement plus technique que celle ci-dessus.

Théorème 1.6 (Favre-Rivera-Letelier). — *Soit $\mathbb{E} = \{E_p\}_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}$ un ensemble adélique de capacité adélique $\gamma(\mathbb{E}) = 1$ et tel qu'il existe $0 < \alpha \leq 1$ tel que g_{E_p} est α-Hölder pour tout $p \in \mathcal{P}\cup\{\infty\}$. Il existe $C(\alpha) > 0$ telle que, si $X_n \subset \bar{\mathbb{Q}}$ est une suite d'ensembles finis de petite hauteur pour la hauteur $h_{\mathbb{E}}$, pour tout $n \geq 1$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{C})$ à support compact,*

$$\left|\frac{1}{\#X_n}\sum_{z\in X_n}\varphi(z) - \int_{\mathbb{C}}\varphi\, d\mu_{E_\infty}\right| \leq C(\alpha)\left(h_{\mathbb{E}}(X_n) + \frac{\log\#X_n}{\#X_n}\right)^{1/2}\cdot\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1}\ .$$

2. Application dans la famille quadratique

Le but de cette partie est de déduire du théorème d'équidistribution arithmétique des phénomènes d'équidistribution dans l'espace des modules des polynômes quadratiques. Les notes d'Orsay [**DHu1, DHu2**] fournissent une liste assez exhaustive, ainsi que les preuves, de tous les résultats que nous utilisons dans la famille quadratique.

2.1. Dynamique des polynômes quadratiques et l'ensemble de Mandelbrot

Rappelons que l'espace des modules est polynômes quadratiques est l'espace des polynômes quadratique quotienté par l'action par conjugaison du groupe affine de $\mathbb{C}$. Cet espace est isomorphe à $\mathbb{C}$. On peut le paramètrer par la famille $(f_c)_{c\in\mathbb{C}}$ définie par $f_c(z) := z^2 + c$. On note f_c^n la n-ième itérée de f_c.

Rappelons que l'*ensemble de Julia rempli* de f_c est l'ensemble

$$K_c := \{z\in\mathbb{C}\,;\ (f_c^n(z))_{n\geq1} \text{ est bornée dans } \mathbb{C}\}.$$

Il est classique qu'il y a une dichotomie: soit $0 \in K_c$ et K_c est connexe et plein, soit $0 \notin K_c$ et K_c est une ensemble de Cantor diadique. On peut alors définir l'*ensemble de Mandelbrot* M comme suit

$$M := \{c\in\mathbb{C}\,;\ (f_c^n(0))_{n\geq1} \text{ est bornée dans } \mathbb{C}\}.$$

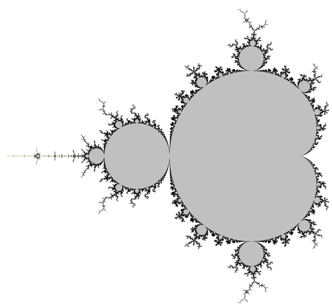

FIGURE 1. L'ensemble de Mandelbrot.

Il est connu que $M = \{c \in \mathbb{C}\,;\ K_c$ est connexe$\}$. La frontière topologique de M est l'ensemble des paramètres pour lesquels la dynamique change drastiquement sous de petites perturbations du paramètre.

Lemme 2.1 (Douady-Hubbard). — *La fonction de Green g_M de l'ensemble de Mandelbrot M satisfait les propriétés suivantes:*

1. $g_M(c) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \log^+ |f_c^n(c)|$ *et la convergence est uniforme locale,*
2. $g_M(c) = \log^+ |c| + o(1)$ *lorsque* $|c| \to \infty$*, d'où* $\gamma_\infty(M) = 1$.

Idée de la démonstration. — La fonction de Green dynamique de f_c est définie par

$$g_c(z) := \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \log^+ |f_c^n(z)| \ .$$

La convergence est uniforme locale en (z, c) et g_c est la fonction de Green de K_c:

- $\{z \in \mathbb{C}\,;\ g_c(z) = 0\} = K_c$,
- $g_c(z) = \log^+ |z| + o(1)$ lorsque $|z| \to \infty$,
- g_c est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus K_c$.

En fait, la fonction de Green de l'ensemble de Mandelbrot peut se construire explicitement à l'aide de g_c. Posons $g(c) := g_c(c)$ pour $c \in \mathbb{C}$. Par construction de g, on a

$$\{g(c) = 0\} = M \quad \text{et} \quad g(c) = g_c(c) = \log^+ |c| + o(1)$$

et g est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus M$. Ainsi, par unicité de g_M, on a $g = g_M$. □

2.2. Equidistribution des paramètres postcritiquement finis

Un polynôme quadratique f_c est dit *postcritiquement fini* ou *PCF* si son point critique 0 est d'orbite finie sous intération de f_c, i.e. si 0 est (pré)périodique sous itération de f_c. Pour $n > k$, on note

$$\mathrm{Per}(n, k) := \{c \in \mathbb{C}\,;\ f_c^n(0) = f_c^k(0)\} \ .$$

2.2.1. Le résultat

Le théorème 1.4 d'équidistribution arithmétique de la première partie donne le résultat suivant. Ce résultat a été démontré, dans sa version qualitative, indépendamment par Levin [**Le**] et Lyubich [**Ly**], puis dans sa version quantitative par Favre-Rivera-Letelier [**FRL**]. Nous donnons ici une version certainement non-optimale, quant aux conditions imposées sur la suite $k(n)$.

Théorème 2.2 (Levin, Lyubich, Favre-Rivera-Letelier). — *Il existe $C > 0$ telle que si $0 \leq k(n) < n$ est une suite telle que*

1. *soit $k(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*
2. *soit $k(n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n - k(n) \to \infty$ lorsque $n \to \infty$,*

alors pour tout $n \geq 1$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{C})$ à support compact

$$\left| \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{c \in \mathrm{Per}(n,k(n))} \varphi(c) - \int_{\mathbb{C}} \varphi \, d\mu_M \right| \leq C \sqrt{\frac{n}{2^n}} \cdot \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1} \ ,$$

où $\mu_M = \Delta g_M$ est la mesure d'équilibre de M.

La preuve repose sur le Théorème 1.6. Commençons par expliquer comment appliquer le Théorème 1.4 pour obtenir la convergence faible de $2^{-n+1} \sum_{c \in \mathrm{Per}(n,k(n))} \delta_c$ vers μ_M. On verra ensuite comment compter les éléments de $\mathrm{Per}(n, k(n))$ pour conclure.

Tout d'abord, il faut remarquer que $f_c^n(0) - f_c^{k(n)}(0) \in \mathbb{Q}[c]$. Ainsi $\mathrm{Per}(n, k(n)) \subset \bar{\mathbb{Q}}$. Cela fait donc sens de vouloir utiliser le Théorème d'équidistribution arithmétique.

2.2.2. L'ensemble de Mandelbrot adélique

Pour $p \in \mathcal{P}$, on note définit l'ensemble de Mandelbrot p-adique M_p par

$$M_p := \{c \in \mathbb{C}_p \, ; \ (f_c^n(0))_{n \geq 1} \text{ est bornée dans } \mathbb{C}_p\} \ .$$

On pose alors $M_\infty = M$.

Lemme 2.3 (Favre-Rivera-Letelier). — *La collection $\mathbb{M} = \{M_p\}_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}}$ est un ensemble adélique. De plus,*

1. *pour tout $p \in \mathcal{P}$, M_p est la boule unité fermée $\bar{B}_p(0,1)$ de $\mathbb{C}_p$,*
2. *pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $c \in \mathbb{C}_p$, $\log^+ |c|_p = g_{M_p}(c) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \log^+ |f_c^n(c)|_p$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{C}_p$.*
3. *la fonction hauteur induite $h_{\mathbb{M}}$ satisfait $h_{\mathbb{M}}(c) = 0$ si et seulement si f_c est PCF, i.e.*

$$\{c \in \bar{\mathbb{Q}} \, ; \ h_{\mathbb{M}}(c) = 0\} = \bigcup_{0 \leq k < n} \mathrm{Per}(n, k) \ .$$

Démonstration. — Soit $p \in \mathcal{P}$. Si $|c|_p \leq 1$, l'inégalité triangulaire forte donne $|f_c(c)|_p \leq 1$ et, par récurrence, $|f_c^n(c)|_p \leq 1$. Ainsi $g_{M_p}(c) = 0$. Si maintenant $|c|_p > 1$, on a de même $|f_c(c)|_p = |c|_p^2$ et par récurrence, $|f_c^n(c)|_p = |c|_p^{2^n}$ et les points 1 et 2 sont démontrés.

Pour prouver le point 3, nous devons introduire la *hauteur canonique* h_c de f_c pour $c \in \bar{\mathbb{Q}}$. On pose (si $c \in \mathbb{Q}$, sinon, c'est un peu plus compliqué à écrire, mais similaire)

$$h_c(z) = \frac{1}{\deg(z)} \sum_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})} g_{c,p}(\sigma(z)) \ , \quad z \in \bar{\mathbb{Q}} \ ,$$

où $g_{c,p}(z) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \log^+ |f_c^n(z)|_p$. Alors il est clair que $h_c(f_c(z)) = 2h_c(z)$ pour tout $z \in \bar{\mathbb{Q}}$. On va utiliser le lemme suivant.

Lemme 2.4. — *$h_c(z) = 0$ si et seulement s'il existe $n > k \geq 0$ tels que $f_c^n(z) = f_c^k(z)$.*

Pour conclure, il suffit de remarquer que $h_{\mathbb{M}}(c) = h_c(c)$. Ainsi,

$$h_{\mathbb{M}}(c) = 0 \Leftrightarrow h_c(c) = 0 \Leftrightarrow \exists n > k \geq 0, f_c^n(c) = f_c^k(c) \ ,$$

ce qui finit la preuve. □

Démonstration du Lemme 2.4 pour $c \in \mathbb{Q}$. — Si $f_c^n(z) = f_c^k(z)$, alors $2^n h_c(z) = h_c(f_c^n(z)) = h_c(f_c^k(z)) = 2^k h_c(z)$. Comme $k < n$, on a bien $h_c(z) = 0$. La réciproque repose encore une fois sur la propriété de Northcott. Si $h_c(z) = 0$, puisque $f_c^n(z) \in \mathbb{Q}(z)$ pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{f_c^n(z)\,;\ n \geq 0\}$ est fini et le principe des tiroirs permet de conclure. □

D'après le Théorème 1.4, on a déjà montré la convergence faible.

2.2.3. La dernière étape: dénombrer $\mathrm{Per}(n, k(n))$

On s'intéresse maintenant aux arguments qui vont nous permettre de donner une estimation du cardinal de $\mathrm{Per}(n, k(n))$. Ils sont importants ici seulement pour obtenir une vitesse de convergence, mais on verra parès qu'en dimension plus grande, ces arguments de comptage deviennent cruciaux pour l'obtention de la convergence.

Commençons par remarquer que, puisque $\deg_c(f_c^n(0) - f_c^{k(n)}(0)) \leq 2^{n-1}$, on a $\log \#\mathrm{Per}(n, k(n)) \leq n \log 2$. D'après le Théorème 1.6, il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ telle que dans les deux cas que nous avons imposés sur $k(n)$, $\#\mathrm{Per}(n, k(n)) \geq C 2^n$.

Le cas $k(n) \equiv 0$. — Puisque $\deg_c(f_c^n(0)) = 2^{n-1}$, il suffit de montrer que toute racine c_0 de $f_{c_0}^n(0) = 0$ est simple. Posons $Q_n(c) := f_c^n(0)$ et choisissons une racine c_0 de Q_n. Alors $Q_n(c) = Q_{n-1}(c)^2 + c$ donc $Q_n'(c) = 2Q_{n-1}(c) + 1$. Soit $\mathbb{K}$ le corps de rupture du polynôme Q_n et soit $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$. Puisque $Q_n \in \mathbb{Z}[c]$ est unitaire, $c_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. On remarque par ailleurs que 2 n'est pas inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ et on note $\mathcal{I} := (2)$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ engendré par 2. On a alors $Q_n'(c_0) = 1 \pmod 2$. En particulier, $Q_n'(c_0) \neq 0$ et c_0 est une racine simple de Q_n.

Le cas $n - k(n) \to \infty$. — Soit $\phi_c : \{z \in \mathbb{C}\,;\ g_c(z) > g_c(0)\} \to \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}(0, e^{g_c(0)})$ la coordonnée de Böttcher de f_c, i.e. ϕ_c est un biholomorphisme avec $\phi_c(z) = z + o(1)$ et

$$\phi_c(f_c(z)) = (\phi_c(z))^2 \ , \text{ pour tout } z \in \{g_c > g_c(0)\} \ .$$

On a alors $g_c(z) = \log|\phi_c(z)|$ si $g_c(z) > g_c(0)$ et, par conséquent, $g_M(c) = \log|\phi_c(c)|$. De plus, il est connu depuis les travaux de Douady et Hubbard que $\Phi : \mathbb{C} \setminus M \to \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ définie par $\Phi(c) := \phi_c(c)$ est un biholomorphisme.

Considérons les *rayons externes* de l'ensemble de Mandelbrot: pour $\theta \in [0, 1]$, on pose

$$\mathcal{R}_\theta := \Phi^{-1}\left(]1, +\infty[\times e^{2i\pi\theta}\right) \text{ et } \mathcal{R}_\theta(t) := \Phi^{-1}\left(te^{2i\pi\theta}\right) \ , \ t > 1 \ .$$

Si $2^n\theta = 2^m\theta \mod 1$ et θ est à dénominateur impair, alors $c(\theta) = \lim_{t \to 1^+} \mathcal{R}_\theta(t)$ existe et $f_{c(\theta)}^{n+1}(0) = f_{c(\theta)}^{m+1}(0)$. De plus, ils ont montré que $c(\theta)$ est une racine simple de $f_c^{n+1}(0) = f_c^{m+1}(0)$ si et seulement si $n - m$ est la période de $2^m\theta$ par multiplication par 2 modulo 1 et $2^n\theta = 2^m\theta \mod 1$.

Il suffit alors de compter de tels angles θ:

$$\#\{\theta\,;\ 2^{n-1}\theta = 2^{k(n)-1}\theta \mod 1 \text{ et la solution est } \textit{primitive}\} \geq C \cdot 2^n \ ,$$

ce qui donne l'estimée recherchée.

3. Equidistribution arithmétique sur $\mathbb{P}^k$

Cette section repose sur les travaux de Yuan [**Y**] (voir aussi [**CL1**]).

3.1. Le fibré en droite $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$

Rappelons que le fibré en droites $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$ peut être défini par

$$\mathcal{O}(1) = \left(\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{C} / \sim$$

où $(z,t) \sim (w,s)$ s'il existe $u \in \mathbb{C}^\times$ tel que $z = uw$ et $t = us$. On note $[z,t]$ la classe de (z,t). Il est connu que les sections de $\mathcal{O}(1)$ sont les polynômes homogènes de degré 1. Un *métrique semi-positive continue* $\|\cdot\|$ sur ce fibré est la donnée pour toute carte U d'une fonction psh continue $g_U : U \to \mathbb{R}$ telle que pour toute section s sur U,

$$\|s\| = |s(z)|e^{-g_u(z)} \ , \quad z \in U \ ,$$

avec $g_U \circ \varphi_{U,U'} = g_{U'}$ pour tout changement de carte $\varphi_{U,U'} : U' \to U$.

Une autre façon de décrire une telle métrique est la suivante. Si $g \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}(\mathbb{C}^k)$ est telle que $g(z) - \log^+ \max_i |z_i|$ s'étend continuement le long du diviseur à l'infini de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$, alors $\|s\| := |s|e^{-g}$ définit une métrique semi-positive continue sur $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$.

Exemple 1. — La fonction $\log^+ \max_{1 \leq i \leq k} |z_i|$ définit une métrique:

$$\|[z,t]\|_{\mathrm{nv}} = |t| e^{-\log^+ \max_i |z_i|} = |t| \cdot \max_i \{1, |z_i|\} \ .$$

Si s est la section $s \equiv 1$ sur $\mathbb{C}^k$, i.e. $s([z_0 : \cdots : z_k]) = z_0$ et $\mathbb{C}^k = \{z_0 = 1\}$, la *forme de courbure* $c_1(\|\cdot\|)$ de la métrique $\|\cdot\|$ est alors

$$c_1(\|\cdot\|) := dd^c \log \|s\| \ .$$

Si $\|\cdot\| = |\cdot|e^{-g}$ sur $\mathbb{C}^k$, cette forme de courbure n'est rien d'autre que l'extension triviale à $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$ du courant $dd^c g$ de $\mathbb{C}^k$.

3.2. Reformulation du théorème d'équidistribution en dimension 1

Si $E \subset \mathbb{C}$ est un compact plein non-polaire et si g_K est sa fonction de Green, alors

$$g_K(z) - \log^+ |z| = -\log \gamma_\infty(E) + o(1)$$

donc se prolonge par continuité à l'infini. La fonction g_K induit donc une métrique $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. En fait, si $\mathbb{E} = \{E_p\}_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}}$ est un ensemble adélique de capacité adélique 1, il est associé à une *métrique adélique* $\{\|\cdot\|_p\}_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}}$ sur $\mathcal{O}(1)$, c'est-à-dire que

- la métrique $\|\cdot\|_\infty = |\cdot|e^{-g_\infty}$ est semi-positive continue sur $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$,
- pour tout $p \in \mathcal{P}$, la métrique $\|\cdot\|_p = |\cdot|e^{-g_p}$ est continue sur $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p}$, au sens où $g_p - \log^+ |\cdot|_p$ s'étend continuement à l'infini,
- il existe une suite $P_n \in \mathbb{Q}[z]$ de polynômes telle que $d_n = \deg(P_n) \to \infty$ et telle que $g_p = \lim_n d_n^{-1} \log^+ |P_n|_p$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{C}_p$, (c'est ce qui remplace la notion de semi-positivité aux places non-archimédiennes. On dit que $\|\cdot\|_p$ est limite uniforme de métriques modèles.)

- il existe $p_0 \in \mathcal{P}$ tel que pour tout $p \in \mathcal{P}$ avec $p \geq p_0$, $\|\cdot\|_p$ est la métrique naïve, i.e. $g_p = \log^+ |\cdot|_p$,
- on a toujours besoin de l'hypothèse $\prod_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}} \gamma_p(\{g_p = 0\}) = 1$.

La fonction hauteur induite n'est autre que la fonction

$$h_{\|\cdot\|}(x) = \frac{1}{[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}]} \sum_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}} \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q})} g_p(\sigma(x)), \quad x \in \bar{\mathbb{Q}}.$$

Le Théorème 1.4 se reformule alors comme suit. Cette formulation se généralise en dimension plus grande.

Théorème 3.1 (Théorème 1.4 revisité). — *Soit $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}$ une métrique adélique. Soit $X_n \subset \bar{\mathbb{Q}}$ une suite d'ensembles finis de petite hauteur pour la hauteur $h_{\|\cdot\|}$ telle que $n \neq m \Rightarrow X_n \neq X_m$. Alors la suite de mesures*

$$\mu_n := \frac{1}{\# X_n} \sum_{z\in X_n} \delta_z$$

équidistribuées sur les X_n converge au sens faible des mesures vers la forme de courbure $c_1(\|\cdot\|_\infty)$ de $\|\cdot\|_\infty$.

3.3. Le cas des espaces peojectifs de dimension plus grande

Une *métrique adélique* $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}$ sur $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^k$ est une collection de métriques telles que

- $\|\cdot\|_\infty$ est une métrique semi-positive continue sur $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$. On supposera aussi qu'elle est induite par une fonction psh continue $G : \mathbb{C}^k \to \mathbb{R}_+$, et donc que $\{G = 0\}$ est compact dans $\mathbb{C}^k$,
- pour tout $p \in \mathcal{P}$, $\|\cdot\|_p$ est une métrique continue sur $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}_p}$ induite par une fonction continue $G_p : \mathbb{C}_p^k \to \mathbb{R}_+$, telle que $G_p - \log^+ \max_i |z_i|_p$ s'étend continuement le long du diviseur à l'infini de $\mathbb{C}_p$ dans $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}_p}$.
- il existe une suite de k-uplets $P_{n,1} \ldots, P_{n,k} \in \mathbb{Q}[z]$ de polynômes telle que $d_n = \deg(P_{n,i}) \to \infty$, telle que $d_n^{-1} \log^+ \max_i |P_{n,i}(z)|_p - \log^+ \max_i |z_i|_p$ se prolonge par continuité au diviseur à l'infini de $\mathbb{C}_p^k$ dans $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}_p}$, et telle que $G_p = \lim_n d_n^{-1} \log^+ \max_i |P_{n,i}|_p$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{C}_p^k$,
- il existe $p_0 \in \mathcal{P}$ tel que pour tout $p \in \mathcal{P}$ avec $p \geq p_0$, $\|\cdot\|_p$ est la métrique naïve, i.e. $G_p(z) = \log^+ \max_i |z_i|_p$,
- on a toujours besoin de l'hypothèse $\prod_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}} \gamma_p(\{G_p = 0\}) = 1$.

La fonction hauteur $h_{\|\cdot\|}$ induite par $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}$ est définie comme suit. Si $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \bar{\mathbb{Q}}^k$, on pose $\mathbb{Q}(x) := \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_k)$ et

$$h_{\|\cdot\|}(x) := \frac{1}{[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}]} \sum_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}} \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q})} g_p(\sigma(x)).$$

Comme dans le cas de la dimension 1, on dira qu'une suite d'ensembles finis $Z_n \subset \bar{\mathbb{Q}}^k$ est *petite pour* $h_{\|\cdot\|}$, si $Z_n = \bigcap_{1\leq i\leq k}\{P_{n,i} = 0\}$ avec $P_{n,i} \in \mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_k]$ et si $h_{\|\cdot\|}(Z_n) = \frac{1}{\# Z_n} \sum_{x\in Z_m} h_{\|\cdot\|}(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

On dira également que Z_n est *générique* si pour toute hypersurface $H = \{P = 0\}$ avec $P \in \mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_k]$, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $H \cap Z_n = \emptyset$.

Théorème 3.2 (Yuan). — *Soit $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}$ une métrique adélique et soit $Z_n \subset \bar{\mathbb{Q}}^k$ une suite d'ensemble finis qui est petite pour $h_{\|\cdot\|}$ et qui est générique. Alors la suite*

$$\mu_n := \frac{1}{\# Z_n}\sum_{x\in Z_n}\delta_x$$

de mesures equidistribuées sur Z_n converge faiblement vers la mesure de Monge-Ampère $(c_1(\|\cdot\|_\infty))^k$ associée à la métrique $\|\cdot\|_\infty$.

La preuve est beaucoup plus délicate qu'en dimension 1. Par ailleurs, la condition de généricité est très difficile à vérifier, voire fausse dans les cas où l'on veut appliquer ce résultat. On va donc commencer par chercher à affaiblir cette condition (voir [**FG**, §5.5]).

Corollaire 3.3. — *Soit $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}$ une métrique adélique et soit $Z_n \subset \bar{\mathbb{Q}}^k$ une suite d'ensemble finis qui est petite pour $h_{\|\cdot\|}$. Supposons par ailleurs que pour toute hypersurface algébrique $H\subset\mathbb{P}^k$, telle que $H=\{P=0\}$ avec $P\in\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_k]$,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\left(H\cap Z_n\right)}{\# Z_n} = 0\ .$$

Alors la suite de mesures

$$\mu_n := \frac{1}{\# Z_n}\sum_{x\in Z_n}\delta_x$$

equidistribuées sur Z_n converge faiblement vers la mesure de Monge-Ampère $(c_1(\|\cdot\|_\infty))^k$.

Démonstration. — Soit $\epsilon>0$ fixé. Comme il n'existe qu'un ensemble dénombrable d'hypersurfaces algébriques de la forme $\{P=0\}$ avec $P\in\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_k]$, par un extraction diagonale, il existe une suite $Z_{n,\epsilon}\subset\bar{\mathbb{Q}}$ d'ensemble finis tels que

1. $Z_{n,\epsilon}\subset Z_n$ et $Z_{n,\epsilon}=\bigcap_{1\leq i\leq k}\{P_{n,i,\epsilon}=0\}$ avec $P_{n,i,\epsilon}\in\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_k]$,
2. $\{Z_{n,\epsilon}\}$ est une suite générique,
3. $\# Z_{n,\epsilon}\geq(1-\epsilon)\# Z_n$ pour tout $n\geq 1$.

Posons $\mu:=(c_1(\|\cdot\|_\infty))^k$. Soit maintenant φ une fonction test. Alors, d'après le Théorème 3.2, il existe $n_0\geq 1$ tel que pour tout $n\geq n_0$, on ait

$$\left|\frac{1}{\# Z_{n,\epsilon}}\sum_{x\in Z_{n,\epsilon}}\varphi(x)-\int\varphi\, d\mu\right|\leq\epsilon.$$

Par ailleurs, par construction de $Z_{n\epsilon}$, il existe $n_1\geq 1$ tel que pour tout $n\geq n_1$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\# Z_{n,\epsilon}}\sum_{x\in Z_{n,\epsilon}}\varphi(x)-\frac{1}{\# Z_n}\sum_{x\in Z_n}\varphi(x)\right| &\leq \frac{1}{\# Z_n}\sum_{x\in Z_n\setminus Z_{n,\epsilon}}|\varphi(x)| \\ &\quad+\left(\frac{1}{\# Z_{n,\epsilon}}-\frac{1}{\# Z_n}\right)\sum_{x\in Z_{n,\epsilon}}|\varphi(x)| \\ &\leq 2\epsilon\|\varphi\|_\infty\ ,\end{aligned}$$

et on conclut en faisant $\epsilon\to 0$. □

4. Application dans l'espace des modules des polynômes cubiques

Le but de ce dernier paragraphe est d'expliquer comment utiliser le Théorème d'équidistribution des points de petite hauteur de Yuan pour décrire la distribution des polynômes cubiques postcritiquement finis. Nous nous restreignons au cas cubique par commodité, mais ce qui suit marche de façon similaire dans l'espace des modules des polynômes de degré $d \geq 3$ quelconque. Le contenu de cette partie fait l'objet d'un travail en collaboration avec Charles Favre [**FG**].

4.1. L'espace des modules $\mathcal{P}_3 = \mathbf{Poly}_3/\mathbf{Aut}(\mathbb{C})$ des polynômes cubiques

La description qui suit est due, pour sa partie topologique à Branner et Hubbard [**BrHu**], et pour sa partie potentialiste à Dujardin et Favre [**DuF**]. L'espace des modules $\mathcal{P}_3$ n'est pas une variété lisse. On va donc commencer par se placer dans un bon revêtement ramifié fini. Pour $(c, a) \in \mathbb{C}^2$, on pose

$$P_{c,a}(z) := \frac{1}{3}z^3 - \frac{c}{2}z^2 + a^3 \ , \quad z \in \mathbb{C}.$$

La famille $(P_{c,a})_{(c,a)\in\mathbb{C}^2}$ présente les intérêts suivants:

- la projection $\pi : (c, a) \in \mathbb{C}^2 \to \{P_{c,a}\} \in \mathcal{P}_3$, qui à un paramètre associe la classe de conjugaison du polynôme, est un revêtement ramifié fini holomorphe,
- les points critiques $c_0 := 0$ et $c_1 := c$ de $P_{c,a}$ sont des fonction algébriques du paramètre.

On note comme précédemment $g_{c,a}(z) = \lim_n 3^{-n} \log^+ |P^n_{c,a}(z)|$ la fonction de Green dynamique de $P_{c,a}$, la convergence étant uniforme locale en (z, c, a). On pose

$$G(c, a) := \max\{g_{c,a}(c_0), g_{c,a}(c_1)\} \ .$$

La fonction $G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_+$ est psh et continue et

$$\{G = 0\} = \mathcal{C}_3 := \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ K_{c,a} \text{ est connexe}\} \ .$$

Théorème 4.1 (Branner-Hubbard, Dujardin-Favre). — 1. *Le lieu de connexité $\mathcal{C}_3$ est compact dans $\mathbb{C}^2$,*

2. *La fonction G est la fonction de Green pluricomplexe de $\mathcal{C}_3$ et*

$$G(c, a) = \log^+ \max\{|c|, |a|\} + O(1) \ .$$

En particulier, la mesure de probabilité $\mu_{\mathrm{bif}} := (dd^c G)^2$ est la mesure d'équilibre de $\mathcal{C}_3$, son support coïncide avec la frontière de Shilov de $\mathcal{C}_3$ et $\gamma_\infty(\mathcal{C}_3) = 1$.

Le point 1 de ce théorème est du à Branner et Hubbard [**BrHu**] et repose en grande partie sur de l'analyse transcendante de la coordonnée de Böttcher à l'infini de $P_{c,a}$. Le deuxième point est du à Dujardin et Favre [**DuF**] et repose sur un raffinement des techniques de Branner et Hubbard et sur de la théorie du pluripotentiel complexe. En examinant bien les arguments, on peut montrer le lemme suivant.

Lemme 4.2. — *la fonction $(c, a) \in \mathbb{C}^2 \mapsto G(c, a) - \log^+ \max\{|c|, |a|\} \in \mathbb{R}$ s'étend continuement le long de la droite à l'infini de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^2$.*

Voilà une image schématique de l'espace des paramètres.

On dit que $P_{c,a}$ est *postcritiquement fini* (ou *PCF*) si $\bigcup_{n\geq1} P^n_{c,a}(\{c_1, c_0\})$ est un ensemble fini, ce qui équivaut à dire qu'il existe $n_0 > m_0 \geq 0$ et $n_1 > m_1 \geq 0$ tels que $P^{n_0}_{c,a}(c_0) = P^{m_0}_{c,a}(c_0)$ et $P^{n_1}_{c,a}(c_1) = P^{m_1}_{c,a}(c_1)$.

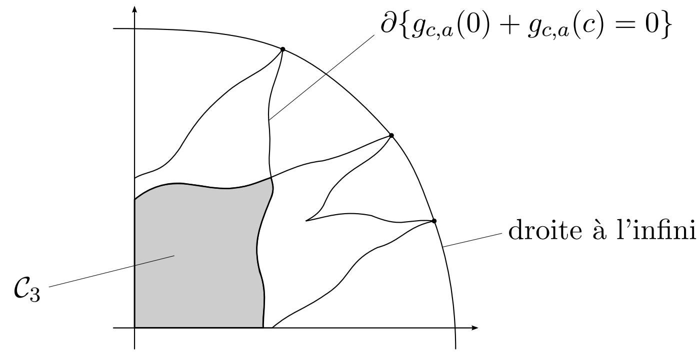

FIGURE 2. L'espace des modules des polynômes cubiques.

Remarque. — La notation μ_{bif}, pour signifier que cette mesure est la *mesure de bifurcation*, n'est pas choisie au hasard. Dans le cas de la famille $(f_c)_{c\in\mathbb{C}}$, la mesure d'équilibre μ_M de M est supportée par la frontière de M. Or cette frontière correspond à l'ensemble des paramètres de bifurcation, i.e. pour lesquels la dynamique de f_c change drastiquement sous de toutes petites perturbations de c. La mesure μ_M est appelée mesure de bifurcation de la famille quadratique.

Pour les polynômes cubiques, on peut envisager deux façon de généraliser la mesure μ_M. Le courant $T_{\text{bif}} := dd^c(g_{c,a}(c_0) + g_{c,a}(c_1))$ est une première généralisation de cette mesure μ_M. En effet, il est supporté lui aussi par le lieu de bifurcation. Ce lieu ne correspond pas à la frontière de $\mathcal{C}_3$. De plus, il est non-compact. Une autre généralisation de μ_M à la famille qui fait l'objet actuel de notre étude est la mesure μ_{bif}. Cette mesure va, en quelque sorte, mesurer les bifurcation maximales dans notre famille.

Nota Bene. — Tout ce qui suit est inspiré de mon travail [**FG**] en collaboration avec Charles Favre.

4.2. La métrique adélique de bifurcation

Pour $p \in \mathcal{P}$ on définit, comme à la place complexe, la fonction de Green dynamique p-adique de $P_{c,a}$ en posant

$$g_{c,a,p}(z) := \lim_{n\to\infty} 3^{-n} \log^+ |P^n_{c,a}(z)|_p, \quad z \in \mathbb{C}_p.$$

On définit également une fonction $G_p : \mathbb{C}_p^2 \to \mathbb{R}_+$ en posant pour $(c, a) \in \mathbb{C}^2$

$$G_p(c, a) := \max\{g_{c,a,p}(0), g_{c,a,p}(c)\} .$$

On pose également $G_\infty := G$, la fonction définie lors du paragraphe précédent.

Notre première contribution est la suivante.

Théorème 4.3 (Favre-Gauthier). — *La collection* $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}$, *où* $\|\cdot\|_p = |\cdot|_p e^{-G_p}$ *sur* $\mathbb{C}_p^2$, *définit une métrique adélique sur* $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^2$.

Idée de la preuve. — A la place complexe, tout a déjà été fait. Soit maintenant $p \in \mathcal{P}$. On peut motrer les quatre assertions suivantes:

1. La suite $\frac{1}{3^n} \log^+ \max\{|P^n_{c,a}(c)|_p, |P^n_{c,a}(0)|_p\}$ converge uniformément sur $\mathbb{C}_p^2$ ver G_p,
2. $G_p(c, a) = \log^+ \max\{|c|_p, |a|_p\} + O(1)$ lorsque $\max\{|c|_p, |a|_p\} \to \infty$,
3. si $p \geq 4 = 3 + 1$, $G_p(c, a) = \log^+ \max\{|c|_p, |a|_p\}$,

4. $\gamma_p(\{G_p = 0\}) = 1$.

Ces quatre assertions disent exactement que $\{\| \cdot \|_p\}_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}}$ est une métrique adélique. Les arguments clés de la démonstration sont les suivants:

– l'inégalité triangulaire forte,
– si $\max\{|c|_p, |a|_p\} \geq C \gg 1$ et $|P_{c,a}(c_i)|_p > \epsilon \max\{|c|_p, |a|_p\}^3$ pour $\epsilon > 0$ fixé assez petit, alors
$$g_{c,a,p}(c_i) = \frac{1}{3} \log |P_{c,a}(c_i)|_p - \frac{1}{2} \log |3|_p > 0 \ .$$
En particulier, sur l'ensemble
$$V_i := \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ \max\{|c|_p, |a|_p\} \geq C \text{ et } |P_{c,a}(c_i)|_p > \epsilon \max\{|c|_p, |a|_p\}^3\}$$
la suite $3^{-n} \log^+ |P^n_{c,a}(c_i)|_p$ converge uniformément vers $g_{c,a,p}(c_i)$,
– le Nullstellensatzt de Hilbert qui nous dit que le radical de l'idéal $(P_{c,a}(c), P_{c,a}(0))$ de $\bar{\mathbb{Q}}[c, a]$ est l'idéal maximal (c, a), ce qui implique que $V_0 \cup V_1 = \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ \max\{|c|_p, |a|_p\} \geq C\}$.

La combinaison de ces arguments donne le résultat. □

Soit h_{bif} la hauteur induite par $\{\| \cdot \|_p\}_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}}$. Alors on a
$$h_{\mathrm{bif}}(c, a) = \frac{1}{[\mathbb{Q}(c, a) : \mathbb{Q}]} \sum_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(c,a)/\mathbb{Q})} G_p(\sigma(c, a)) \ , \quad (c, a) \in \bar{\mathbb{Q}}^2 \ .$$
Comme $P^{n_0}_{c,a}(c_0) - P^{m_0}_{c,a}(c_0), P^{n_1}_{c,a}(c_1) = P^{m_1}_{c,a}(c_1) \in \mathbb{Q}[c, a]$, les ensembles
$$\mathrm{Per}_i(n_i, m_i) := \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ P^{n_i}_{c,a}(c_i) = P^{m_i}_{c,a}(c_i)\}$$
sont définis sur $\mathbb{Q}$ et donc l'ensemble des paramètres postcritiquement finis de la famille $\{P_{c,a}\}_{(c,a) \in \mathbb{C}^2}$ est contenu dans $\bar{\mathbb{Q}}^2$.

Théorème 4.4 (Favre-Gauthier). — *L'ensemble $\{(c, a) \in \bar{\mathbb{Q}}^2 \ ; \ h_{\mathrm{bif}}(c, a) = 0\}$ coïncide avec l'ensemble des paramètres tels que $P_{c,a}$ est postcritiquemement fini.*

Démonstration. — La preuve est essentiellement la même que pour la hauteur $h_{\mathbb{M}}$ associée à l'ensemble de Mandelbrot adélique. Soit $h_{c,a}$ la hauteur canonique de $P_{c,a}$. Alors, comme dans le cas des polynômes de degré 2, on a (lorsque $(c, a) \in \mathbb{Q}^2$, sinon c'est un peu plus compliqué à écrire mais l'idée est la même)
$$h_{c,a}(z) = \frac{1}{[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]} \sum_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})} g_{c,a,p}(\sigma(z)) \ ,$$
et $h_{c,a}(z) = 0$ si et seulement si z est prépériodique sous itération de $P_{c,a}$. De plus, puisque $G_p(c, a) = \max\{g_{c,a,p}(c_0), g_{c,a,p}(c_1)\}$, on a
$$\frac{1}{2} \left(g_{c,a,p}(c_0) + g_{c,a,p}(c_1) \right) \leq G_p(c, a) \leq g_{c,a,p}(c_0) + g_{c,a,p}(c_1) \ ,$$
d'où $\frac{1}{2} \left(h_{c,a}(c_0) + h_{c,a}(c_1) \right) \leq h_{\mathrm{bif}}(c, a) \leq h_{c,a}(c_0) + h_{c,a}(c_1)$. En particulier, $h_{\mathrm{bif}}(c, a) = 0$ si et seulement si $h_{c,a}(c_0) = h_{c,a}(c_1) = 0$, ce qui équivaut au fait que c_0 et c_1 sont (pré)périodique sous itération de $P_{c,a}$. □

4.3. Distribution des paramètres postcritiquement finis

On peut maintenant montrer le résultat principal de ce mini-cours.

Théorème 4.5 (Favre-Gauthier). — *Soient $\{n_{k,i}, m_{k,i}\}_{k\geq 1}$ des suites de couples d'entiers, pour $i = 0, 1$. Supposons que l'une des deux hypothèse suivantes est satisfaite:*

1. *soit $n_{k,0} \neq n_{k,1}$ et $m_{k,0} = m_{k,1} = 0$ pour tout $k \geq 1$,*
2. *soit $n_{k,i} > m_{k,i} > 0$ pour tout $k \geq 1$ et $n_{k,i} - m_{k,i} \to \infty$, pour $i = 0, 1$.*

Pour $k \geq 1$, on pose $X_k := \mathrm{Per}_0(n_{k,0}, m_{k,0}) \cap \mathrm{Per}_1(n_{k,1}, m_{k,1})$ et on appelle μ_k la mesure

$$\mu_k = \frac{1}{\#X_k} \sum_{(c,a)\in X_k} \delta_{(c,a)}$$

équidistribuée sur X_k. Alors μ_k converge vers μ_{bif} au sens faible des mesures de $\mathbb{C}^2$.

Nous allons maintenant nous concentrer sur la démonstration de ce résultat. Commençons par remarquer que, d'après le Théoème 4.3, la collection $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}}$ est une métrique adélique. D'après le Théorème 4.4, la suite X_k est petite pour la hauteur associée h_{bif}. Finalement, le corollaire 3.3 du Théorème d'équidistribution arithmétique de Yuan nous dit qu'il suffit de montrer que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\#(C \cap X_k)}{\#X_k} = 0 \ , \tag{3}$$

pour toute courbe algébrique C de $\mathbb{C}^2$. Dans les deux cas de l'énoncé du Théorème, on se repose sur le Théorème suivant pour le montrer. Il s'agit d'une adaptation d'un Théorème de Buff et Epstein [**BE**].

Théorème 4.6 (Favre-Gauthier). — *Soit $(c, a) \in X_k$. Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite*

1. *soit $m_{k,0} = m_{k,1} \equiv 0$ et $n_{k,0} \neq n_{k,1}$ et 0 est périodique de période exacte $n_{k,0}$ et c est périodique de période exacte $n_{k,1}$,*
2. *soit $n_{k,j} > m_{k,j} > 0$ pour tout j et $P^m_{c,a}(c_j)$ est périodique si et seulement si $m \geq m_{k,j}$ et sa période exacte est $n_{k,j} - m_{k,j}$.*

Alors les courbes $\mathrm{Per}_0(n_{k,0}, m_{k,0})$ et $\mathrm{Per}_1(n_{k,1}, m_{k,1})$ sont lisses en (c, a) et s'intersectent transversallement en (c, a).

La preuve repose sur des arguments de contraction de l'application $(P_{c,a})_*$ agissant sur les différentielles quadratiques méromorphes sur $\mathbb{P}^1$ à pôles au plus simples localisés le long de l'ensemble fini $\{P^k_{c,a}(c_i)\,;\ k \geq 0,\ i = 0, 1\}$.

Pour finir, nous allons voir comment arriver à (3) à l'aide de ce Théorème de transversalité. Comme dans le cas de la famille $(f_c)_{c\in\mathbb{C}}$ traitée lors de l'exposé précédent, l'argument argument n'est pas le même pour les cas 1 et 2.

Le cas $m_{k,0} = m_{k,1} \equiv 0$. — Commençons par remarquer que $\mathrm{Per}_0(n_{k,0}, m_{k,0})$ et $\mathrm{Per}_1(n_{k,1}, m_{k,1})$ ne s'intersectent pas le long du diviseur à l'infini. Remarquons ensuite que l'on peut décomposer $X_k = X'_k \cup X''_k$, où

$$X''_k = \bigcup_{\substack{p_0|n_{k,0},\ p_0\neq n_{k,0} \\ p_1|n_{k,1},\ p_1\neq n_{k,1}}} \mathrm{Per}_0(p_0, 0) \cap \mathrm{Per}_1(p_1, 0) \ ,$$

et $X'_k = X_k \setminus X''_k$. D'après la formule d'inversion de Möbius,

$$\deg(X''_k) = o\left(\deg(\mathrm{Per}_0(n_{k,0},0)) \cdot \deg(\mathrm{Per}_1(n_{k,1},0))\right) = o(3^{n_{k,0}+n_{k,1}}) \ .$$

Ainsi, $\deg(X'_k) \sim 3^{n_{k,0}+n_{k,1}}$. Par ailleurs, l'ensemble des points de X'_k est exactement l'ensemble des points vérifiant les conditions du Théorème 4.6.

D'après le Théorème 4.6 et d'après Bezout, le nombre de points de X_k vaut donc

$$\#X_k \sim \deg(\mathrm{Per}_0(n_{k,0},0)) \cdot \deg(\mathrm{Per}_1(n_{k,1},0)) = 3^{n_{k,0}+n_{k,1}} \ .$$

Soit C une courbe algébrique de $\mathbb{C}^2$. Il nous suffit de montrer que $\#(C \cap X_k) = o(3^{n_{k,0}+n_{k,1}})$ pour conclure. Bezout et le Théorème 4.6 donnent encore

$$\#(C \cap X_k) \leq \#X''_k + \#(C \cap X'_k) \leq \#X''_k + \deg(C) \cdot (3^{n_{k,0}} + 3^{n_{k,1}}) = o(3^{n_{k,0}+n_{k,1}}) \ .$$

Le cas $n_{k,j} > m_{k,j} > 0$ et $n_{k,j} - m_{k,j} \to \infty$ pour tout j. — On va encore découper X_k sous la forme $X_k = X'_k \cup X''_k$, où X'_k est l'ensemble des paramètres pour lesquels l'instersection est lisse et transverse. Soit C une courbe algébrique de $\mathbb{C}^2$. On a comme ci-dessus par Bezout que $\#(C \cap X'_k) = o(3^{n_{k,0}+n_{k,1}})$.

L'hypothèse $n_{k,j} - m_{k,j} \to \infty$ permet, comme dans le cas de la famille $(f_c)_{c\in\mathbb{C}}$ avec des arguments combinatoires, de montrer que $\#X''_k = o(3^{n_{k,0}+n_{k,1}})$.

Finalement, on peut montrer grâce aux mêmes arguments combinatoires, qu'il existe $C > 0$ indépendante de $n_{k,j}$ et $m_{k,j}$ l'ensemble des $(c,a) \in X'_k$ qui vérifient les hypothèses imposées dans le Théorème 4.6 sont au moins au nombre de $C \cdot 3^{n_{k,0}+n_{k,1}}$, ce qui conclut la preuve.

Références

[BaH] M. Baker and L. H. H'sia. Canonical heights, transfinite diameters, and polynomial dynamics. *J. Reine Angew. Math*, (585):61–92, 2005.

[BaR] Matthew Baker and Robert Rumely. *Potential theory and dynamics on the Berkovich projective line*, volume 159 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[Bi] Yuri Bilu. Limit distribution of small points on algebraic tori. *Duke Math. J.*, 89(3):465–476, 1997.

[BrHu] Bodil Branner and John H. Hubbard. The iteration of cubic polynomials. I. The global topology of parameter space. *Acta Math.*, 160(3-4):143–206, 1988.

[BE] Xavier Buff and Adam L. Epstein. Bifurcation measure and postcritically finite rational maps. In *Complex dynamics : families and friends / edited by Dierk Schleicher*, pages 491–512. A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachussets, 2009.

[CL1] Antoine Chambert-Loir. Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich. *J. Reine Angew. Math.*, 595:215–235, 2006.

[CL2] Antoine Chambert-Loir. Théorèmes d'équidistribution pour les systèmes dynamiques d'origine arithmétique. In *Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux*, volume 30 of *Panor. Synthèses*, pages 203–294. Soc. Math. France, Paris, 2010.

[DHu1] A. Douady and J. H. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie I*, volume 84 of *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1984.

[DHu2] A. Douady and J. H. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie II*, volume 85 of *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985. With the collaboration of P. Lavaurs, Tan Lei and P. Sentenac.

[DuF] Romain Dujardin and Charles Favre. Distribution of rational maps with a preperiodic critical point. *Amer. J. Math.*, 130(4):979–1032, 2008.

[FG] Charles Favre and Thomas Gauthier. Distribution of postcritically finite polynomials, 2013. accepted for publication in *Israël J. Math.*

[FRL] C. Favre and J. Rivera-Letelier. Equidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective. *Math. Ann.*, 335(2):311–361, 2006.

[Le] G. M. Levin. On the theory of iterations of polynomial families in the complex plane. *Teor. Funktsiĭ Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, (51):94–106, 1989.

[Ly] M. Yu. Lyubich. Some typical properties of the dynamics of rational mappings. *Uspekhi Mat. Nauk*, 38(5(233)):197–198, 1983.

[Ra] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*, volume 28 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[R] Robert Rumely. On Bilu's equidistribution theorem. In *Spectral problems in geometry and arithmetic (Iowa City, IA, 1997)*, volume 237 of *Contemp. Math.*, pages 159–166. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Y] Xinyi Yuan. Big line bundles over arithmetic varieties. *Invent. Math.*, 173(3):603–649, 2008.

Thomas Gauthier, LAMFA, UPJV, 33 rue Saint Leu, 80039 Amiens Cedex
E-mail : thomas.gauthier@u-picardie.fr