Dynamique holomorphe à une variable

Journée de la Fédération ARC
Reims

Thomas Gauthier
LAMFA Université de Picardie Jules Verne

30 juin 2014

Plan de l'esposé :

1. Dynamique locale
   - étude des points périodiques,
2. Dynamique globale
   - ensembles de Julia et Fatou, propriétés importantes,
3. Espace des paramètres de $z^2 + c$
   - Lieu et mesure de bifurcation,
4. Espace des paramètres de $\frac{1}{3}z^3 - \frac{c}{2}z^2 + a^3$
   - Différences avec le cas précédent.

Dynamique locale

Soient $0 \in U, V \subset \mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow V$ holomorphe avec $f(0) = 0$.
Soit $\lambda := f'(0)$. On dit que f a un point fixe

- **attractif** si $0 < |\lambda| < 1$,
- **super-attractif** si $\lambda = 0$,
- **neutre** si $|\lambda| = 1$ et
  - **parabolique** s'il existe $q \geq 1$ tel que $\lambda^q = 1$,
  - **neutre irrationnel** sinon,
- **répulsif** si $|\lambda| > 1$.

On cherche à étudier la suite $(f^n(z))_{n \geq 0}$ (lorsqu'elle existe) pour z voisin de 0 dans chacun des cas ci-dessus.

Problème : Peut-on *simplifier* f pour étudier cette question ?

Le cas $|\lambda| \neq 0$ ou 1

Théorème (Koenigs, 1884)

Si $f(z) = \lambda z + O(z^2)$, $|\lambda| \neq 0, 1$, il existe $\varphi : U' \Subset U \longrightarrow \mathbb{D}(0, r)$ un homéomorphisme holomorphe tel que $\varphi'(0) = 1$ et

$$\varphi \circ f(z) = \lambda \varphi(z) \ , \ z \in U'.$$

Idée de preuve si $|\lambda| < 1$. Grâce à la formule intégrale de Cauchy, on montre que la suite

$$\varphi_n(z) := \lambda^{-n} f^n(z) = \lambda^{-n} f \circ \cdots \circ f(z)$$

est une suite uniformément de Cauchy sur un vois. de 0. La complétude de $\mathcal{H}(U, V)$ pour la norme sup permet de conclure, puisque $\lambda \varphi_{n+1}(z) = \varphi_n \circ f(z)$. $\square$

Le cas $\lambda = 0$

Théorème (Böttcher, 1904)

Si $f(z) = \alpha z^k + O(z^{k+1})$, $k \geq 2$, *il existe* $\varphi : U' \Subset U \longrightarrow \mathbb{D}(0, r)$ *un homéomorphisme holomorphe tel que* $\varphi'(0) = 1$ *et*

$$\varphi \circ f(z) = (\varphi(z))^k \ , \ z \in U'.$$

Idée de la preuve. On montre que

$$\psi_n(z) := \sqrt[k^n]{f^n(z)} = (f \circ \cdots \circ f(z))^{1/k^n}$$

est bien définie et holomorphe et est uniformément de Cauchy (Il y a en plus un argument de revêtement ramifié holomorphe pour construire une racine n-ième holomorphe). $\square$

Le cas $\lambda^q = 1$

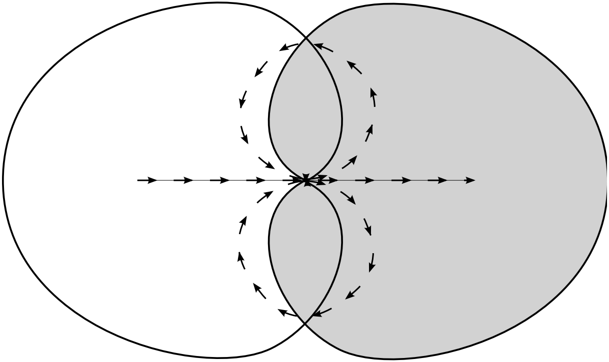

FIGURE: Le cas $\lambda = 1$

Le cas $\lambda = e^{2i\pi\theta}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

C'est plus compliqué...

- Il existe des cas où f est conjuguée à $e^{2i\pi\theta}z$ sur un disque topologique $\Delta \ni 0$. On dit que f admet un *disque de Siegel*.
- Il existe des cas où f n'est conjuguée à la rotation sur aucun voisinage de 0. On dit que f a un *point de Cremer*.

On n'a actuellement pas de condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un disque de Siegel.

Ensembles de Julia et de Fatou

Soient $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré $d \geq 2$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On définit une suite par récurrence en posant pour $n \geq 0$:

$$z_{n+1} := P(z_n),$$

c'est-à-dire $z_n = P^n(z_0) = P \circ \cdots \circ P(z_0)$.

On définit l'**ensemble de Julia rempli** $\mathcal{K}_P$ de P en posant :

$$\mathcal{K}_P := \{z_0 \in \mathbb{C} \ / \ (z_n)_{n \geq 0} \text{ est une suite bornée de } \mathbb{C}\}.$$

L'**ensemble de Julia de** $\mathcal{J}_P$ de P est $\mathcal{J}_P = \partial \mathcal{K}_P$. L'**ensemble de Fatou** $\mathcal{F}_P$ de P est $\mathcal{F}_P := \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{J}_P$.

$z_0 \in \mathcal{F}_P$ ssi $(P^n)_{n \geq 1}$ est équicontinue au vois de z_0 ssi $z_0 \in \mathcal{B}_P(\infty) = \{z_0 : P^n(z_0) \to \infty\}$ ou $z_0 \in \text{int}(\mathcal{K}_P)$.

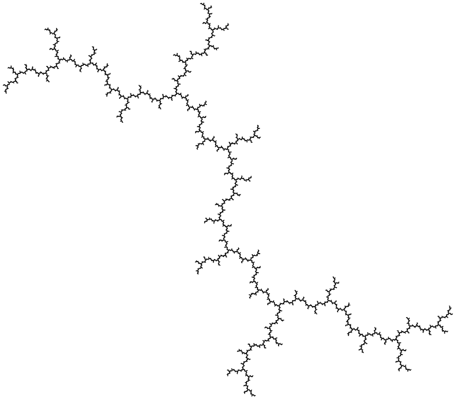

FIGURE: L'ensemble de Julia de $z^2 + i$

Théorème (Fatou, 1917)

1. *Les points périodique attractifs et de Siegel de P sont dans $\mathcal{F}_P$ et les autres sont dans $\mathcal{J}_P$,*
2. $\mathcal{J}_P = \overline{\{\textit{pt périodiques répulsifs de } P\}} = \partial \mathcal{B}_P(\infty)$ *est un compact parfait non-vide de $\mathbb{C}$,*
3. *Si $U \subset \mathcal{F}_P$ est périodique ($P^n(U) = U$, pour un $n \geq 1$), alors U est soit un bassin d'attraction, soit un disque de Siegel, soit un bassin parabolique.*

Outils principaux de la démonstration : Théorème de Montel (i.e. $\{u : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \text{ holomorphe}\}$ est équicontinue), classification des isométries du disque hyperbolique.

Théorème (Shishikura, '80)

Un polynôme de degré d a au plus $d-1$ cycles non-répulsifs.

Théorème (Sullivan, '80)

Si $U \subset \mathcal{F}_P$, il existe $k \geq 0$ et $n > k$ tels que $P^n(U) = P^k(U)$.

Outil principal : Homéomorphismes quasi-conformes, i.e.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{C}) ,$$

avec $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$, $\|\mu\|_\infty < 1$. □

Théorème (Buff-Chéritat, 2007)

Il existe $\mathcal{A} \subset [0,1]$ gras au sens de Baire tel que pour tout $\theta \in \mathcal{A}$, on a $\text{Aire}(\mathcal{J}_{e^{2i\pi\theta}(z+z^2)}) > 0$.

Espace des paramètres : $z^2 + c$

On pose $P_c(z) := z^2 + c$ pour $c \in \mathbb{C}$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré 2, il existe un unique $c \in \mathbb{C}$ et $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ tel que

$$\varphi^{-1} \circ P \circ \varphi = P_c.$$

En particulier, $\varphi^{-1} \circ P^n \circ \varphi = P_c^n$ et $\mathcal{J}_P = \varphi(\mathcal{J}_{P_c})$.

L'**ensemble de Mandelbrot** est l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &:= \{c \in \mathbb{C} : P_c^n(0) \text{ est bornée}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} : \mathcal{J}_c \text{ connexe}\}\ . \end{aligned}$$

Théorème (Douday-Hubbard, 83)

$\mathcal{M}_2$ est un sous-ensemble compact connexe plein de $\mathbb{C}$.

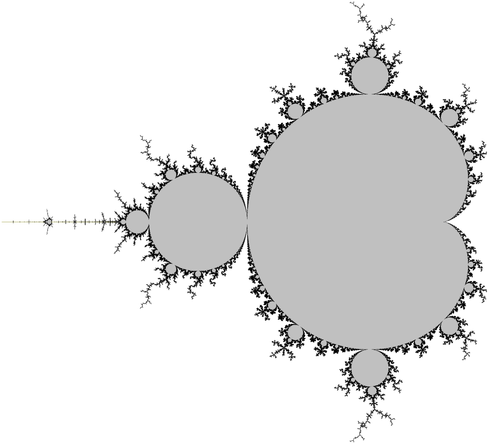

FIGURE: L'ensemble de Mandelbrot

Montrer FractalStream !

Bifurcations

Un paramètre $c_0 \in \mathbb{C}$ est **stable** si la suite $\{c \mapsto P_c^n(0)\}_{n\geq 0}$ est équicontinue au vois de c_0. Sinon, on dit que c_0 est un paramètre de **bifurcation**.
On appelle **lieu de bifurcation** l'ensemble des paramètres de bifurcation et **lieu de stabilité** son complémentaire.

Théorème (Mañé-Sad-Sullivan, 83)

1. *c_0 est stable si et seulement si $c \mapsto \mathcal{J}_c$ est $\mathcal{C}^0$ au voisinage de c_0 pour la topologie Hausdorff des compact de $\mathbb{C}$,*
2. *le lieu de bifurcation coïncide avec $\partial\mathcal{M}_2$,*

Théorème (Shishikura, 91)

$\partial\mathcal{M}_2$ est homogène et $\dim_H(\partial\mathcal{M}_2) = 2$.

Le point de vue mesurable

La fonction de **Green** de P_c est

$$g_c(z) := \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \log^+ |P_c^n(z)| \ .$$

La fonction g_c vérifie $g_c \circ P_c = 2g_c$. On pose

$$g_{\mathcal{M}_2}(c) := g_c(c) = 2g_c(0), \ c \in \mathbb{C} \ .$$

La fonction $g_{\mathcal{M}_2}$ est sous-harmonique continue et

$$\mathcal{M}_2 = \{c \in \mathbb{C} : g_{\mathcal{M}_2}(c) = 0\}.$$

Théorème

La mesure de probabilité $\mu_{\mathrm{bif}} := \Delta g_{\mathcal{M}_2}$ est la mesure harmonique de $\mathcal{M}_2$. On l'appelle ***mesure de bifurcation****.*

Théorème (Levin, 91 / Favre-Rivera-Letelier, 2004)

La suite de mesures atomiques

$$\mu_n := \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{P_c^n(0)=0} \delta_c$$

converge au sens des mesures de Radon vers μ_{bif}. De plus,

$$\left| \int_{\mathbb{C}} \varphi \cdot d\mu_n - \int_{\mathbb{C}} \varphi \cdot d\mu_{\mathrm{bif}} \right| \leq C \left(\frac{n}{2^n} \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{C})} ,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C})$ à support compact.

Idées importantes : Levin : lemme de Hartogs sur les fonctions sous-harmoniques.
F-RL : méthode “globale” venant de la dynamique arithmétique.

Les polynômes cubiques

On pose $P_{c,a}(z) := \frac{1}{3}z^3 - \frac{c}{2}z^2 + a^3$, $(c,a) \in \mathbb{C}^2$. Tout polynôme de degré 3 est conjugué à au plus 6 différents polynômes $P_{c,a}$.
Soit

$$g_{c,a}(z) := \lim_{n\to\infty} 3^{-n} \log^+ |P^n_{c,a}(z)| \ .$$

$\mathcal{C}(P_{c,a}) = \{0, c\}$ et on pose

$$\mathcal{B}_1 := \{(c,a) \in \mathbb{C}^2 : g_{c,a}(0) = 0\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{(c,a) \in \mathbb{C}^2 : g_{c,a}(c) = 0\}.$$

On définit $\mathcal{M}_3$, le lieu de connexité de la famille $P_{c,a}$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 &:= \{(c,a) \in \mathbb{C}^2 : \mathcal{J}_{c,a} \text{ est connexe}\} \\ &= \{(c,a) \in \mathbb{C}^2 : \max\{g_{c,a}(0), g_{c,a}(c)\} = 0\} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \ . \end{aligned}$$

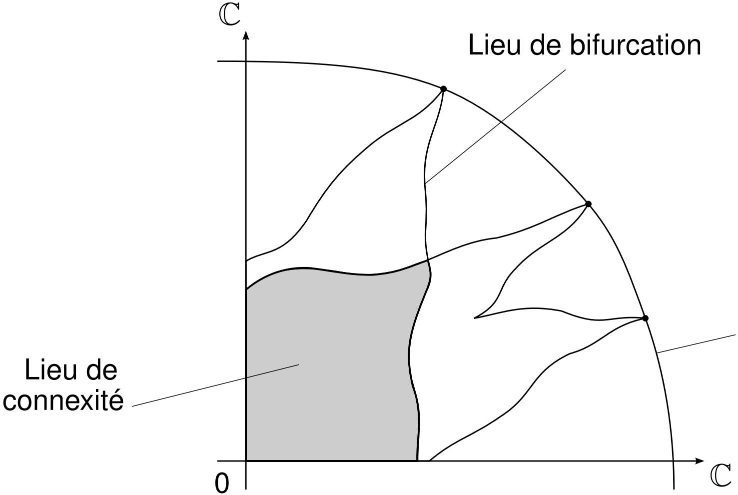

FIGURE: Comportement du lieu de bifurcation à l'infini de l'espace des polynômes cubiques

Bifurcations

Le **lieu de stabilité** est cette fois-ci le lieu où les deux familles

$$\{(c,a) \mapsto P^n_{c,a}(0)\}_{n\geq 1} \text{ et } \{(c,a) \mapsto P^n_{c,a}(c)\}_{n\geq 1}$$

sont équicontinues en même temps. Le **lieu de bifurcation** Bif_1 est son complémentaire, i.e.

$$\mathrm{Bif}_1 = \partial\mathcal{B}_1 \cup \partial\mathcal{B}_2.$$

Questions :

- Étant donné l'existence de **2** points critiques, que se passe-t-il si les deux sont instables en même temps ?
- Cela correspond-il à de "plus fortes" bifurcations ?

Le point de vue mesurable

Les fonctions $(c,a) \mapsto g_{c,a}(0)$ et $(c,a) \mapsto g_{c,a}(c)$ sont *plurisousharmoniques* $\mathcal{C}^0$. On peut donc définir deux $(1,1)$-courants positifs fermés en posant

$$T_1 := dd^c g_{c,a}(0), \text{ et } T_2 := dd^c g_{c,a}(c) .$$

Théorème (DeMarco, 2000 / Dujardin-Favre, 2007)

$\mathrm{supp}(T_1) = \partial\mathcal{B}_1$ *et* $\mathrm{supp}(T_2) = \partial\mathcal{B}_2$. *En particulier,*

$$\mathrm{Bif}_1 = \mathrm{supp}(T_1 + T_2) .$$

- Comment reformuler les deux questions ci-dessus dans le contexte mesurable ?
- Peut-on obtenir des résultats de convergence du style de celui de Levin (dans $z^2 + c$) ?

On définit une **mesure de bifurcation** en posant

$$\mu_{\mathrm{bif}} := T_1 \wedge T_2 = \left(dd^c \max\{g_{c,a}(0), g_{c,a}(c)\}\right)^2.$$

Théorème (Dujardin-Favre, 2007)

μ_{bif} est une mesure de probabilité. Il s'agit de la mesure de Green pluricomplexe de $\mathcal{M}_3$. En particulier,

$$\mathrm{supp}(\mu_{\mathrm{bif}}) = \partial_{\mathrm{S}}\mathcal{M}_3 \subsetneq (\partial\mathcal{B}_1 \cap \partial\mathcal{B}_1) \subsetneq \partial\mathcal{M}_3.$$

On appelle **lieu de bifurcations supérieures** l'ensemble

$$\mathrm{Bif}_2 := \mathrm{supp}(\mu_{\mathrm{bif}}) \ .$$

Théorème (G., 2012)

Le lieu Bif_2 *est homogène et* $\dim_H(\mathrm{Bif}_2) = 4$*.*

Soient $\begin{cases} \mathrm{Per}_1(n) := \{(c,a) \in \mathbb{C}^2 : P^n_{c,a}(0) = 0\}, \\ \mathrm{Per}_2(n) := \{(c,a) \in \mathbb{C}^2 : P^n_{c,a}(c) = c\}. \end{cases}$

Théorème (Dujardin-Favre, 2007)

Au sens des courants $3^{-n}[\mathrm{Per}_i(n)] \longrightarrow_{n\to\infty} T_i$, $i = 1, 2$.

Idée : Généraliser l'approche "analyse complexe" de Levin.

Théorème (Favre-G., 2013)

Soient $n_1(n), n_2(n) \to_{n\to\infty} \infty$ *avec* $n_1(n) \neq n_2(n)$, *alors*

$$3^{-(n_1(n)+n_2(n))} \sum_{\mathrm{Per}_1(n_1(n))\cap \mathrm{Per}_2(n_2(n))} \delta_{c,a} \longrightarrow_{n\to\infty} \mu_{\mathrm{bif}} .$$

Idée : Généraliser l'approche "globale" arithmétique.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !