

Dynamique holomorphe à une variable

Journée mathématique du LAMFA

Thomas Gauthier

05 mai 2013

Plan de l'esposé :

1. Dynamique locale

- ▶ étude des points périodiques,

2. Dynamique globale

- ▶ ensembles de Julia et Fatou, propriétés importantes,

3. Espace des paramètres de $z^2 + c$

- ▶ Lieu et mesure de bifurcation,

4. Espace des paramètres de $\frac{1}{3}z^3 - \frac{c}{2}z^2 + a^3$

- ▶ Différences avec le cas précédent.

Dynamique locale

Soient $0 \in U$, $V \subset \mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow V$ holomorphe avec $f(0) = 0$.
Soit $\lambda := f'(0)$. On dit que f a un point fixe

- ▶ **attractif** si $0 < |\lambda| < 1$,
- ▶ **super-attractif** si $\lambda = 0$,
- ▶ **neutre** si $|\lambda| = 1$ et
 - ▶ **parabolique** s'il existe $q \geq 1$ tel que $\lambda^q = 1$,
 - ▶ **neutre irrationnel** sinon,
- ▶ **répulsif** si $|\lambda| > 1$.

On cherche à étudier la suite $(f^n(z))_{n \geq 0}$ (lorsqu'elle existe) pour z voisin de 0 dans chacun des cas ci-dessus.

Problème : Peut-on *simplifier* f pour étudier cette question ?

Le cas $|\lambda| \neq 0$ ou 1

Théorème (Koenigs, 1884)

Si $f(z) = \lambda z + O(z^2)$, $|\lambda| \neq 0, 1$, il existe $\varphi : U' \Subset U \longrightarrow \mathbb{D}(0, r)$
un homéomorphisme holomorphe tel que $\varphi'(0) = 1$ et

$$\varphi \circ f(z) = \lambda \varphi(z), \quad z \in U'.$$

Idée de preuve si $|\lambda| < 1$. Grâce à la formule intégrale de Cauchy, on montre que la suite

$$\varphi_n(z) := \lambda^{-n} f^n(z) = \lambda^{-n} f \circ \dots \circ f(z)$$

est une suite uniformément de Cauchy sur un vois. de 0. La complétude de $\mathcal{H}(U, V)$ pour la norme sup permet de conclure, puisque $\lambda \varphi_{n+1}(z) = \varphi_n \circ f(z)$. \square

Le cas $\lambda = 0$

Théorème (Böttcher, 1904)

Si $f(z) = \alpha z^k + O(z^{k+1})$, $k \geq 2$, il existe $\varphi : U' \Subset U \rightarrow \mathbb{D}(0, r)$
un homéomorphisme holomorphe tel que $\varphi'(0) = 1$ et

$$\varphi \circ f(z) = (\varphi(z))^k, \quad z \in U'.$$

Idée de la preuve. On montre que

$$\psi_n(z) := \sqrt[k^n]{f^n(z)} = (f \circ \dots \circ f(z))^{1/k^n}$$

est bien définie et holomorphe et est uniformément de Cauchy
(Il y a en plus un argument de revêtement ramifié holomorphe
pour construire une racine n -ième holomorphe). □

Le cas $\lambda^q = 1$

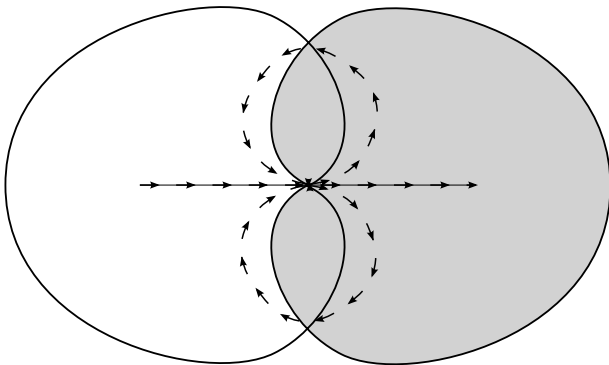


FIGURE: Le cas $\lambda = 1$

Le cas $\lambda = e^{2i\pi\theta}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

C'est plus compliqué...

- ▶ Il existe des cas où f est conjuguée à $e^{2i\pi\theta}z$ sur un disque topologique $\Delta \ni 0$. On dit que f admet un *disque de Siegel*.
- ▶ Il existe des cas où f n'est conjuguée à la rotation sur aucun voisinage de 0. On dit que f a un *point de Cremer*.

On n'a actuellement pas de condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un disque de Siegel.

Ensembles de Julia et de Fatou

Soient $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré $d \geq 2$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On définit une suite par récurrence en posant pour $n \geq 0$:

$$z_{n+1} := P(z_n),$$

c'est-à-dire $z_n = P^n(z_0) = P \circ \dots \circ P(z_0)$.

On définit l'**ensemble de Julia rempli** \mathcal{K}_P de P en posant :

$$\mathcal{K}_P := \{z_0 \in \mathbb{C} \mid (z_n)_{n \geq 0} \text{ est une suite bornée de } \mathbb{C}\}.$$

L'**ensemble de Julia** de P est $\mathcal{J}_P = \partial \mathcal{K}_P$. L'**ensemble de Fatou** \mathcal{F}_P de P est $\mathcal{F}_P := \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{J}_P$.

$z_0 \in \mathcal{F}_P$ ssi $(P^n)_{n \geq 1}$ est équicontinue au vois de z_0 ssi
 $z_0 \in \mathcal{B}_P(\infty) = \{z_0 : P^n(z_0) \rightarrow \infty\}$ ou $z_0 \in \text{int}(\mathcal{K}_P)$.

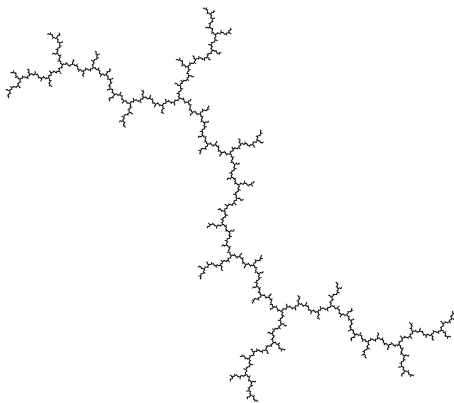


FIGURE: L'ensemble de Julia de $z^2 + i$

Théorème (Fatou, 1917)

1. Les points périodique attractifs et de Siegel de P sont dans \mathcal{F}_P et les autres sont dans \mathcal{J}_P ,
2. $\mathcal{J}_P = \overline{\{\text{pt périodiques répulsifs de } P\}} = \partial\mathcal{B}_P(\infty)$ est un compact parfait non-vide de \mathbb{C} ,
3. Si $U \subset \mathcal{F}_P$ est périodique ($P^n(U) = U$, pour un $n \geq 1$), alors U est soit un bassin d'attraction, soit un disque de Siegel, soit un bassin parabolique.

Outils principaux de la démonstration : Théorème de Montel (i.e. $\{u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ holomorphe} est équicontinue), classification des isométries du disque hyperbolique.

Théorème (Shishikura, '80)

Un polynôme de degré d a au plus $d - 1$ cycles non-répulsifs.

Théorème (Sullivan, '80)

Si $U \subset \mathcal{F}_P$, il existe $k \geq 0$ et $n > k$ tels que $P^n(U) = P^k(U)$.

Outil principal : Homéomorphismes quasi-conformes, i.e.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{C}),$$

avec $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$, $\|\mu\|_\infty < 1$.

□

Théorème (Buff-Chéritat, 2007)

Il existe $\mathcal{A} \subset [0, 1]$ gras au sens de Baire tel que pour tout $\theta \in \mathcal{A}$, on a $\text{Aire}(\mathcal{J}_{e^{2i\pi\theta}}(z+z^2)) > 0$.

Espace des paramètres : $z^2 + c$

On pose $P_c(z) := z^2 + c$ pour $c \in \mathbb{C}$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré 2, il existe un unique $c \in \mathbb{C}$ et $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ tel que

$$\varphi^{-1} \circ P \circ \varphi = P_c.$$

En particulier, $\varphi^{-1} \circ P^n \circ \varphi = P_c^n$ et $J_P = \varphi(J_{P_c})$.

L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &:= \{c \in \mathbb{C} : P_c^n(0) \text{ est bornée}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ connexe}\}. \end{aligned}$$

Théorème (Douday-Hubbard, 83)

\mathcal{M}_2 est un sous-ensemble compact connexe plein de \mathbb{C} .

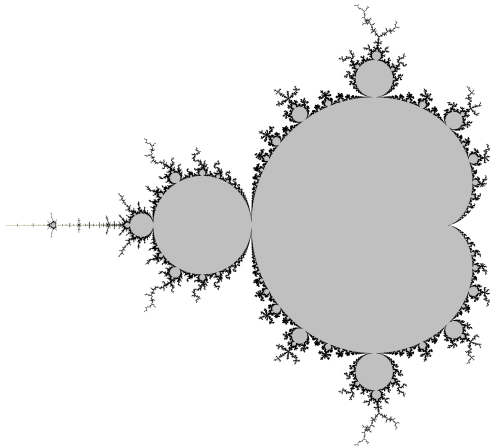


FIGURE: L'ensemble de Mandelbrot

Montrer FractalStream !

Bifurcations

Un paramètre $c_0 \in \mathbb{C}$ est **stable** si la suite $\{c \mapsto P_c^n(0)\}_{n \geq 0}$ est équicontinue au vois de c_0 . Sinon, on dit que c_0 est un paramètre de **bifurcation**.

On appelle **lieu de bifurcation** l'ensemble des paramètres de bifurcation et **lieu de stabilité** son complémentaire.

Théorème (Mañé-Sad-Sullivan, 83)

1. c_0 est stable si et seulement si $c \mapsto J_c$ est C^0 au voisinage de c_0 pour la topologie Hausdorff des compact de \mathbb{C} ,
2. le lieu de bifurcation coïncide avec $\partial \mathcal{M}_2$,

Théorème (Shishikura, 91)

$\partial \mathcal{M}_2$ est homogène et $\dim_H(\partial \mathcal{M}_2) = 2$.

Le point de vue mesurable

La fonction de **Green** de P_c est

$$g_c(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log^+ |P_c^n(z)|.$$

La fonction g_c vérifie $g_c \circ P_c = 2g_c$. On pose

$$g_{\mathcal{M}_2}(c) := g_c(c) = 2g_c(0), \quad c \in \mathbb{C}.$$

La fonction $g_{\mathcal{M}_2}$ est sous-harmonique continue et

$$\mathcal{M}_2 = \{c \in \mathbb{C} : g_{\mathcal{M}_2}(c) = 0\}.$$

Théorème

*La mesure de probabilité $\mu_{\text{bif}} := \Delta g_{\mathcal{M}_2}$ est la mesure harmonique de \mathcal{M}_2 . On l'appelle **mesure de bifurcation**.*

Théorème (Levin, 91 / Favre-Rivera-Letelier, 2004)

La suite de mesures atomiques

$$\mu_n := \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{P_c^n(0)=0} \delta_c$$

converge au sens des mesures de Radon vers μ_{bif} . De plus,

$$\left| \int_{\mathbb{C}} \varphi \cdot d\mu_n - \int_{\mathbb{C}} \varphi \cdot d\mu_{\text{bif}} \right| \leq C \left(\frac{n}{2^n} \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{C^1(\mathbb{C})},$$

pour toute fonction $\varphi \in C^1(\mathbb{C})$ à support compact.

Idées importantes : Levin : lemme de Hartogs sur les fonctions sous-harmoniques.

F-RL : méthode “globale” venant de la dynamique arithmétique.

Les polynômes cubiques

On pose $P_{c,a}(z) := \frac{1}{3}z^3 - \frac{c}{2}z^2 + a^3$, $(c, a) \in \mathbb{C}^2$. Tout polynôme de degré 3 est conjugué à au plus 6 différents polynômes $P_{c,a}$.
Soit

$$g_{c,a}(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n} \log^+ |P_{c,a}^n(z)|.$$

$\mathcal{C}(P_{c,a}) = \{0, c\}$ et on pose

$$\mathcal{B}_1 := \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 : g_{c,a}(0) = 0\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 : g_{c,a}(c) = 0\}.$$

On définit \mathcal{M}_3 , le lieu de connexité de la famille $P_{c,a}$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 &:= \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 : \mathcal{J}_{c,a} \text{ est connexe}\} \\ &= \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 : \max\{g_{c,a}(0), g_{c,a}(c)\} = 0\} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2. \end{aligned}$$

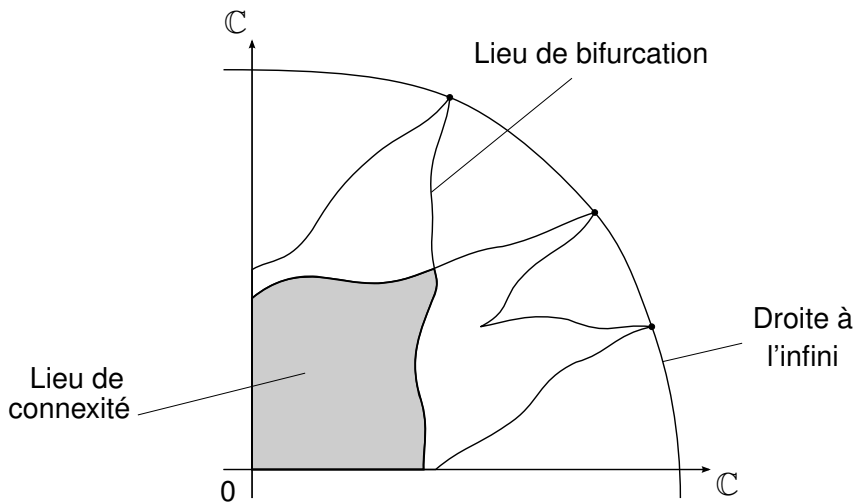


FIGURE: Comportement du lieu de bifurcation à l'infini de l'espace des polynômes cubiques

Bifurcations

Le **lieu de stabilité** est cette fois-ci le lieu où les deux familles

$$\{(c, a) \mapsto P_{c,a}^n(0)\}_{n \geq 1} \text{ et } \{(c, a) \mapsto P_{c,a}^n(c)\}_{n \geq 1}$$

sont équicontinues en même temps. Le **lieu de bifurcation** Bif_1 est son complémentaire, i.e.

$$\text{Bif}_1 = \partial \mathcal{B}_1 \cup \partial \mathcal{B}_2.$$

Questions :

- ▶ Étant donné l'existence de **2** points critiques, que se passe-t-il si les deux sont instables en même temps ?
- ▶ Cela correspond-il à de “plus fortes” bifurcations ?

Le point de vue mesurable

Les fonctions $(c, a) \mapsto g_{c,a}(0)$ et $(c, a) \mapsto g_{c,a}(c)$ sont *plurisousharmoniques* C^0 . On peut donc définir deux $(1, 1)$ -courants positifs fermés en posant

$$T_1 := dd^c g_{c,a}(0), \quad \text{et} \quad T_2 := dd^c g_{c,a}(c) .$$

Théorème (DeMarco, 2000 / Dujardin-Favre, 2007)

$\text{supp}(T_1) = \partial\mathcal{B}_1$ et $\text{supp}(T_2) = \partial\mathcal{B}_2$. En particulier,

$$\text{Bif}_1 = \text{supp}(T_1 + T_2) .$$

- ▶ Comment reformuler les deux questions ci-dessus dans le contexte mesurable ?
- ▶ Peut-on obtenir des résultats de convergence du style de celui de Levin (dans $z^2 + c$) ?

On définit une **mesure de bifurcation** en posant

$$\mu_{\text{bif}} := T_1 \wedge T_2 = (dd^c \max\{g_{c,a}(0), g_{c,a}(c)\})^2.$$

Théorème (Dujardin-Favre, 2007)

μ_{bif} est une mesure de probabilité. Il s'agit de la mesure de Green pluricomplexe de \mathcal{M}_3 . En particulier,

$$\text{supp}(\mu_{\text{bif}}) = \partial_S \mathcal{M}_3 \subsetneq (\partial \mathcal{B}_1 \cap \partial \mathcal{B}_1) \subsetneq \partial \mathcal{M}_3.$$

On appelle **lieu de bifurcations supérieures** l'ensemble

$$\text{Bif}_2 := \text{supp}(\mu_{\text{bif}}).$$

Théorème (G., 2012)

Le lieu Bif_2 est homogène et $\dim_H(\text{Bif}_2) = 4$.

Soient $\begin{cases} \text{Per}_1(n) := \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 : P_{c,a}^n(0) = 0\}, \\ \text{Per}_2(n) := \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 : P_{c,a}^n(c) = c\}. \end{cases}$

Théorème (Dujardin-Favre, 2007)

Au sens des courants $3^{-n}[\text{Per}_i(n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_i, i = 1, 2.$

Idée : Généraliser l'approche "analyse complexe" de Levin.

Théorème (Favre-G., 2013)

Soient $n_1(n), n_2(n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$ avec $n_1(n) \neq n_2(n)$, alors

$$3^{-(n_1(n)+n_2(n))} \sum_{\text{Per}_1(n_1(n)) \cap \text{Per}_2(n_2(n))} \delta_{c,a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_{\text{bif}}.$$

Idée : Généraliser l'approche "globale" arithmétique.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !