

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (ED 574)  
Centre de Mathématiques Laurent Schwartz (UMR 7640 CNRS)

Mémoire présenté pour l'obtention du

## Diplôme d'habilitation à diriger les recherches

Discipline : Mathématiques

*par*

**Thomas GAUTHIER**

### Plusieurs aspects des espaces de paramètres en dynamique holomorphe

Rapporteurs : SÉBASTIEN BOUCKSOM  
SERGE CANTAT  
LAURA DEMARCO

Date de soutenance : le 09 Décembre 2020

Composition du jury : SÉBASTIEN BOUCKSOM (Rapporteur)  
SERGE CANTAT (Rapporteur)  
SYLVAIN CROVISIER (Président)  
LAURA DEMARCO (Rapporteuse)  
MIKHAIL LYUBICH (Examinateur)  
EMMANUEL ULLMO (Examinateur)



# Préambule

Ce mémoire regroupe et synthétise l'essentiel de les travaux de recherche depuis la soutenance de ma thèse en novembre 2011, et ce en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches. Les travaux exposés sont en grande partie issus de collaborations et portent sur l'étude des espaces de paramètres en dynamique holomorphe, en grande partie à une variable complexe. Le fil conducteur de ces travaux est l'utilisation systématique d'outils venant de la théorie du pluripotentiel complexe : les courants positifs fermés. Ces techniques s'avèrent être porteuses pour l'étude de problèmes de nature a priori assez différente.

Avant de décrire plus en détails le contenu de ce texte, je voudrais motiver l'approche abordée dans ce qui suit. Soit  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  un endomorphisme holomorphe de degré  $d \geq 2$  de l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^k$  de dimension  $k$  : en coordonnées homogènes,  $f$  s'écrit

$$f(z_0 : \cdots : z_k) = [P_0 : \cdots : P_k]$$

où  $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_k]$  sont des polynômes homogènes de degré  $d$  tels que  $\bigcap_j \{P_j = 0\} = \{0\}$ . A un tel endomorphisme, on peut associer son *courant de Green*  $T_f$  : il s'agit d'un  $(1, 1)$ -courant positif fermé, que l'on peut définir comme la limite (au sens faible) des  $(1, 1)$ -formes positives fermées lisses  $d^{-n}(f^n)^*(\omega_{\mathbb{P}^k})$ , où  $\omega_{\mathbb{P}^k}$  est la forme de courbure de la métrique de Fubini-Study sur  $\mathbb{P}^k$  normalisée pour que la forme volume  $\omega_{\mathbb{P}^k}^{\wedge k}$  soit une mesure de probabilité. Le support de  $T_f$  coïncide avec le lieu où la dynamique est chaotique au sens où la suite des itérées  $(f^n)_n$  de  $f$  est une suite équicontinue de fonctions holomorphes exactement sur  $\mathbb{P}^k \setminus \text{supp}(T_f)$ .

Ce courant  $T_f$  et ses puissance extérieure successives  $T_f^{\wedge \ell}$ ,  $1 \leq \ell \leq k$ , qui sont bien définies au sens de Bedford et Taylor [BedTa76], donnent par ailleurs lieu à une filtration de l'espace projectif

$$\text{supp}(T_f^{\wedge k}) \subset \text{supp}(T_f^{\wedge(k-1)}) \subset \cdots \subset \text{supp}(T_f) \subset \mathbb{P}^k$$

par des ensembles fermés invariants où la dynamique est, au moins moralement, de plus en plus chaotique. A titre d'exemples, le support de la mesure  $\mu_f := T_f^{\wedge k}$  est le lieu où l'entropie du système dynamique  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  est toujours égale à  $k \log d$  et cette mesure équidistribue les points périodiques :

$$\frac{1}{d^{kn}} \sum_{f^n(z)=z} \delta_z \longrightarrow \mu_f \quad (\dagger)$$

au sens faibles des mesures de probabilités sur  $\mathbb{P}^k$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , d’après Lyubich [Lyu83] en dimension 1 et Briend et Duval en dimension supérieure [BrDuv99]. Une autre propriété remarquable de la mesure  $\mu_f$ , prouvée par Briend et Duval [BrDuv01], est qu’il s’agit de l’*unique* mesure d’entropie maximale  $k \log d$  de  $f$ .

Lorsque  $f$  est défini sur un corps de nombre  $\mathbb{K}$ , c’est-à-dire lorsque  $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{K}[z_0, \dots, z_k]$ , alors on peut utiliser des outils provenant de la géométrie arithmétique établis par Yuan [Yua08] (une fonction hauteur de Weil, et une métrique adélique semi-positive continue) pour prouver ce résultat de convergence. On peut même aller plus loin en montrant qu’un phénomène de convergence similaire a lieu à *toutes les places du corps*  $\mathbb{K}$  : si  $v \in M_{\mathbb{K}}$  est une place non-archimédienne de  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{C}_v$  est le corps des complexes  $v$ -adiques, la convergence ( $\dagger$ ) a également lieu sur l’espace analytifié de Berkovich  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_v}^{k, \text{an}}$  vers une mesure de probabilité  $\mu_{f,v}$  définie par Chambert-Loir [Ch-L06].

Une motivation importante pour tous les travaux qui suivent est d’établir, entre autres, des analogues paramétriques des propriétés exposées ci-dessus, dans le cadre de *familles* de systèmes dynamiques holomorphes. DeMarco [DeM01] a introduit un  $(1, 1)$ -courant positif fermé  $T_{\text{bif}}$  sur l’espace des paramètres d’une famille  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  de fractions rationnelles de  $\mathbb{P}^1$  qui est porté par le lieu de bifurcation de la famille qui s’avère le bon candidat autour duquel axer notre analyse.



Détaillons maintenant le contenu de ce mémoire. Il se découpe en quatre chapitres :

- (1) Le premier chapitre porte sur les aspects topologiques et mesurables du courant de bifurcation d’une famille et de ses puissances extérieures  $T_{\text{bif}}^{\wedge \ell}$ . Je poursuis les travaux de ma thèse en donnant des estimées de Hausdorff optimales des supports des courants  $T_{\text{bif}}^{\wedge \ell}$  dans un cadre très général et en montrant que le support de la mesure de bifurcation  $\mu_{\text{bif}}$  de l’espace des modules  $\mathcal{M}_d$  des fractions rationnelles d’un degré  $d \geq 2$  donné est de volume strictement positif. Dans la suite du chapitre, on construit une théorie ergodique des espaces de paramètres. On y montre notamment que la mesure  $\mu_{\text{bif}}$  est une mesure d’entropie maximale et on y établit une borne inférieure presque sûre pour un “exposant de Lyapunov paramétrique” pour la mesure trace du courant de bifurcation.
- (2) Dans le deuxième chapitre, il est question de phénomènes d’équidistribution vers les courants  $T_{\text{bif}}^{\wedge \ell}$ . Nous établissons notamment des vitesses exponentielles de convergence de paramètres possédant des propriétés dynamiques spécifiques (par exemple avoir  $\ell$  cycles de multiplicateurs et périodes donnés) vers les courants de bifurcation. Une des difficultés importantes à surmonter pour obtenir des résultats de vitesse de convergence, ou qui concernent la distribution de courants d’intégration sur des sous-variétés de codimension au moins 2, est que les preuves des résultats pré-existants font appel à la convergence  $L_{\text{loc}}^1$  de potentiels de ces courants et que

la convergence d'une intersection de courants nécessite une propriété plus forte de convergence.

- (3) Le troisième chapitre est consacré à l'étude de phénomènes de rigidité paramétrique. Les phénomènes étudiés sont de deux natures différentes. Dans un premier temps, on expose une caractérisation des *paires dynamiques* dont la mesure de bifurcation (ou son support) sont lisses (ici une paire dynamique est la donnée d'une famille et d'un point marqué dont on étudie les bifurcations). Ensuite, on s'intéresse aux paires dynamiques *en toute dimension* dont le courant de bifurcation est nul et aux familles d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^2$  dans lesquelles aucune bifurcation ne se produit.
- (4) Le quatrième et dernier chapitre porte sur des résultats de nature arithmétique. On y donne une version quantifiée du théorème selon lequel la hauteur critique, qui détermine à quel point une fraction rationnelle définie sur  $\bar{\mathbb{Q}}$  est arithmétiquement éloignée d'une fraction rationnelle postcritiquement finie, est une fonction hauteur de Weil. On y donne ensuite les idées de la démonstration de la Conjecture d'André-Oort dynamique dans le cas des courbes de l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$  des polynômes d'un degré  $d$  donné, que j'ai prouvée avec Charles Favre.



# Liste des travaux présentés

1. *Higher bifurcation currents, neutral cycles and the Mandelbrot set*, Indiana Univ. Math. J. **63**, 917–937, 2014.
2. *Distribution of postcritically finite polynomials*, en collaboration avec CHARLES FAVRE, Israël J. Math. **209**, 235–292, 2015.
3. *Quadratic polynomials, multipliers and equidistribution*, en collaboration avec XAVIER BUFF, Proc. of the AMS, **143**(7), 3011–3017, 2015.
4. *Equidistribution towards the bifurcation current I : Multipliers and degree  $d$  polynomials*, Math. Annalen **366**(1), 1–30, 2016.
5. *Distribution of postcritically finite polynomials II : speed of convergence*, en collaboration avec GABRIEL VIGNY, J. Mod. Dyn. **11**, 57–98, 2017.
6. *Distribution of postcritically finite polynomials III : combinatorial continuity*, en collaboration avec GABRIEL VIGNY, Fundamenta Math **244**(1), 17–48, 2019.
7. *Distribution of points with prescribed derivative in polynomial dynamics*, en collaboration avec GABRIEL VIGNY, Riv. Mat. Univ. Parma New Series **8**(2), 247–270, 2017.
8. *Classification of special curves in the space of cubic polynomials*, en collaboration avec CHARLES FAVRE, IMRN **2018**(2), 362–411, 2018.
9. *Continuity of the Green function in meromorphic families of polynomials*, en collaboration avec CHARLES FAVRE, Algebra & Number Theory **12**(6), 1471–1487, 2018.
10. *Hyperbolic components of rational maps : Quantitative equidistribution and counting*, en collaboration avec YÛSUKÉ OKUYAMA et GABRIEL VIGNY, Commentarii Math. Helv. **94**(2), 347–398, 2019.
11. *Collet, Eckmann and the bifurcation measure*, en collaboration avec MATTHIEU ASTORG, NICOLAE MIHALACHE et GABRIEL VIGNY, Invent. Math. **217**(3), 749–797, 2019.
12. *The bifurcation measure has maximal entropy*, en collaboration avec HENRY DE THÉLIN et GABRIEL VIGNY, Israël J. Math. **235**(1), 213–243, 2020.
13. *Approximation of non-archimedean Lyapunov exponents and applications over global fields*, en collaboration avec YÛSUKÉ OKUYAMA et GABRIEL VIGNY, Trans. Amer. Math. Soc. **373**, 8963–9011, 2020.

14. *Dynamical pairs with an absolutely continuous bifurcation measure*, Prépublication (2018), arXiv : 1810.02385, 30 pages.
15. *The geometric dynamical Northcott and Bogomolov properties*, en collaboration avec GABRIEL VIGNY, Prépublication (2019), arXiv : 1912.07907, 35 pages.
16. *Parametric Lyapunov Exponents*, en collaboration avec HENRY DE THÉLIN et GABRIEL VIGNY, accepté pour publication au Bull. London Math. Soc., 13 pages.
17. *The arithmetic of polynomial dynamical pairs*, en collaboration avec CHARLES FAVRE, Prépubliation (2020), arXiv : 2004.13801, 246 pages.

# Table des matières

Préambule	i
Liste des travaux présentés	v
<b>1 Supports et aspects métriques des courants de bifurcation</b>	<b>1</b>
1.1 Les courants de bifurcation d'une famille de fractions rationnelles . . . . .	1
1.1.1 Stabilité et bifurcations en dynamique complexe à une variable . . .	1
1.1.2 Les courants de bifurcation . . . . .	3
1.2 Le support des courants de bifurcation . . . . .	5
1.2.1 Caractérisation dynamique des supports et dimension . . . . .	5
1.2.2 Le support de la mesure de bifurcation est de volume positif . . . .	8
1.3 Théorie ergodique des espaces de paramètres . . . . .	12
1.3.1 Quelques rappels de théorie ergodique . . . . .	12
1.3.2 L'entropie des bifurcations . . . . .	13
1.3.3 Exposants de Lyapunov paramétriques . . . . .	16
1.4 Perspectives . . . . .	19
<b>2 Phénomènes d'équidistribution paramétrique</b>	<b>21</b>
2.1 Dans l'espace des modules des polynômes . . . . .	21
2.1.1 Polynômes possédant un cycle de multiplicateur et période prescrits	22
2.1.2 Équidistribution arithmétique et espaces de paramètres . . . . .	26
2.1.3 Équidistribution quantitative de paramètres hyperboliques . . . . .	28
2.1.4 Continuité combinatoire et équidistribution . . . . .	31
2.1.5 Autres résultats de convergence . . . . .	34
2.2 Dans les familles de fractions rationnelles . . . . .	36
2.2.1 Approximation quantitative de l'exposant de Lyapunov . . . . .	36
2.2.2 Distribution des valeurs dans les espaces de paramètres . . . . .	39
2.3 Perspectives . . . . .	40
<b>3 Phénomènes de rigidité paramétrique</b>	<b>43</b>
3.1 Rigidité des lieux et mesures de bifurcation . . . . .	43
3.1.1 Rigidité de lieux de bifurcation en dimension 1 . . . . .	44
3.1.2 Paires dynamiques possédant une mesure de bifurcation lisse . . . .	46
3.1.3 Uplets dynamiques possédant une mesure de bifurcation lisse . . . .	47

3.2	Les propriétés géométriques de Northcott et Bogomolov dynamiques . . . . .	48
3.2.1	Paires dynamiques stables en toute dimension . . . . .	49
3.2.2	Les propriétés de Northcott et Bogomolov géométriques . . . . .	52
3.3	Perspectives . . . . .	56
3.3.1	Régularité des lieux et mesures de bifurcation . . . . .	56
3.3.2	Familles et paires dynamiques stables . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Étude arithmétique des espaces de paramètres</b>	<b>61</b>
4.1	Hauteurs sur les espaces de paramètres . . . . .	61
4.1.1	Corps globaux et fonctions hauteurs sur les espaces de modules . . .	61
4.1.2	La hauteur critique est une hauteur de Weil . . . . .	64
4.1.3	La hauteur associée à une paire dynamique polynomiale . . . . .	67
4.2	Intersections improbables pour les paires dynamiques polynomiales . . . . .	70
4.2.1	Symétries dynamiques d'un polynôme . . . . .	71
4.2.2	Paires dynamiques intriquées . . . . .	73
4.3	Courbes spéciales de polynômes . . . . .	76
4.3.1	Le cas cubique . . . . .	76
4.3.2	Le cas général : vers une classification combinatoire . . . . .	78
4.4	Perspectives . . . . .	81
	<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>

# Chapitre 1

---

## Supports et aspects métriques des courants de bifurcation

### 1.1 Les courants de bifurcation d'une famille de fractions rationnelles

Commençons ce chapitre par une rapide introduction à la théorie de Mañé-Sad-Sullivan et Lyubich des bifurcations en dynamique complexe, ainsi qu'aux propriétés des courants positifs fermés qui détectent ces bifurcations.

#### 1.1.1 Stabilité et bifurcations en dynamique complexe à une variable

Considérons une famille de fractions rationnelles de degré  $d \geq 2$  paramétrée par une variété complexe  $\Lambda$ , c'est-à-dire une application holomorphe

$$\hat{f} : (\lambda, z) \in \Lambda \times \mathbb{P}^1 \mapsto (\lambda, f_\lambda(z)) \in \Lambda \times \mathbb{P}^1$$

pour laquelle  $f_\lambda : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est une fraction rationnelle de degré  $d$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Une telle famille est dite *algébrique* si  $\Lambda$  est une variété quasi-projective et si  $\hat{f}$  est un morphisme. L'espace des paramètres se découpe naturellement en deux parties : le lieu de stabilité  $\text{Stab}$  de la famille, qui consiste en l'ouvert maximal de  $\Lambda$  sur lequel l'ensemble de Julia  $J(f_\lambda)$  varie continuellement avec le paramètre et son complémentaire  $\text{Bif} := \Lambda \setminus \text{Stab}$ , le lieu de *bifurcation*. Un résultat très important de Mañé, Sad et Sullivan [MaSadSul83] et indépendamment de Lyubich [Lyu84] donne un certain nombre de caractérisations dynamiques de cette dichotomie.

**Théorème 1.1 (Mañé-Sad-Sullivan, Lyubich)** *Soient  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré  $d \geq 2$  et  $\Omega \subset \Lambda$  un ouvert connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *les points périodiques de  $f_\lambda$  ne changent pas de nature (attractif, répulsif ou neutre) lorsque le paramètre varie dans  $\Omega$ ,*

2. l'ensemble de Julia  $J(f_\lambda)$  varie selon un mouvement holomorphe dans  $\Omega$ ,
3. L'application  $\lambda \mapsto J(f_\lambda)$  est continue sur  $\Omega$  pour la topologie de Hausdorff des compacts de  $\mathbb{P}^1$ ,
4. pour tous  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$ ,  $f_{\lambda_1}$  et  $f_{\lambda_2}$  sont conjugués sur leurs ensembles de Julia respectifs,
5. la suite de correspondances holomorphes  $\{\lambda \mapsto f_\lambda^n(\text{Crit}(f_\lambda))\}_n$  est une famille équi-continue sur  $\Omega$ .

De plus, l'ouvert maximal de  $\Lambda$  sur lequel l'une de ces propriétés est vérifiée localement est dense dans  $\Lambda$ .

Lorsque l'une des conditions équivalentes de ce théorème est satisfaite sur un ouvert  $\Omega$  de  $\Lambda$ , on dit que  $\hat{f}$  est *stable* sur  $\Omega$  et on appelle lieu de stabilité l'ouvert maximal où cela arrive. Ce résultat frappant permet d'envisager les phénomènes de bifurcation sous de nombreux angles différents. Il permet entre autres de relier le changement de nature des points périodiques à l'instabilité sous perturbation de la dynamique critique.

En complément, on peut rajouter qu'une application simple du théorème de Montel permet de prouver que le lieu de bifurcation coïncide avec l'adhérence des  $\lambda \in \Lambda$  paramètres pour lequel un point critique de  $f_\lambda$  est prépériodique à un cycle répulsif de  $f_\lambda$  de façon non-persistante. On pourra alors dire que Bif est l'adhérence des paramètres possédant un point critique Misiurewicz.

**Exemple 1.1** Un exemple emblématique est la famille des polynômes quadratiques donnée par  $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ , avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Cette famille est l'objet de très nombreux travaux dont ceux fondateurs de Douady et Hubbard [DouH84, DouH85]. Il n'est pas difficile de voir que le lieu de bifurcation de cette famille est la frontière de l'ensemble de Mandelbrot

$$M := \{\lambda \in \mathbb{C} : \sup_{n \geq 0} |f_\lambda^n(0)| \leq 2\}.$$

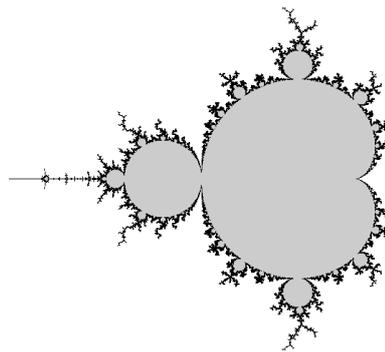


FIGURE 1.1 – L'ensemble de Mandelbrot.

D'après [DouH84, DouH85], l'ensemble  $M$  de Mandelbrot est un compact parfait connexe du plan complexe. Un résultat très célèbre concernant l'ensemble de Mandelbrot dû à Shishikura [Shi98] est le suivant.

**Théorème 1.2 (Shishikura)** *La frontière de  $M$  est homogène de dimension de Hausdorff 2, c'est-à-dire que pour tout ouvert  $U \subset \mathbb{C}$  intersectant  $\partial M$ , on a  $\dim_H(U \cap \partial M) = 2$ .*

Finalement, pour finir ce paragraphe, il est utile de mentionner le fait que l'ensemble de Mandelbrot est en fait un objet *universel* dans les espaces de paramètres : McMullen [McM00] a prouvé que dans toute famille 1-dimensionnelle il y avait des copies de l'ensemble de Mandelbrot.

**Théorème 1.3 (McMullen)** *Soit  $\hat{f}$  une famille de fractions rationnelles de degré  $d$  paramétrée par le disque unité  $\mathbb{D}$ . Supposons que  $\text{Bif} \neq \emptyset$  et qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{D}$  tel que  $f_\lambda$  est à points critiques simples. Alors  $\text{Bif}$  contient l'image par une application  $K$ -quasi-conforme de  $\partial M$ , où  $K$  peut être choisie arbitrairement proche de 1.*

Les deux cas qui nous intéresseront le plus dans ce qui suit sont le cas des *espaces de modules* des fractions rationnelles de degré  $d$  et des polynômes de degré  $d$  :

- L'espace  $\text{Rat}_d$  de toutes les fractions rationnelles d'un degré donné  $d$  est une variété quasi-projective dimension  $2d + 1$  (il s'agit même d'un ouvert de Zariski de  $\mathbb{P}^{2d+1}$ ) sur lequel le groupe de  $\text{PGL}_2$  agit par conjugaison. L'espace des modules  $\mathcal{M}_d$  est l'ensemble des classes d'équivalences de cette action. Il s'agit d'une variété affine irréductible de dimension  $2d - 2$  définie sur  $\mathbb{Q}$  qui est singulière pour  $d \geq 3$  (voir [Sil12]).
- L'espace  $\text{Poly}_d$  de tous les polynômes de degré  $d$  est une variété quasi-projective de dimension  $d + 1$  et le groupe des automorphismes de la droite affine  $\mathbb{A}^1$  agit par conjugaison sur  $\text{Poly}_d$ . L'espace des modules des polynômes de degré  $d$ , noté  $\mathcal{P}_d$ , est le quotient de cette action. Il s'agit d'une variété affine irréductible de dimension  $d - 1$  définie sur  $\mathbb{Q}$  qui est singulière lorsque  $d \geq 3$ . On sera amenés à définir un revêtement orbifold bien adapté aux problèmes que l'on étudiera. Lorsque  $d = 2$ ,  $\mathcal{P}_d$  n'est autre que la famille quadratique mentionnée ci-dessus.

## 1.1.2 Les courants de bifurcation

Un problème important qui se pose est de savoir comment *quantifier* ces phénomènes de bifurcations à l'aide d'outils de théorie de la mesure. A cette fin, on peut introduire les courants de bifurcations. Soit  $\hat{\omega} := \pi_{\mathbb{P}^1}^*(\omega_{\mathbb{P}^1})$ , où  $\pi_{\mathbb{P}^1} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  la projection sur le deuxième facteur, et où  $\omega_{\mathbb{P}^1}$  est la forme de Fubini-Study de  $\mathbb{P}^1$ , alors la limite

$$\hat{T} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} (\hat{f}^n)^*(\hat{\omega})$$

existe et est appelée le *courant de Green fibré* de la famille  $\hat{f}$ . Il s'agit d'un  $(1, 1)$ -courant positif fermé sur  $\Lambda \times \mathbb{P}^1$ .

Dans sa thèse, DeMarco a défini le courant de bifurcation d'une famille holomorphe : il s'agit d'un  $(1, 1)$ -courant positif fermé sur  $\Lambda$  dont le support coïncide avec  $\text{Bif}$ . Plus

précisément, pour un paramètre  $\lambda \in \Lambda$ , on définit l'exposant de Lyapunov de  $f_\lambda$  par rapport à sa mesure d'équilibre  $\mu_\lambda$  comme

$$L(f_\lambda) := \int_{\mathbb{P}^1} \log |f'_\lambda| d\mu_\lambda \geq \log \sqrt{d}.$$

DeMarco [DeM01, DeM03] montre le résultat suivant.

**Théorème 1.4 (DeMarco)** *La fonction  $L : \lambda \in \Lambda \mapsto L(f_\lambda) \in \mathbb{R}$  est continue et psh. De plus, le  $(1, 1)$ -courant positif fermé*

$$T_{\text{bif}} := dd^c L = (\pi_\Lambda)_* \left( \widehat{T} \wedge [\text{Crit}(\widehat{f})] \right)$$

est supporté par Bif, où  $\text{Crit}(\widehat{f})$  est le lieu critique fibré de  $\widehat{f}$ . Autrement dit, Stab est l'ouvert maximal de  $\Lambda$  sur lequel  $L$  est pluriharmonique.

La formule donnant l'égalité entre  $dd^c L$  et le poussé en avant de  $\widehat{T} \wedge [\text{Crit}(\widehat{f})]$  est le point le plus important de la preuve de l'égalité  $\text{Bif} = \text{supp}(T_{\text{bif}})$ . Par ailleurs, une égalité équivalente reste vraie en dimension supérieure d'après [BaBer07].

**Définition 1.1** *Le courant  $T_{\text{bif}}$  est le courant de bifurcation de la famille  $\widehat{f}$ .*

Remarquons que, lorsque les points critiques bougent holomorphiquement sur  $\Lambda$ , c'est-à-dire lorsqu'il existe  $c_1, \dots, c_{2d-2} : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$  holomorphes telles que  $[\text{Crit}(\widehat{f})] = \sum_j [\Gamma_j]$  où  $\Gamma_j$  est le graphe de  $c_j$ , alors le courant  $T_{\text{bif}}$  se décompose en

$$T_{\text{bif}} = \sum_{j=1}^{2d-2} (\pi_\Lambda)_* \left( \widehat{T} \wedge [\Gamma_j] \right),$$

où  $T_{\widehat{f}, c_j} := (\pi_\Lambda)_* \left( \widehat{T} \wedge [\Gamma_j] \right)$  est supporté par le lieu de non-normalité de la suite  $\{\lambda \mapsto f_\lambda^n(c_j(\lambda))\}_n$  de fonctions holomorphes (on pourra consulter [DujFav08] ou encore [Ber13, Duj] pour plus de détails).

**Exemple 1.2** Revenons à la famille quadratique  $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ . Dans ce cas précis, le courant de bifurcation (qui n'est autre qu'une mesure de masse finie) est proportionnelle à la mesure d'équilibre  $\mu_M$  de l'ensemble de Mandelbrot :

$$T_{\text{bif}} = \frac{1}{2} \mu_M.$$

La preuve de cette propriété est relativement simple et repose sur un argument de théorie du potentiel complexe : la fonction sousharmonique  $g_M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g_M(\lambda) := \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n+1} \log^+ |f_\lambda^n(0)|$  est la fonction de Green du compact  $M$  et satisfait  $2T_{\text{bif}} = dd^c g_M$  (voir par exemple [CarG93]).

Puisque la fonction  $L$  est continue, les puissances extérieures de  $T_{\text{bif}}$  sont bien définies au sens de Bedford et Taylor [BedTa76] et il est alors naturel de se demander s'il s'agit d'objet dynamiquement significatifs. Rappelons que l'on peut définir  $T_{\text{bif}}^{\wedge k}$  par récurrence :

$$T_{\text{bif}}^{\wedge(k+1)} := (dd^c L)^{\wedge(k+1)} = dd^c \left( L (dd^c L)^{\wedge k} \right) .$$

On peut penser au support de ces courants comme étant le lieu de bifurcations plus fortes en un sens que l'on précisera dans la suite. L'étude systématique de ces courants a été initiée par Bassanelli et Berteloot [BaBer07] et par Dujardin et Favre [DujFav08] dans le cas polynomial.

Bassanelli et Berteloot [BaBer07] ont notamment prouvé que le support de  $T_{\text{bif}}^{\wedge k}$  est approximé par des paramètres  $\lambda \in \Lambda$  possédant  $k$  cycles neutres fortement non-persistants, au sens où le lieu où les multiplicateurs desdits cycles ne varient pas forment des sousvariétés complexes de dimension  $k$ .

Concentrons nous maintenant sur le cas de l'espace des modules  $\mathcal{M}_d$  : la puissance extérieure  $2d - 2$  du courant de bifurcation

$$\mu_{\text{bif}} := T_{\text{bif}}^{\wedge(2d-2)}$$

est une mesure de masse finie sur  $\mathcal{M}_d$  appelée *mesure de bifurcation*. On dit qu'une fraction rationnelle est *Misiurewicz* si tous ses points critiques sont prépériodiques à des cycles répulsifs. Les travaux de Buff et Epstein [BufE09] et de Buff et moi-même [BufG13] ont complété le résultat mentionné ci-dessus pour donner :

**Théorème 1.5 (Bassanelli-Berteloot, Buff-Epstein, Buff-G.)**

$$\text{supp}(\mu_{\text{bif}}) = \overline{\{[f]; f \text{ Misiurewicz}\}} = \overline{\{[f]; f \text{ a } (2d - 2) \text{ cycles neutres distincts}\}} .$$

Lorsque l'on met ce résultat en perspective du résultat initial de Mañé, Sad et Sullivan et de Lyubich, on constate que le lieu  $\text{supp}(\mu_{\text{bif}})$  est l'adhérence des paramètres possédant  $(2d - 2)$  points critiques Misiurewicz. On peut alors se poser la question d'une généralisation du théorème 1.2 de Shishikura.

Le résultat principal de ma thèse, paru dans [Gau12], est une réponse à cette question :

**Théorème 1.6 (G.)** *Pour tout  $1 \leq k \leq 2d - 2$ , dans l'espace des modules  $\mathcal{M}_d$ , l'ensemble  $\text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge k}) \setminus \text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge(k+1)})$  est homogène et  $\dim_H \left( \text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge k}) \setminus \text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge(k+1)}) \right) = 2(2d - 2)$ .*

*En particulier,  $\text{supp}(\mu_{\text{bif}})$  est homogène de dimension  $2(2d - 2)$ .*

## 1.2 Le support des courants de bifurcation

### 1.2.1 Caractérisation dynamique des supports et dimension

On aimerait disposer d'une description précise du support de  $T_{\text{bif}}^{\wedge k}$  pour tout  $k$  dans toute famille de fractions rationnelles. A titre d'exemple, étant donnés  $k$  nombres complexes  $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{C}$ , on aimerait savoir s'il est possible de relier  $T_{\text{bif}}^{\wedge k}$  aux paramètres qui

possèdent  $k$  cycles distincts de multiplicateurs respectifs  $w_1, \dots, w_k$ . Afin de formaliser plus précisément cette question, rappelons que pour toute famille  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$ , il existe une application holomorphe

$$p_n : \Lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout  $\lambda \in \Lambda$  :

1. Pour tout  $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ,  $p_n(\lambda, w) = 0$  si et seulement si  $f_\lambda$  a un  $n$ -cycle de multiplicateur  $w$ ,
2.  $p_n(\lambda, 1) = 0$  si et seulement s'il existe  $k|n$  tel que  $f_\lambda$  a un  $k$ -cycle de multiplicateur une racine primitive  $n/k$ -ième de l'unité,
3. la fonction  $p_n(\lambda, \cdot)$  est un polynôme de degré  $N_d(n) \sim \frac{d^n}{n}$  en la deuxième variable.

De plus, si  $\Lambda$  est une variété quasi-projective, la fonction  $p_n$  est une fonction régulière sur  $\Lambda \times \mathbb{C}$  (voir [Sil07, Ber13]). Ainsi l'ensemble

$$\text{Per}_n(w) := \{\lambda \in \Lambda : p_n(\lambda, w) = 0\}$$

est un sous-ensemble analytique de l'espace des paramètres  $\Lambda$  de la famille  $\hat{f}$  et est soit  $\Lambda$  tout entier, soit vide, soit une hypersurface. Bassanelli et Berteloot [BaBer09] ont montré que le  $k$ -ième courant de bifurcation  $T_{\text{bif}}^{\wedge k}$  est la limite au sens faible des courants de moyennes de courants d'intégration de la forme

$$\frac{d^{-(s_1(n)+\dots+s_k(n))}}{(2\pi)^m} \int_{[0,2\pi]^k} \bigwedge_{j=1}^k [\text{Per}_{s_j(n)}(re^{i\theta_j})] d\theta_1 \cdots d\theta_k,$$

pour tout  $r > 0$  et pour un choix convenable de fonctions strictement croissantes  $s_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Au regard de ce travail de Bassanelli et Berteloot, on attend que le courant  $T_{\text{bif}}^{\wedge k}$  soit la limite de toutes les suites de courants d'intégration de la forme

$$d^{-(s_1(n)+\dots+s_k(n))} [\text{Per}_{s_1(n)}(re^{i\theta_1})] \wedge \cdots \wedge [\text{Per}_{s_k(n)}(re^{i\theta_k})]$$

pour des nombres  $\theta_i \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$  donnés pour lesquels il s'agit bien d'un  $(k, k)$ -courant positif fermé. Dans un premier temps, je me suis intéressé à la question, plus simple, du lieu d'accumulation dans l'espace des modules  $\mathcal{M}_d$  des classes d'équivalence de fractions rationnelles possédant  $k$  cycles distincts de multiplicateurs donnés. Pour  $\Theta_k := (\theta_1, \dots, \theta_k) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^k$ , on pose

$$\mathcal{Z}_k(\Theta_k) := \{[f] \in \mathcal{M}_d, f \text{ a } k \text{ cycles distincts de multiplicateurs resp. } e^{2i\pi\theta_1}, \dots, e^{2i\pi\theta_k}\}.$$

Afin de donner un énoncé plus complet, on note également

$$\text{Prerep}(k) := \{[f] \in \mathcal{M}_d, f \text{ a } k \text{ points critiques Misiurewicz distincts}\}.$$

Le résultat obtenu dans cette direction est optimal et peut se formuler comme suit.

**Théorème 1.7** ([Gau14]) *Soit  $T_{\text{bif}}$  le courant de bifurcation de l'espace des modules  $\mathcal{M}_d$ . Pour tout  $1 \leq k \leq 2d - 2$  et tout  $\Theta_k = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^k$ , on a*

$$\text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge k}) = \overline{\mathcal{Z}_k(\Theta_k)} = \overline{\text{Prerep}(k)}.$$

Il est à noter que l'égalité  $\text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge k}) = \overline{\text{Prerep}(k)}$  est due à Dujardin [Duj13] et repose sur un théorème de transversalité pour les produits extérieurs de courants uniformément laminaires. Le travail restant consiste donc à prouver l'égalité entre le support de  $T_{\text{bif}}^{\wedge k}$  et l'adhérence de  $\mathcal{Z}_k(\Theta_k)$ . l'inclusion  $\mathcal{Z}_k(\Theta_k) \subset \text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge k})$  repose quasiment entièrement sur un théorème de McMullen [McM87] qui assure que la seule sous-variété affine de  $\mathcal{M}_d$  dans laquelle aucun phénomène de bifurcation ne se produit est la courbe des Lattès flexibles (qui n'existe que si  $d$  est un carré dans  $\mathbb{Z}$ ).

La stratégie utilisée pour montrer l'autre inclusion est radicalement différente de celles utilisées par Bassanelli et Berteloot ou par Dujardin. Le point clé de la démonstration consiste à généraliser le théorème 1.3 de McMullen d'universalité de l'ensemble de Mandelbrot. Ce que je montre est que, sous des hypothèses très générales, les lieux de forte bifurcation contiennent des copies de  $M \times \dots \times M$  de façon dense.

Plus précisément, j'obtiens le résultat intermédiaire suivant qui est digne d'intérêt en lui-même.

**Théorème 1.8** ([Gau14]) *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{D}^m}$  une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré  $d \geq 2$  à points critiques marqués simples  $c_1, \dots, c_k$  avec  $k \leq m$ . Supposons qu'au paramètre  $\lambda = 0$ ,  $c_1, \dots, c_k$  tombent transversalement sur des cycles répulsifs. Alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un plongement continu  $\Phi : \mathbf{M}^k \times \mathbb{D}^{m-k} \hookrightarrow \mathbb{D}^m$  et des entiers  $n_1, \dots, n_k \geq 1$ , tels que :*

1. *Pour tous  $\zeta_1, \dots, \zeta_k \in M$  et tout  $t \in \mathbb{D}^{m-k}$ , si  $\lambda = \Phi(\zeta_1, \dots, \zeta_k, t)$ , alors il existe  $k$  compacts disjoints  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k \subset \mathbb{P}^1$  tels que  $f_\lambda^{n_i} : \mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{K}_i$  est hybrid conjuguée au polynôme quadratique  $z^2 + \zeta_i$  sur son ensemble de Julia rempli. En particulier, si  $z^2 + \zeta_i$  a un cycle non-répulsif,  $f_\lambda^{n_i}|_{\mathcal{K}_i}$  a un cycle non-répulsif de même période et de même multiplicateur que  $z^2 + \zeta_i$ .*
2. *L'ensemble  $\Phi((\partial M)^k \times \mathbb{D}^{m-k})$  est contenu dans  $\text{supp}(T_{f, c_1} \wedge \dots \wedge T_{f, c_k})$  et*

$$\dim_H \left( \Phi((\partial M)^k \times \mathbb{D}^{m-k}) \right) \geq 2m - \epsilon.$$

Pour conclure la preuve du théorème 1.7, on utilise la densité dans  $\partial M$  des paramètres possédant un point neutre de multiplicateur  $e^{2\pi i \theta}$  donné et la seconde partie du théorème 1.8, ainsi que la formule de décomposition du courant  $T_{\text{bif}}^{\wedge k}$  suivante, démontrée dans [Gau12], qui est valable dès lors que les  $2d - 2$  points critiques sont marqués par des fonctions holomorphes  $c_1, \dots, c_{2d-2}$  :

$$T_{\text{bif}}^{\wedge k} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ \text{distincts}}} T_{f, c_{i_1}} \wedge \dots \wedge T_{f, c_{i_k}}.$$

Pour démontrer le théorème 1.8, on utilise le théorème 1.3 d’universalité de McMullen séparément pour chaque point critique. On obtient alors  $k$  “tubes” de Mandelbrot homéomorphes à  $M \times \mathbb{D}^{m-1}$  et on montre qu’ils sont transverses deux-à-deux. On construit alors  $\Phi$  comme une application définie sur  $M^k \times \mathbb{D}^{m-k}$  et prenant valeur dans l’intersection de ces  $k$  tubes. L’estimée de dimension est obtenue par une application directe du théorème 1.2 et des propriétés d’hölderianité de  $\Phi$ . En réutilisant un des résultats principaux [Gau12], on obtient l’inclusion  $\Phi((\partial M)^k \times \mathbb{D}^{m-k}) \subset \text{supp}(T_{f,c_1} \wedge \cdots \wedge T_{f,c_k})$ .

Une conséquence immédiate est l’obtention d’estimées optimales de dimension des supports des courants de bifurcation qui reposent en partie sur des techniques différentes que celles de ma thèse.

**Corollaire 1.9** ([Gau14]) *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré  $d$ . Supposons qu’il existe  $\lambda_0$  tel que  $f_{\lambda_0}$  est à points critiques simples et choisissons  $1 \leq k \leq 2d - 2$  tel que  $T_{\text{bif}}^k \neq 0$ . Alors  $\text{supp}(T_{\text{bif}}^k) \setminus \text{supp}(T_{\text{bif}}^{k+1}) \neq \emptyset$  et pour tout ouvert  $\Omega \subset \Lambda$  tel que  $\Omega \cap \text{supp}(T_{\text{bif}}^k) \setminus \text{supp}(T_{\text{bif}}^{k+1}) \neq \emptyset$ , on a*

$$\dim_H \left( \Omega \cap \text{supp}(T_{\text{bif}}^k) \setminus \text{supp}(T_{\text{bif}}^{k+1}) \right) = 2 \dim_{\mathbb{C}} \Lambda.$$

## 1.2.2 Le support de la mesure de bifurcation est de volume positif

Étant donné le résultat de Shishikura concernant la dimension de Hausdorff de  $\partial M$ , une question importante qui reste complètement ouverte est la suivante.

**Question 1.1** *La frontière  $\partial M$  de l’ensemble de Mandelbrot est-elle d’aire positive ?*

Il est naturel de se poser une question similaire dans l’espace des modules  $\mathcal{M}_d$  des fractions rationnelles de degré  $d$ . Afin de poser cette question correctement, on commence par équiper  $\mathcal{M}_d$  d’une forme volume “naturelle” : il s’agit d’une variété affine donc il existe un plongement  $\iota : \mathcal{M}_d \hookrightarrow \mathbb{C}^N \subset \mathbb{P}^N$  pour un certain  $N$ . Soit  $\omega_d := \iota^* \omega_{\mathbb{P}^N}$  le tiré en arrière de la forme de Fubini-Study  $\omega_{\mathbb{P}^N}$  de  $\mathbb{P}^N$  par  $\iota$ . Il s’agit d’une  $(1,1)$ -forme positive fermée sur  $\mathcal{M}_d$  et on considère la forme volume sur  $\mathcal{M}_d$  :

$$\text{Vol}_{\mathcal{M}_d} := \omega_d^{\wedge (2d-2)}.$$

Il s’agit d’une forme volume de masse finie sur  $\mathcal{M}_d$ . De plus, dans toute carte locale (lisse) de  $\mathcal{M}_d$ , elle est équivalente à la mesure de Lebesgue (avec une dérivée de Radon-Nikodym lisse) et définit donc une forme volume non dégénérée sur  $\mathcal{M}_d$ .

Rees [Ree86] a montré que le lieu de bifurcation de  $\mathcal{M}_d$  est de volume positif pour la mesure  $\text{Vol}_{\mathcal{M}_d}$ . Cela laisse en suspens la question du volume du support de  $\mu_{\text{bif}}$ , qui est l’équivalent dans ce contexte de la question mentionnée ci-dessus. Raffinant le résultat de Rees, Aspenberg [Asp13] montre qu’il existe un ensemble de volume positif pour la mesure  $\text{Vol}_{\mathcal{M}_d}$  de classes d’équivalence de fractions rationnelles Collet-Eckmann régulières en un certain sens (il est notoire que ces fractions rationnelles sont dans le lieu de bifurcation).

Une fraction rationnelle  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  de degré  $d$  est *Collet-Eckmann* si l'ensemble critique  $\text{Crit}(f)$  de  $f$  est contenu dans  $J(f)$  et s'il existe  $\gamma, \gamma_0 > 0$  tels que

$$|(f^n)'(f(c))| \geq e^{n\gamma - \gamma_0}, \quad (\text{CE}(\gamma, \gamma_0))$$

pour tout  $c \in \text{Crit}(f)$  et tout  $n \geq 0$ .

Dans un article en commun avec Matthieu Astorg, Nicolae Mihalache et Gabriel Vigny, nous montrons le résultat suivant qui répond à la question de la positivité du volume de  $\text{supp}(\mu_{\text{bif}})$  :

**Théorème 1.10** ([AstGau<sup>+</sup>19]) *Pour tout  $[f] \in \text{supp}(\mu_{\text{bif}})$  et tout voisinage ouvert  $\Omega \subset \mathcal{M}_d$  de  $[f]$  dans l'espace des modules  $\mathcal{M}_d$  des fractions rationnelles de degré  $d$ , il y a un ensemble  $CE_\Omega \subset \Omega \cap \text{supp}(\mu_{\text{bif}})$  de fractions rationnelles Collet-Eckmann régulières de volume positif :*

$$\text{Vol}_{\mathcal{M}_d}(CE_\Omega) > 0.$$

Pour démontrer ce résultat, nous adoptons la stratégie suivante : tout d'abord, nous donnons un critère complètement général garantissant que la classe de conjugaison d'une fraction rationnelle appartient au support de  $\mu_{\text{bif}}$  (voir théorème 1.11 ci-dessous). Ensuite, nous exhibons un ensemble "gros" de paramètres Collet-Eckmann vérifiant ce critère (voir théorème 1.12 ci-dessous). Il est alors aisé d'obtenir le théorème 1.10.

Lorsqu'une fraction rationnelle est à points critiques simples, on peut les suivre holomorphiquement par des fonctions holomorphes  $c_1, \dots, c_{2d-2} : V \rightarrow \mathbb{P}^1$  sur un voisinage ouvert  $V$  de  $f$  dans l'espace  $\text{Rat}_d$  des fractions rationnelles de degré  $d$ . Pour tout  $(2d-2)$ -uplet d'entiers positifs  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_{2d-2})$ , on peut également définir une application holomorphe  $\mathfrak{A}_{\underline{n}} : V \rightarrow (\mathbb{P}^1)^{2d-2}$  en posant

$$\mathfrak{A}_{\underline{n}}(g) := (g^{n_1}(c_1(g)), \dots, g^{n_{2d-2}}(c_{2d-2}(g))).$$

Cette application détecte, en un certain sens, la stabilité/l'instabilité collective des points critiques  $c_1, \dots, c_{2d-2}$ .

**Définition 1.2** *Soit  $f \in \text{Rat}_d$  à valeurs critiques simples et soit  $\Gamma_{\underline{n}}$  le graphe de  $\mathfrak{A}_{\underline{n}}$ . On dit que  $f$  satisfait la condition de grande échelle s'il existe une sous-variété complexe locale  $\Lambda_f \subset \text{Rat}_d$  de dimension  $2d-2$  contenant  $f$ , des disques  $D_1, \dots, D_{2d-2} \subset \mathbb{P}^1$  avec  $D_i \cap J(f) \neq \emptyset$ , une suite  $\underline{n}_k = (n_{k,1}, \dots, n_{k,2d-2})$  de  $(2d-2)$ -uplets avec  $n_{k,j} \rightarrow +\infty$  pour tout  $j$ , et une suite emboîtée d'ouverts  $\Omega_k$  de  $\Lambda_f$  tels que*

- $\bigcap_k \overline{\Omega_k} = \{f\}$  et
- $\mathfrak{A}_{\underline{n}_k} : \Omega_k \rightarrow D_1 \times \dots \times D_{2d-2}$  est une application propre.

Cela signifie qu'une fraction rationnelle satisfait la condition de grande échelle si, pour une infinité de temps d'itération, l'application  $\mathfrak{A}_{\underline{n}}$  envoie un voisinage arbitrairement petit de  $[f]$  dans  $\mathcal{M}_d$  sur un polydisque de taille fixe dans  $(\mathbb{P}^1)^{2d-2}$  et que son graphe est à allure verticale au voisinage de  $[f]$ . La première étape de notre démonstration consiste à prouver que l'hypothèse de grande échelle est en fait une condition suffisante pour que des bifurcations maximales se produisent au paramètre  $f$  :

**Théorème 1.11** ([AstGau<sup>+</sup>19]) *Soit  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  une fraction rationnelle de degré  $d$  à valeurs critiques simples et telle que  $\omega(c) \subset J(f)$  pour tout  $c \in \text{Crit}(f)$ . Supposons que  $f$  satisfait la condition de grande échelle. Alors  $[f] \in \text{supp}(\mu_{\text{bif}})$ .*

La condition de grande échelle réduit à l'essentiel les conditions utilisées précédemment, comme le fait d'avoir une forme d'expansivité uniforme le long de l'ensemble post-critique (la fameuse condition de Misiurewicz généralisée). La preuve du théorème 1.11 reprend l'idée de transfert dynamique-paramètre exploitée par Tan Lei [Tan90] pour établir son résultat de similarité entre l'ensemble de Julia et l'ensemble de Mandelbrot.

A titre d'exemple, il est à noter que dans le cas où la fraction rationnelle est faiblement Misiurewicz, cette condition permet de simplifier drastiquement la preuve existante dans [Gau12], notamment en s'affranchissant d'un processus de linéarisation non-autonome le long des orbites postcritiques. Il s'agissait d'un élément clé de la preuve, qui est totalement inadapté au cas Collet-Eckmann. Dans ce cas, seuls un résultat de transversalité d'Astorg [Ast16] et l'existence d'un mouvement holomorphe dynamique de l'ensemble post-critique sont dorénavant nécessaires.

Rappelons qu'une fraction rationnelle est *Misiurewicz* si tous ses points critiques sont prépériodiques à des cycles répulsifs. On peut reformuler le théorème d'Aspenberg [Asp13] en termes de la condition  $\text{CE}(\gamma, \gamma_0)$  et des conditions suivantes

- Soient  $\mu, \mu_0 > 0$ . Pour tout  $n \geq 0$  et tout  $x \in f^{-n}(\text{Crit}(f))$ ,

$$|(f^n)'(x)| > e^{n\mu - \mu_0}, \quad (\text{CE2}(\mu, \mu_0))$$

- Soit  $\alpha > 0$ . Pour tout  $v \in f(\text{Crit}(f))$  et tout  $n \geq 0$ ,

$$\log |f'(f^n(v))| > -n\alpha, \quad (\text{BA}(\alpha))$$

- Soient  $\eta, \iota > 0$ . Pour tout  $v \in f(\text{Crit}(f))$  et tout  $n > 0$ ,

$$\sum_{\substack{j=0 \\ d(f^j(v), \text{Crit}(f)) \leq \eta}}^{n-1} \log |f'(f^j(v))| > -n\iota. \quad (\text{FA}(\eta, \iota))$$

On obtient alors l'énoncé suivant.

**Théorème 1.12** ([AstGau<sup>+</sup>19]) *Soit  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  une fraction rationnelle Misiurewicz de degré  $d$  à valeurs critiques simples qui n'est pas un exemple de Lattès flexible. Alors il existe  $\mu, \mu_0, \gamma, \gamma_0 > 0$  et  $\hat{\alpha} > 0$  tels que pour tout  $\alpha < \min(\frac{\gamma}{200}, \hat{\alpha})$ , il existe  $\hat{\eta} > 0$  et  $\hat{\iota} > 0$  tels que pour tout  $\eta < \hat{\eta}$  et tout  $\iota < \hat{\iota}$ ,  $f$  est un point de densité de Lebesgue de  $\text{Rat}_d$  de fractions rationnelles satisfaisant  $\text{CE}(\gamma, \gamma_0)$ ,  $\text{CE2}(\mu, \mu_0)$ ,  $\text{BA}(\alpha)$  et  $\text{FA}(\eta, \iota)$ .*

Le dernier ingrédient important pour la preuve du théorème 1.10 est le suivant.

**Théorème 1.13** ([AstGau<sup>+</sup>19]) *Soient  $\gamma, \gamma_0, \mu, \mu_0, \eta, \kappa > 0$  et  $\alpha < \gamma/200$ . Alors il existe  $\iota > 0$  tel que toute fraction rationnelle  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  de degré  $d$  à valeurs critiques simples et satisfaisant  $\text{CE}(\gamma, \gamma_0)$ ,  $\text{CE2}(\mu, \mu_0)$ ,  $\text{BA}(\alpha)$ , et  $\text{FA}(\eta, \iota)$  satisfait également la condition de grane échelle.*

Pour prouver le théorème 1.13, nous suivons la généralisation de Tsujii [Tsu93] de la construction de Benedicks et Carleson [BenC85] que nous adaptons au cas holomorphe. La stratégie de la preuve se résume comme suit.

- Choisissons une fraction rationnelle Collet-Eckmann  $f$  à valeurs critiques simples et une petite boule centrée en une valeur critique de  $f$  dans le plan dynamique. Cette boule va être envoyée à une grande échelle de taille fixée, exponentiellement vite en temps d'itération, et avec de bonnes estimées de distortion pour  $(f^n)$  par (CE), tant que son orbite reste “loin” de l'ensemble critique  $\text{Crit}(f)$  de  $f$ . Pour tout  $n$ , nous pouvons choisir une telle boule de départ  $B_n$ .
- Chaque passage de l'orbite critique près de  $\text{Crit}(f)$  impose une borne supérieure sur le rayon de  $B_n$ , et l'hypothèse (BA) garantit une borne inférieure sur la proximité à  $\text{Crit}(f)$ . Plus précisément, après une visite très proche de  $\text{Crit}(f)$ , l'image se rapproche encore plus de  $f(\text{Crit}(f))$ , de sorte que l'orbite critique copie les bonnes propriétés d'un long préfixe de l'orbite de la valeur critique visitée.
- Juste avant de passer proche d'un point critique, l'hypothèse (CE2) offre un gain d'expansivité. On a ainsi restauré la croissance exponentielle et les estimées de distortion sur  $B_n$ . On utilise entre autres un lemme à la Mañé pour le suffixe (fini) d'une orbite critique qui ne visite pas un voisinage de  $\text{Crit}(f)$ .
- L'hypothèse (FA) garantissant que l'on ne passe pas trop souvent proche d'un point critique, on peut trouver une densité grande de temps  $n$  pour lesquels  $B_n$  est envoyé par  $f^n$  à une grande échelle. Cette densité étant assez grande, l'intersection sur toutes les valeurs critiques fournit une densité positive de temps pour lesquels les boules vont à la grande échelle pour toutes les valeurs critiques en même temps.
- En utilisant encore (CE) et (BA), ainsi que le résultat de transversalité d'Astorg [Ast16], on arrive à borner les distortions paramétriques pour une densité positive de temps le long de droites complexes de l'espace des paramètres passant par  $f$ .
- On conclut finalement en utilisant un résultat de Sibony et Wong [SibWon80] et le résultat de transversalité pour étendre les estimées de distortion à toute une boule centrée en  $f$ . On en déduit alors facilement que la condition de grande échelle est vérifiée.

Un autre problème concernant l'espace des modules  $\mathcal{M}_d$  (qui est souvent considéré comme le problème central dans l'étude des espaces de paramètres en dynamique complexe à une variable) est la *Conjecture d'Hyperbolicité* :

**Conjecture 1.2 (Hyperbolicité)** *Les classes de conjugaisons de fractions rationnelles hyperboliques sont denses dans  $\mathcal{M}_d$ .*

Nous nous intéressons également ici à la question plus simple mais reliée suivante : les fractions rationnelles Collet-Eckmann sont-elles approchées par des fractions rationnelles hyperboliques ? Comme conséquence immédiate des résultats énoncés ci-dessus, nous apportons la réponse partielle suivante à cette question.

**Corollaire 1.14 ([AstGau<sup>+</sup>19])** *Pour tous  $\gamma, \gamma_0, \mu, \mu_0, \eta, \kappa > 0$  et  $\alpha < \gamma/200$ , il existe  $\iota > 0$  tel que les classes d'équivalences de fractions rationnelles Collet-Eckmann à valeurs*

critiques simples satisfaisant les conditions  $CE(\gamma, \gamma_0)$ ,  $CE2(\mu, \mu_0)$ ,  $BA(\alpha)$  et  $FA(\eta, \iota)$  sont approchées par des classes de conjugaison de fractions rationnelles hyperboliques.

## 1.3 Théorie ergodique des espaces de paramètres

### 1.3.1 Quelques rappels de théorie ergodique

Commençons par quelques rappels de théorie ergodique. Soit  $f : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace métrique compact. L'entropie topologique de  $f$  est une quantité qui mesure la rapidité à laquelle on acquiert de l'information sur la position d'un point  $x \in X$  quand on observe (avec une certaine précision) l'orbite pendant longtemps. Donnons une définition plus précise. Soit  $\varepsilon > 0$  un nombre réel strictement positif et soit  $n \geq 1$  un entier. On dira qu'un sous-ensemble  $F \subset X$  est  $(n, \varepsilon)$ -séparé si

$$d_n(x, y) := \max_{0 \leq j \leq n-1} d(f^j(x), f^j(y)) \geq \varepsilon \quad \text{pour } x, y \in F \text{ distincts.}$$

L'entropie topologique  $h_{\text{top}}(f)$  de  $f$  est définie comme suit :

$$h_{\text{top}}(f) := \sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \log \max \{ \text{Card}(F), F \text{ est } (n, \varepsilon)\text{-séparé} \}.$$

Lorsque  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  est une application holomorphe de degré  $d \geq 2$ , Gromov [Gro03] a montré que  $h_{\text{top}}(f) \leq k \log d$  et Misiurewicz et Przytycki [MisPrz77] ont montré que  $h_{\text{top}}(f) \geq k \log d$ .

Lorsque  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $X$  qui est invariante par  $f$ , on peut définir l'entropie métrique  $h_\mu(f)$  comme suit : étant donnée une partition mesurable  $\mathcal{U}$  de  $X$ , on définit  $\bigvee^n \mathcal{U}$  comme la partition de  $X$  constituée d'ensembles mesurables de la forme  $U_0 \cap f^*(U_1) \cap \dots \cap (f^{(n-1)})^*(U_{n-1})$ , avec  $U_j \in \mathcal{U}$  pour  $0 \leq i \leq n-1$ . On pose alors

$$h_\mu(f, \mathcal{U}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{A \in \bigvee^n \mathcal{U}} -\mu(A) \log \mu(A).$$

L'entropie métrique de  $f$  par rapport à  $\mu$  est alors définie par

$$h_\mu(f) := \sup \{ h_\mu(f, \mathcal{U}), \mathcal{U} \text{ partition mesurable avec } h_\mu(f, \mathcal{U}) < +\infty \}.$$

Le principe variationnel stipule alors que

$$h_{\text{top}}(f) = \sup \{ h_\mu(f), \mu \text{ mesure de probabilité } f\text{-invariante} \}$$

et Briend et Duval [BrDuv01] ont prouvé que la mesure de Green  $\mu_f$  d'un endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^k$  est l'unique mesure  $\mu$  d'entropie maximale, c'est-à-dire telle que  $h_\mu(f) = h_{\text{top}}(f) = k \log d$ . Si on note  $B_n(x, \varepsilon)$  la boule centrée en  $x$  et de rayon  $\varepsilon$  pour la distance  $d_n$ , Brin et Katok [BriKat83] ont montré que l'on a alors

$$k \log d = h_{\mu_f}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} \log \mu(B_n(x, \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} \log \mu(B_n(x, \varepsilon)),$$

pour  $\mu_f$ -presque tout  $x \in \mathbb{P}^k$ . Ainsi, l'entropie métrique de  $\mu_f$  peut être interprétée comme le taux de décroissance logarithmique de la mesure  $\mu_f(B_n(x, \varepsilon))$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  pour un point typique  $x \in \mathbb{P}^k$ .

Pour comprendre la dynamique de  $f$  le long d'une orbite typique pour la mesure  $\mu_f$ , il est utile de savoir calculer les exposants de Lyapunov de  $f$ . Il s'agit de nombres réels  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$  qui détectent le taux de croissance logarithmique des valeurs singulières de la dérivée le long de presque toute orbite. Dans le cas des endomorphismes de  $\mathbb{P}^k$ , Briend et Duval [BrDuv99] ont montré que  $\lambda_1 \geq \frac{1}{2} \log d$ . On a par ailleurs

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = \int_{\mathbb{P}^k} \log |\det f'| \cdot d\mu_f.$$

### 1.3.2 L'entropie des bifurcations

Dans un travail en commun avec Henry De Thélin et Gabriel Vigny, nous adaptons ici les définitions d'entropie topologique et d'entropie métrique au cadre d'étude qui nous intéresse (les espaces de paramètres de systèmes dynamiques holomorphes) et nous montrons que ces quantités mesurent effectivement à quel point des phénomènes de bifurcations fortes se produisent. Nous montrons également que la mesure de bifurcation est une mesure d'entropie maximale. Ce travail trouve sa motivation dans l'idée générale que *la mesure de bifurcation  $\mu_{\text{bif}}$  de l'espace des modules  $\mathcal{M}_d$  est l'équivalent paramétrique de la mesure d'entropie maximale.*

Nous supposons maintenant que la famille est critiquelement marquée : les  $2d - 2$  points critiques peuvent être suivis holomorphiquement (ceci est toujours possible, quitte à reparamétriser la famille par un revêtement ramifié fini de  $\Lambda$ ). En d'autres termes, il existe des fonctions holomorphes  $c_1, \dots, c_{2d-2} : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$  telles que  $f'_\lambda(c_j(\lambda)) = 0$  et telles que l'ensemble critique de  $f_\lambda$  est donné par la collection (comptée avec multiplicités)  $(c_1(\lambda), \dots, c_{2d-2}(\lambda))$ .

Introduisons maintenant la notion d'entropie des bifurcations. Pour un entier  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la *distance de  $n$ -bifurcation* sur  $\Lambda$  comme suit :

$$d_n(\lambda, \lambda') := \max_{1 \leq j \leq 2d-2} \max_{0 \leq q \leq n-1} d(f_\lambda^q(c_j(\lambda)), f_{\lambda'}^q(c_j(\lambda'))),$$

où  $d(x, y)$  est la distance sphérique (induite par la métrique de Fubini-Study) sur  $\mathbb{P}^1$ . Nous dirons qu'un ensemble  $E \subset \Lambda$  est  $(d_n, \varepsilon)$ -séparé si l'on a

$$\min_{\lambda, \lambda' \in E, \lambda \neq \lambda'} d_n(\lambda, \lambda') \geq \varepsilon.$$

Nous pouvons maintenant définir l'entropie des bifurcations sur un sous-ensemble  $X$  de  $\Lambda$ . Bien que nous soyons principalement intéressés par le cas où  $X$  est un sous-ensemble compact de  $\Lambda$ , il est plus pratique de donner une définition générale :

**Définition 1.3** *Pour tout ensemble  $X \subset \Lambda$ , l'entropie des bifurcations  $h_{\text{bif}}(\hat{f}, X)$  de la famille  $\hat{f}$  dans  $X$  est la quantité suivante :*

$$h_{\text{bif}}(\hat{f}, X) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log \max \{ \text{card}(E), E \subset X \text{ est } (d_n, \varepsilon) \text{-séparé} \}.$$

On peut alors définir l'entropie des bifurcations de la famille  $\hat{f}$  comme

$$h_{\text{bif}}(\hat{f}) := \sup\{h_{\text{bif}}(\hat{f}, K), K \text{ compact}, K \subset \Lambda\}.$$

A priori, on a  $h_{\text{bif}}(\hat{f}, K) \in [0, +\infty]$ , mais en raffinant l'argument de Gromov [Gro03] sur la croissance des volumes des graphes itérés d'une transformation holomorphe, nous pouvons prouver la borne supérieure suivante sur l'entropie des bifurcation de  $\hat{f}$  en dehors du support du courant  $T_{\text{bif}}^{\wedge l}$ .

**Théorème 1.15 ([DeTGauV20a])** *Fixons un entier  $1 \leq l \leq \dim(\Lambda)$  et choisissons un sous-ensemble compact  $K$  de  $\Lambda$ . Si  $K$  n'intersecte pas le support de  $T_{\text{bif}}^{\wedge l}$ , alors on a*

$$h_{\text{bif}}(\hat{f}, K) \leq (l - 1) \cdot \log d.$$

En suivant encore le cas des transformations rationnelles, nous pouvons définir une notion d'entropie métrique des bifurcations (qui mesure alors l'entropie d'une mesure sur l'espace des paramètres). La définition classique fait appel à la notion de partition de Markov et repose, de façon très importante, sur l'*invariance* de la mesure en question par le système dynamique étudié. Puisque nous ne disposons pas d'une telle propriété d'invariance, il semble très difficile de mettre un point un principe variationnel et d'adapter la définition en question de façon pertinente.

Nous procédons donc plutôt comme Katok dans [Kat80] et nous donnons une définition d'entropie métrique des bifurcations (d'une mesure) qui repose encore sur la notion d'ensemble  $(d_n, \varepsilon)$ -séparé. Soit donc  $\nu$  une mesure de Radon positive sur  $\Lambda$ , par exemple une mesure de probabilité sur  $\Lambda$ .

**Définition 1.4** *Soit  $X \in \mathcal{B}(\Lambda)$  un borélien de mesure strictement positive,  $\nu(X) > 0$ . Pour tout  $0 < \kappa < \nu(X)$ , nous posons*

$$h_{\nu, \text{bif}}(\hat{f}, X, \kappa) := \inf\{h_{\text{bif}}(\hat{f}, X'), X' \in \mathcal{B}(\Lambda), X' \subset X, \nu(X') > \nu(X) - \kappa\}.$$

On définit également l'entropie métrique des bifurcations de  $\nu$  sur l'ensemble  $X$ , que l'on notera  $h_{\nu, \text{bif}}(\hat{f}, X)$  dans la suite, par

$$h_{\nu, \text{bif}}(\hat{f}, X) := \sup_{\kappa > 0} h_{\nu, \text{bif}}(\hat{f}, X, \kappa).$$

On définit l'entropie métrique des bifurcations de la mesure  $\nu$  pour la famille  $\hat{f}$  comme

$$h_{\nu, \text{bif}}(\hat{f}) := \sup\{h_{\nu, \text{bif}}(\hat{f}, K), K \text{ compact}, K \subset \Lambda\}.$$

Remarquons que pour toute mesure positive  $\nu$ , on a les propriétés

$$h_{\nu, \text{bif}}(\hat{f}, K \cup K') = \max(h_{\nu, \text{bif}}(\hat{f}, K), h_{\nu, \text{bif}}(\hat{f}, K'))$$

ainsi que  $h_{\nu, \text{bif}}(\hat{f}) \leq h_{\text{bif}}(\hat{f})$ , bien qu'il n'y ait pas de notion naturelle d'*invariance* ou d'*ergodicité* pour la mesure  $\nu$ .

Revenons à la mesure qui semble la plus naturelle dans l'espace des paramètres  $\Lambda$  : la mesure de bifurcation  $\mu_{\hat{f}} := (dd^c L)^{\wedge \dim \Lambda}$  de la famille  $\hat{f}$  (on renvoie à la section 1.1.2 pour le cas de l'espace des modules). Nous montrons le résultat suivant :

**Théorème 1.16** ([DeTGauV20a]) *Pour tout compact  $K \Subset \Lambda$  tel que  $\mu_{\hat{f}}(K) > 0$ , on a*

$$h_{\mu_{\hat{f}}, \text{bif}}(\hat{f}, K) = \dim(\Lambda) \cdot \log d.$$

*En particulier, si  $\mu_{\hat{f}} \neq 0$  dans la famille que nous étudions, on a*

$$h_{\mu_{\hat{f}}, \text{bif}}(\hat{f}) = h_{\text{bif}}(\hat{f}) = \dim(\Lambda) \cdot \log d.$$

Remarquons que l'hypothèse  $\mu_{\hat{f}} \neq 0$  est satisfaite si et seulement s'il existe (au moins) un paramètre  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $f_\lambda$  admet (au moins)  $\dim(\Lambda)$  points critiques qui sont, de façon non-persistente, strictement prépériodiques à un cycle répulsif, voir par exemple [BufE09, Gau12, Duj13]. En particulier, cette propriété est vérifiée par n'importe quelle paramétrisation orbifold de l'espace des modules des fractions rationnelles de degré  $d$  à points critiques marqués. On peut mentionner au passage la preuve radicalement différente initialement donnée par Bassanelli et Berteloot [BaBer07] de la non-annulation de  $\mu_{\text{bif}}$  sur l'espace des modules  $\mathcal{M}_d$ .

**Remarque 1.3** Dans l'espace des modules  $\mathcal{M}_d$ , le Théorème 1.16 entraîne directement que  $\mu_{\text{bif}}$  est d'entropie maximale  $(2d - 2) \log d$  et que l'entropie des bifurcations de la famille est au plus  $(2d - 3) \log d$  en dehors de son support. Ceci donne un sens numérique à l'affirmation selon laquelle cette mesure est supportée par le lieu des plus fortes bifurcations.

Pour démontrer le Théorème 1.16, nous utilisons une borne à la Yomdin du volume de l'image d'une boule dynamique [Yom87]. L'idée d'utiliser cette technique pour calculer l'entropie d'une mesure invariante par un système dynamique holomorphe à plusieurs variables n'est pas nouvelle et a été utilisée en premier par Bedford et Smillie [BedSm92]; De Thélin et Vigny [DeTV10] ont généralisé l'utilisation de cet outil pour établir une condition complètement générale qui assure l'existence d'une mesure d'entropie maximale pour une transformation méromorphe d'une variété Kählerienne compacte (la grande difficulté de ce résultat résidant dans le fait qu'il faille contrôler très précisément les dérivées successives près du lieu d'indétermination de la transformation). Néanmoins, dans les deux articles en question, les auteurs doivent travailler avec une moyenne de Césaro d'approximations de la mesure étudiée (et non directement avec la mesure elle-même) et ils utilisent de façon cruciale la preuve de Misiurewicz du principe variationnel pour arriver à la conclusion voulue.

Notre idée a été d'utiliser l'estimée de Yomdin sur les boules paramétriques (par rapport à la distance  $d_n$  définie précédemment) directement pour la mesure  $\mu_{\hat{f}}$ . A cette fin, nous avons besoin d'un contrôle précis de la convergence de  $d^{-n}(\pi_\Lambda)_* \left( (\hat{f}^n)^* \hat{\omega} \wedge [\text{Crit}(\hat{f})] \right)$  vers le courant de bifurcation. Lors de la preuve, nous sommes amenés à contrôler des termes de la forme

$$\int_{B_{d_n}(x, \varepsilon) \cap M} \bigwedge_{j=1}^k (F^{i_j})^*(\Omega)$$

où tous les  $i_j$  sont au plus  $n - 1$ ,  $F$  est une transformation holomorphe d'une variété complexe  $X$  et  $M$  est une sous-variété complexe de  $X$  de codimension  $k$  munie d'une métrique  $\Omega$ . Si tous les indices  $i_j$  étaient soit nuls soit égaux à  $n - 1$ , cela reviendrait au résultat classique de Yomdin. L'idée de la démonstration dans le cas général est de travailler dans l'espace produit  $X^k$  et de remplacer la sous-variété  $M$  par  $M^k \cap \Delta$  où  $\Delta$  est la diagonale de  $X^k$  qui a toujours une géométrie contrôlée.

Au passage, la démonstration permet d'obtenir aisément un résultat similaire à celui de Brin et Katok :

**Théorème 1.17** ([DeTGauV20a]) *Si  $\mu_{\hat{f}} \neq 0$ , pour  $\mu_{\hat{f}}$ -presque tout paramètre  $\lambda \in \Lambda$ , on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} \log \mu_{\hat{f}}(B_{d_n}(\lambda, \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} \log \mu_{\hat{f}}(B_{d_n}(\lambda, \varepsilon)) = \dim \Lambda \cdot \log d.$$

Dans un second temps, nous réutilisons ces techniques (tout particulièrement notre variation sur les estimées de Yomdin) pour revenir à la théorie ergodique à plusieurs variables complexes :

- Nous donnons une démonstration alternative du calcul de l'entropie de la mesure de Green  $\mu$  des automorphismes de Hénon ([BedSm92]). A cette fin, nous utilisons notre estimées sur le volume des boules  $B_n(x, \varepsilon)$  directement pour la mesure  $\mu$ . Cela nous permet de ne pas utiliser la preuve de Misiurewicz du principe variationnel et de retrouver la formule de Brin-Katok pour les automorphismes de Hénon.
- nous définissons une notion d'entropie pour la mesure trace des courants de Green  $T_f^\ell$  d'un endomorphisme holomorphe  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  de degré  $d$  pour tout  $1 \leq \ell < k$ . En appliquant les résultats établis ci-dessus à la famille (constante)

$$\hat{f} : \mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^k$$

définie par  $\hat{f}(\lambda, z) = (\lambda, f(z))$ , nous établissons que cette entropie est toujours majorée par une constante  $\geq \ell \log d$  et qu'elle est égale à  $\ell \log d$  sur les compacts de  $\text{supp}(T_f^\ell) \setminus \text{supp}(T_f^{\ell+1}) \neq \emptyset$  de mesure trace positive. Nous donnons également des exemples où cette entropie est égale à  $\alpha > \ell \log d$  pour une infinité de valeurs distinctes de  $\alpha \in [\ell \log d, k \log d]$ . Cela rend plus riche l'étude de l'entropie des mesures traces des courants de Green que celle de la mesure de Green (qui vaut toujours  $k \log d$ ). On peut finalement noter que l'idée de développer des outils de théorie ergodique pour les mesures traces des courants de Green est déjà présente dans [Duj12] où Dujardin pour ces mesures traces, une notion de direction de Fatou, semblable à celle de direction caractéristique de Lyapunov d'une mesure ergodique.

### 1.3.3 Exposants de Lyapunov paramétriques

Dans un travail récent avec Henry De Thélin et Gabriel Vigny, nous continuons notre programme de construction d'une théorie ergodique des espaces de paramètres en dynamique complexe à une variable en nous intéressant à la notion d'"exposant de Lyapunov paramétrique".

**Exemple 1.4** Revenons d'abord à l'exemple de la famille quadratique  $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  et posons  $a(\lambda) := \lambda$ . On a vu que dans ce cas, la mesure de bifurcation  $\mu_{\text{bif}}$  définie par

$$\mu_{\text{bif}} := \frac{1}{2}(\pi_\Lambda)_* \left( \widehat{T} \wedge [\Gamma_a] \right)$$

où  $\Gamma_a \subset \mathbb{C}^2$  est le graphe de  $a$  n'est autre, à un facteur 2 près, que la mesure d'équilibre (ou de façon équivalente la mesure harmonique)  $\mu_M$  de l'ensemble de Mandelbrot  $M$ . Dans ce contexte, Graczyk et Świątek [GraSw15] ont décrit la dynamique d'un paramètre typique.

**Théorème 1.18 (Graczyk-Świątek)** *Dans la famille quadratique,  $\mu_M$ -presque tout paramètre  $\lambda \in \mathbb{C}$  vérifie*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(f_\lambda^n)'(\lambda)| = \log 2.$$

Puisque la mesure  $\mu_M$  est de dimension de Hausdorff égale à 1, ce résultat peut être réinterprété comme une version paramétrique de la formule de Ledrappier Young : “l'exposant de Lyapunov de  $\mu_M$  est égal à  $\log 2 = h_{\text{bif}}(\hat{f}) / \dim \mu_{\text{bif}}$ ”.

Dans un travail en commun avec De Thélin et Vigny, nous généralisons partiellement ce résultat au cas des points marqués quelconques : pour toute fonction  $a : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ , en suivant [DeM16], on définit le courant de bifurcation de la paire  $(f, a)$  comme

$$T_{\hat{f}, a} := (\pi_\Lambda)_* \left( \widehat{T} \wedge [\Gamma_a] \right).$$

On montre comme dans le cas où  $a$  suit un point critique que  $\text{supp}(T_{\hat{f}, a})$  est le lieu de non-normalité de la suite de fonctions holomorphes  $\{\lambda \mapsto f_\lambda^n(a(\lambda))\}_n$ . Lorsque  $\hat{f}$  est une famille algébrique et  $a$  est une fonction rationnelle sur  $\Lambda$ , on munit  $\Lambda$  d'une forme Kählérienne  $\omega_\Lambda$  et on appelle *mesure trace* de  $T_{\hat{f}, a}$  la mesure positive de masse finie  $T_{\hat{f}, a} \wedge \omega_\Lambda^{\dim(\Lambda)-1}$ . Si  $\dim \Lambda = 1$ , le courant  $T_{\hat{f}, a}$  est une mesure que l'on notera  $\mu_{\hat{f}, a}$ .

**Définition 1.5** *Lorsque  $\dim(\Lambda) = 1$ , pour toute mesure positive  $\mu$  sur un ouvert  $U \subset \Lambda$ , on définit la dimension de packing supérieure  $D_U^*$  de  $\mu$ , comme*

$$D_U^* := \sup_{\lambda \in U} \phi^*(\lambda) \leq 2,$$

où, pour  $\lambda \in U$ ,

$$\phi^*(\lambda) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(\lambda, r))}{\log r}.$$

Remarquons que l'on a automatiquement  $D^* \leq 2$ , puisque la dimension de packing supérieure d'une mesure est au plus la dimension de l'espace ambiant. Notre résultat se formule ainsi :

**Théorème 1.19 ([DeTGauV20b])** *Soit  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  une famille algébrique de fractions rationnelles de degré  $d \geq 2$  paramétrée par une variété quasi-projective  $\Lambda$  et soit  $a : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$  une fonction rationnelle. Supposons qu'il existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tel que  $\{f_{\lambda_0}^n(a(\lambda_0)), n \in \mathbb{N}\} \cap \text{Crit}(f_{\lambda_0}) = \emptyset$ . Alors*

— lorsque  $\dim(\Lambda) = 1$ , pour tout ouvert  $U \subset \Lambda$ , pour  $\mu_{\hat{f},a}$ -presque tout  $\lambda \in U$ , on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(f_\lambda^n)'(a(\lambda))| \geq \frac{\log d}{D_U^*} \geq \frac{1}{2} \log d$$

— lorsque  $\dim(\Lambda) \geq 1$ , pour  $T_{\hat{f},a} \wedge \omega_\Lambda^{\dim(\Lambda)-1}$ -presque tout  $\lambda \in \Lambda$ , on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(f_\lambda^n)'(a(\lambda))| \geq \frac{1}{2} \log d.$$

Un cas particulièrement intéressant est le cas où  $a$  paramétrise une valeur critique : dans ce cas, puisque  $f^*\hat{T} = d \cdot \hat{T}$ , le courant  $d^{-1}T_{\hat{f},a}$  est le courant de bifurcation associé à un point critique d'image  $a$  et le résultat stipule que la valeur critique  $a$  est Collet-Eckmann. En particulier, l'hypothèse de grande échelle pour la valeur critique considérée est une condition générique pour la mesure trace de  $T_{\hat{f},a}$ .

Malheureusement, pour la famille quadratique, nous ne retrouvons pas le résultat optimal de Graczyk et Świątek, puisque nous ne connaissons pas la valeur de  $D^*$  (en particulier, nous ne savons pas si  $D^* = 1$  pour la mesure harmonique de l'ensemble de Mandelbrot, bien que le travail de Makarov nous donne  $D_* = 1 \leq D^*$ ). Nous pouvons tout de même montrer que la borne établie au Théorème 1.19 est optimale en toute généralité : si  $\hat{f}$  est une famille d'exemples de Lattès, pour  $\mu_{\hat{f},a}$ -presque tout  $\lambda \in \Lambda$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(f_\lambda^n)'(a(\lambda))| = \frac{1}{2} \log d.$$

Je vais maintenant donner quelques éléments de démonstration. Avant toute chose, remarquons que la preuve de Graczyk et Świątek repose de façon cruciale sur le fait que  $\mu_M$  est la mesure harmonique d'un compact connexe plein non-polaire de  $\mathbb{C}$  et sur un résultat profond de Makarov portant sur les mesures harmoniques de tels compacts [Mak85]. Comme telle, leur démonstration ne peut donc pas se généraliser à de familles quelconques de fractions rationnelles.

Notre stratégie est totalement différente. Lorsque  $\dim \Lambda = 1$ , nous construisons beaucoup de disques contenus dans le graphe of  $\lambda \mapsto f_\lambda^n(a(\lambda))$  (qui est une sous-variété algébrique de dimension 1 dans une variété 2-dimensionnelle) en utilisant des idées classiques de la théorie des courants laminaires (voir [Duj04, DeT04]). Nous utilisons alors ces disques pour borner l'exposant de Lyapunov *paramétrique*, c'est-à-dire

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\| \frac{\partial \hat{f}^n}{\partial \lambda}(\lambda, a(\lambda)) \right\|.$$

Nous utilisons ensuite un argument de transversalité pour promouvoir cette minoration d'une quantité paramétrique en une minoration d'une quantité dynamique : l'exposant de Lyapunov dynamique. Finalement, le passage au cas des familles de dimension plus grande repose sur le Théorème de Fubini.

## 1.4 Perspectives

Les résultats ci-dessus décrivent complètement la dimension de Hausdorff des supports des courants de bifurcation. En revanche, en dehors du support de la mesure de bifurcation  $\mu_{\text{bif}}$  de l'espace des modules  $\mathcal{M}_d$ , on ne sait pas si ces supports sont de volume positif ou non.

Il faut remarquer que le cas de l'ensemble de Mandelbrot est encore ouvert (voir Question 1.1) et que si la frontière de l'ensemble de Mandelbrot s'avérait être de volume positif, alors le théorème 1.8 garantit que le volume de  $\text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge k}) \setminus \text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge(k+1)})$  est positif dans chaque ouvert qui l'intersecte.

**Question 1.3** *Soit  $\hat{f}$  une famille de fraction rationnelles et soit  $1 \leq k \leq 2d - 2$  tel que  $T_{\text{bif}}^{\wedge k} \neq 0$ . A-t-on  $\text{Vol}_{2k}(\text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge k}) \setminus \text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge(k+1)})) > 0$  ?*

Une question qui découle naturellement de [AstGau<sup>+</sup>19] est de savoir caractériser un paramètre typique de  $\text{supp}(\mu_{\text{bif}})$  pour deux mesures différentes :

1. la forme volume  $\text{Vol}_{\mathcal{M}_d}$ , et
2. la mesure de bifurcation  $\mu_{\text{bif}}$ .

Dans la famille quadratique réelle  $f_\lambda(x) = x^2 - \lambda$ ,  $\lambda \in [-1/4, 2]$ , le résultat le plus abouti est dû à Avila et Moreira [AviMor05] qui prouvent que presque tout paramètre, pour la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}$ ,  $f_\lambda$  est Collet-Eckmann avec une récurrence fortement polynomiale, c'est-à-dire que pour tout  $\beta > 0$ , il existe  $C > 0$  telle que

$$|f_\lambda^n(0)| \geq Cn^{-\beta}, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Gao et Shen [GaoS14] ont également montré que, dans toute famille d'applications multimodales  $f_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , tout paramètre sommable, c'est-à-dire tel que

$$\sum_{n \geq 0} |(f^n)'(f(c))|^{-1} < +\infty,$$

pour tout  $c \in \text{Crit}(f)$ , est un point de densité de Lebesgue de paramètres Collet-Eckmann à récurrence fortement polynomiale.

Dans le cadre des familles de fractions rationnelles, on peut poser la question suivante.

**Problème 1.4** *Montrer que  $\text{Vol}_{\mathcal{M}_d}$ -presque toute classe de conjugaison  $[f] \in \text{supp}(\mu_{\text{bif}})$  satisfait les propriétés suivantes :*

1. toutes les valeurs critiques de  $f$  (les images des points critiques) sont typiques pour la mesure d'entropie maximale de  $f$ ,
2.  $f$  est Collet-Eckmann à récurrence fortement polynomiale.

Une stratégie pour attaquer ce genre de problème est d'adapter les preuve de Gao et Shen au contexte holomorphe. Les premières estimées de distorsions sont dans la lignée du travail de Tsujii donc cette stratégie semble prometteuse.

Au regard des travaux de Graczyk et Świątek [GraSw15] et de De Thélin, Vigny et moi-même, on peut également espérer résoudre le problème de la caractérisation des paramètres typiques pour  $\mu_{\text{bif}}$ .

**Problème 1.5** *Montrer que  $\mu_{\text{bif}}$ -presque toute classe de conjugaison  $[f] \in \text{supp}(\mu_{\text{bif}})$  satisfait les propriétés suivantes :*

1. *toutes les valeurs critiques de  $f$  (les images des points critiques) sont typiques pour la mesure d'entropie maximale de  $f$ ,*
2.  *$f$  est Collet-Eckmann régulière (au sens de [AstGau<sup>+</sup>19]) et*
3. *pour tout  $c \in \text{Crit}(f)$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log |(f^n)'(f(c))| = L(f)$ .*

Un idée ambitieuse pour attaquer ce problème consiste à changer la mesure pour laquelle on fait la sélection des paramètres dans la stratégie évoquée pour attaquer le problème précédent. Il s'agit d'une approche difficile qui nécessite un travail de longue haleine et l'utilisation de propriétés de régularité de  $\mu_{\text{bif}}$ , comme par exemple le fait qu'elle est à potentiel continu.

On peut par ailleurs espérer déduire d'un tel résultat des estimées de dimension locale pour la mesure de bifurcation. En effet, la stratégie évoquée fournit naturellement des estimées de distortions et on pourrait alors résoudre le problème suivant.

**Problème 1.6** *Prouver que  $\mu_{\text{bif}}$ -presque partout sur  $\mathcal{M}_d$ , la dimension ponctuelle de  $\mu_{\text{bif}}$  existe et  $\dim_{[f]}(\mu_{\text{bif}}) = (2d - 2) \frac{\log d}{L(f)}$  pour  $\mu_{\text{bif}}$ -presque tout  $[f]$ .*

Le même type de résultat dans l'espace des modules des polynômes  $\mathcal{P}_d$  donnerait directement  $\dim(\mu_{\text{bif}}) = d - 1$ , redonnant le théorème de Makarov par une approche dynamique, lorsque  $d = 2$ .

Dans une autre direction, on peut essayer de généraliser la notion d'entropie des bifurcations dans d'autres contextes : on peut par exemple s'intéresser au cas des familles d'applications multimodales  $f_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , c'est-à-dire admettant un nombre fini de points critiques. Dans une famille d'applications multimodales  $f_t : I \rightarrow I$  ayant des points critiques  $c_1(t), \dots, c_k(t)$ , on peut définir comme ci-dessus l'entropie des bifurcations de la famille  $(f_t)$  en tout paramètre  $t_0$ .

**Problème 1.7** *Montrer que  $h_{\text{bif}}(t_0) > 0$  si et seulement si  $t_0$  est un paramètre de bifurcation et déterminer la valeur de  $h_{\text{bif}}(t_0)$  en fonction de  $t_0$ .*

Il serait intéressant, au moins dans la famille quadratique réelle  $f_t$ , de relier  $h_{\text{bif}}(t_0)$  au taux de croissance Hölder de la fonction  $t \mapsto h_{\text{top}}(f_t)$  en  $t_0$ . Notre réflexion est encore peu avancée sur cette question, mais les premiers cas étudiés semblent aller dans le bon sens.

Un autre cas d'étude peut être le cas des familles d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^k$ . L'étude des phénomènes de bifurcation dans de telles familles est en plein essor. Le travail fondateur de Berteloot, Bianchi et Dupont a lancé une série de travaux très intéressants (on peut par exemple citer [Duj17, Taf17, AstB18, Bie19]). On peut espérer transposer la notion d'entropie des bifurcations grâce au travail de De Thélin et Vigny [DTV18].

## Chapitre 2

---

# Phénomènes d'équidistribution paramétrique

### 2.1 Dans l'espace des modules des polynômes

Le premier résultat d'équidistribution dans les espaces de paramètres a été établi par Levin [Lev90] et concerne la famille quadratique  $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  : les centres des composantes hyperboliques équidistribuent la frontière de  $M$  selon sa mesure d'équilibre. Autrement dit, au sens faible des mesures, on a

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{f_\lambda^n(0)=0} \delta_\lambda \longrightarrow \mu_M,$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . La preuve de ce résultat pionnier repose sur des propriétés d'extrémalité de la fonction de Green de l'ensemble de Mandelbrot. Ce résultat a été généralisé par Dujardin et Favre [DujFav08] aux familles de fractions rationnelles de degré  $d$  sous une hypothèse relativement générale (que nous ne détailleront pas ici mais qui est vérifiée par  $\mathcal{M}_d$  et  $\mathcal{P}_d$ ). Ils montrent que si  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  est munie d'un point critique marqué  $c : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ , alors pour toute suite  $(k(n))_n$  d'entiers tels que  $0 \leq k(n) < n$ ,

$$\frac{1}{d^n + d^{(1-e)k(n)}} [\{\lambda \in \Lambda : f_\lambda^n(c(\lambda)) = f^{k(n)}(c(\lambda))\}] \longrightarrow T_{\hat{f},c},$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ , où  $e \in \{0, 1\}$  est le cardinal générique de l'ensemble exceptionnel  $\mathcal{E}(f)$  de  $f$ . La stratégie est une généralisation difficile de celle de Levin. Il est à noter que lorsque  $k(n) \equiv 0$ , Okuyama [Oku14] a réussi à enlever l'hypothèse nécessaire à la preuve de Dujardin et Favre en utilisant une idée de Przytycki [Prz93] qui permet de contrôler la vitesse de récurrence d'un point critique hors d'un bassin d'attraction.

Tous ces résultats reposent sur la formulation du courant de bifurcation en termes de la dynamique critique. Bassanelli et Berteloot [BaBer09, BaBer11] ont de leur côté établi des phénomènes de convergence qui reposent sur le point de vue exposant de Lyapunov (certains ont déjà été abordés en Section 1.2.1). Leur résultat le plus frappant concerne

l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$  des polynômes de degré  $d$ . Pour donner un énoncé plus précis, plaçons nous dans la paramétrisation orbifold suivante que nous réutiliserons : Soit  $d \geq 3$ . Pour tout  $c = (c_1, \dots, c_{d-2}) \in \mathbb{C}^{d-2}$  et tout  $a \in \mathbb{C}$ , on pose

$$P_{c,a}(z) := \frac{1}{d}z^d + \sum_{j=2}^{d-1} (-1)^{d-j} \sigma_{d-j}(c) \frac{z^j}{j} + a^d, \quad (*)$$

où  $\sigma_\ell(c)$  est le polynôme symétrique unitaire de degré  $\ell$  en les variables  $c_1, \dots, c_{d-2}$ . La famille  $\hat{P} : \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}$  ainsi définie est un revêtement ramifié fini de  $\mathcal{P}_d$  et les points critiques sont marqués par les fonctions régulières  $c_0 := 0, c_1, \dots, c_{d-2}$ . Bassanelli et Berteloot montrent que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et tout  $0 \leq r \leq 1$ ,

$$d^{-n}[\text{Per}_n(re^{i\theta})] \longrightarrow T_{\text{bif}},$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ , au sens des courants sur  $\mathbb{C}^{d-1}$ . Leur résultat repose sur une formule d'approximation de l'exposant de Lyapunov par la moyenne des log des multiplicateurs des cycles répulsifs d'une période donnée lorsque la période tend vers l'infini, ainsi que sur une analyse fine de l'accumulation de Bif à l'infini de  $\mathbb{C}^{d-1}$  dans  $\mathbb{P}^{d-1}$ .

### 2.1.1 Polynômes possédant un cycle de multiplicateur et période prescrits

#### Dans la famille quadratique

Dans un travail en commun avec Xavier Buff, nous avons généralisé le résultat de Bassanelli et Berteloot dans la famille quadratique : nous avons étudié les propriétés de convergence de la suite de mesures de probabilité

$$\mu_{n,w} := \frac{1}{d_n}[\text{Per}_n(w)],$$

pour  $w \in \mathbb{C}$  quelconque où  $d_n$  est défini par récurrence par  $d_1 = 1$  et  $\sum_{k|n} d_k = 2^{n-1}$ . Lorsque l'on considère une suite  $(w_n)_n$  quelconque, il arrive que la suite  $(\mu_{n,w_n})_n$  ne converge a priori pas vers la mesure de bifurcation. Nous devons donc introduire une nouvelle famille de mesures. Rappelons que la mesure de bifurcation  $\mu_M$  de la famille quadratique  $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$  peut s'écrire  $\mu_M = dd^c g_M$ , où

$$g_M(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log^+ |f_\lambda^n(\lambda)|.$$

Pour toute constante  $\rho \geq 0$ , on définit

$$\mu_{\text{bif},\rho} := dd^c \max\{g_M, \rho\}.$$

Remarquons que lorsque  $\rho > 0$ , la mesure  $\mu_{\text{bif},\rho}$  est supportée par l'équipotentielle  $\{g_M = \rho\}$  et qu'elle n'est autre que la mesure de Lebesgue normalisée sur cette équipotentielle. Lorsque  $\rho = 0$ , la mesure  $\mu_{\text{bif},0}$  n'est autre que  $\mu_M$ . Nous montrons le résultat suivant.

**Théorème 2.1** ([BufG15]) *Considérons une suite  $w_n \in \mathbb{C}$  telle que*

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |w_n| \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

*existe. Alors la mesure  $\mu_{n,w_n}$  converge au sens faible des mesures vers  $\mu_{\text{bif},\rho}$ , où  $\rho$  est la constante  $\rho = \max\{0, 2(\ell - \log 2)\}$ .*

En particulier, lorsque  $\ell \leq \log 2$  (et donc lorsque  $w_n = w$  pour tout  $n$  par exemple), ce résultat stipule que  $\mu_{n,w_n}$  converge vers  $\mu_M$ .

Disons maintenant quelques mots de la preuve. Soit  $(w_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres complexes telle que la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |\rho_n| = L \in [-\infty, +\infty)$$

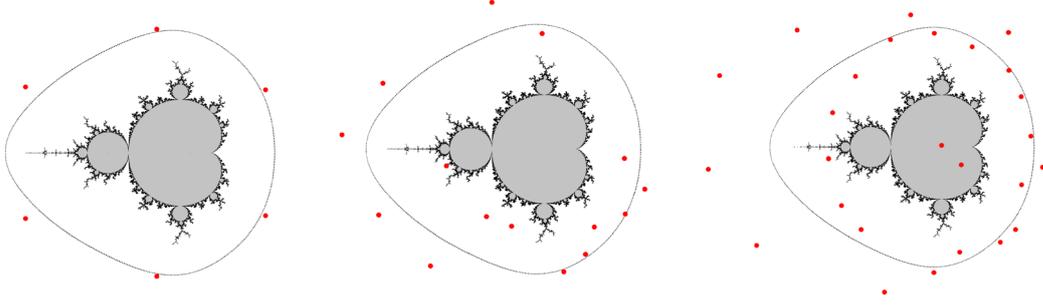
existe et posons  $\rho := \max\{0, 2L - 2 \log 2\}$ . La preuve se découpe en deux étapes :

1. Soit  $\phi : \mathbb{C} \setminus M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  la représentation conforme qui envoie  $]1/4, +\infty[$  sur  $]1, +\infty[$  et posons  $\lambda(t) := \phi^{-1}(t^2)$  pour  $|t| > 1$ . Il existe une famille holomorphe d'homéomorphismes  $\psi_t : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow J(f_{\lambda(t)})$  telle que  $\psi_t$  conjugue le décalage  $\sigma$  à  $f_{\lambda(t)}|_{J(f_{\lambda(t)})}$  paramétrée par  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ . Si  $p_n(\lambda, w)$  est le polynôme définissant les ensembles  $\text{Per}_n(w)$ , on peut grâce à cette conjugaison alors calculer  $p_n(\lambda(t), w_n) = \prod_j (w_{j,n}(t) - w_n)$  où les  $w_{j,n}(t)$  sont les multiplicateurs des cycles  $n$ -répulsifs de  $f_{\lambda(t)}$ . Puisque  $w_{j,n}(t) \sim \pm i^n (2t)^n$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , on trouve alors pour  $g_M(\lambda(t)) > \rho$ ,

$$\frac{1}{d_n} \log |p_n(\lambda(t), w_n)| \sim_{n \rightarrow \infty} 2 \log |2t| = g_M(\lambda(t)) + 2 \log 2 = 2L(\lambda(t)).$$

2. Puisque la suite  $(\frac{1}{d_n} \log |p_n(\lambda, w_n)|)_n$  est localement uniformément majorée et puisqu'elle ne converge pas uniformément localement vers  $-\infty$ , elle admet des sous-suites qui convergent dans  $L^1_{\text{loc}}$ . Si  $u$  est la limite d'une telle sous-suite, alors  $u$  est sous-harmonique sur  $\mathbb{C}$  et on a  $u = 2L$  sur  $U_\rho := \{\lambda \in \mathbb{C} : g_M(\lambda) > \rho\}$ . Lorsque  $\ell > \log 2$  (ou  $\rho > 0$ ), le principe du maximum et le principe de continuité pour les fonctions sous-harmoniques permettent de conclure. Finalement, lorsque  $\ell \leq \log 2$ , il faut également utiliser que  $\mu_M$  ne charge pas le bord des composantes de  $M$  et montrer que toute fonction sous-harmonique  $u$  qui coïncide avec  $2L$  sur  $\mathbb{C} \setminus M$  coïncide avec  $2L$  partout.

Voici trois illustrations de l'ensemble de Mandelbrot entouré de l'équipotentielle  $\{\lambda \in \mathbb{C} : g_M(\lambda) = 2(\log |w| - \log 2)\}$ , avec  $w = \pi/(1+i)$ . Sur chacune d'entre elles, les points rouges sont les points de  $\text{Per}_n(w^n)$  pour  $n = 4, 5$  et  $6$ .



### En degré plus grand

J'ai ensuite généralisé ce résultat pour tout  $d \geq 2$  au cas de l'espace des modules des polynômes de degré  $d$  :

**Théorème 2.2 ([Gau16])** *Pour tout  $d \geq 2$  et tout  $w \in \mathbb{C}$ , la suite  $d^{-n}[\text{Per}_n(w)]$  converge au sens des courants vers le courant de bifurcation  $T_{\text{bif}}$  dans l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$  des polyômes de degré  $d$ .*

Lorsque  $d = 2$ , il s'agit d'un cas particulier du théorème 2.1 et lorsque  $d \geq 3$ , la stratégie est la même que celle utilisée avec Buff. Fixons  $w \in \mathbb{C}$ . Tout d'abord, on sait que  $[\text{Per}_n(w)] = dd^c_\lambda \log |p_n(\lambda, w)|$  et que la suite  $d^{-n} \log |p_n(\lambda, w)|$  admet une sous-suite qui converge dans  $L^1_{\text{loc}}$  vers une fonction psh  $\varphi$  qui vérifie  $\varphi \leq L$  sur les composantes hyperboliques. La stratégie consiste d'abord à établir un principe de comparaison qui porte sur les fonctions psh. Puisqu'il est connu que  $\varphi = L$  sur le lieu d'échappement, c'est-à-dire le lieu où tous les points critiques s'échappent à l'infini sous itération, nous allons utiliser ce principe de comparaison par récurrence (finie) sur le nombre de points critiques d'orbite bornée dans de bonnes sous-variétés de  $\mathcal{P}_d$ . Rappelons que dans  $\mathcal{P}_d$ , la mesure de bifurcation est de masse finie et est portée par le bord de Shilov du lieu de connexité

$$\mathcal{C}_d := \{[P] \in \mathcal{P}_d; J(P) \text{ est connexe}\},$$

qui est compact dans  $\mathcal{P}_d$ , d'après [DujFav08].

Le principe de comparaison dont nous avons besoin est digne d'intérêt en lui-même et, contrairement au principe de domination classique de Bedford et Taylor [BedTa76], il ne repose pas sur une comparaison des mesures de Monge-Ampère complexe associées à deux fonctions psh, mais sur une comparaison directe des fonctions mises en jeu. l'énoncé précis que je prouve est le suivant qui généralise [BufG15, Lemma 3].

**Théorème 2.3 (Principe de comparaison [Gau16])** *Soit  $\mathcal{X}$  une variété complexe connexe de dimension  $k \geq 1$ . Supposons qu'il existe une fonction psh lisse  $w$  sur  $\mathcal{X}$  et un sous-ensemble analytique propre  $\mathcal{Z}$  de  $\mathcal{X}$  tel que  $(dd^c w)^k$  est une forme volume non-dégénérée sur  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}$ . Soit  $\Omega \subset \mathcal{X}$  un ouvert connexe de  $\mathcal{X}$  à bord  $\mathcal{C}^1$  et soient  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  psh et  $K \Subset \Omega$  un compact. Supposons que les hypothèses suivantes soient satisfaites :*

1.  $v$  est continue,  $\text{supp}((dd^c v)^k) \subset \partial K$  et  $(dd^c v)^k$  est de masse finie,
2. pour toute composante connexe  $U$  de  $\overset{\circ}{K}$ ,  $(dd^c v)^k(\partial U) = 0$ ,
3.  $u \leq v$  sur  $\Omega$  et  $u = v$  sur  $\Omega \setminus K$ .

Alors  $u = v$  sur  $\Omega$ .

La stratégie utilisée pour être en mesure d'appliquer le théorème 2.3 aux fonctions  $\varphi$  et  $L$  repose sur une description (partielle) des courants  $T_{\text{bif}}^{\wedge k}$  en restrictions à des sous-variétés analytiques locales bien choisies de l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$ . Lorsque  $1 \leq k \leq d - 2$ , pour tout paramètre  $\lambda_0$  appartenant à un ouvert dense de  $\mathcal{P}_d \setminus \mathcal{C}_d$ , on construit une sous-variété analytique locale passant par  $\lambda_0$  et en restriction à laquelle le courant de bifurcation  $T_{\text{bif}}^{\wedge k}$  a les propriétés requises au théorème 2.3. La preuve utilise sur des techniques développées dans le contexte de l'étude dynamique des applications à allure horizontale, voir [DiDujSi05, Duj09].

Précisément, je montre le résultat suivant :

**Théorème 2.4** ([Gau16]) *Il existe un ouvert dense  $\Omega \subset \mathcal{P}_d \setminus \mathcal{C}_d$  tel que pour tout  $[P] \in \Omega$ , si  $0 \leq k \leq d - 2$  est le nombre de points critiques de  $P$  d'orbite bornée, alors il existe une sous-variété analytique locale  $\mathcal{X}_0 \subset \Omega$  contenant  $[P]$ , une variété complexe  $\mathcal{X}$  de dimension  $k$  et une application holomorphe finie  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  telle que*

1. la mesure  $\mu_{\mathcal{X}} := \pi^*(T_{\text{bif}}^k|_{\mathcal{X}_0})$  est une mesure finie à support compact dans  $\mathcal{X}$ ,
2. pour toute composante connexe relativement compacte  $\mathcal{U}$  de l'ouvert  $\mathcal{X} \setminus \text{supp}(\mu_{\mathcal{X}})$ ,

$$\mu_{\mathcal{X}}(\partial \mathcal{U}) = 0,$$

3. soit  $\Omega$  la composante connexe non-relativement compacte de  $\mathcal{X} \setminus \text{supp}(\mu_{\mathcal{X}})$ . Si  $[Q] \in \Omega$ , alors le polynôme  $Q$  a au plus  $k - 1$  points critiques d'orbite bornée.

La dernière étape de la preuve du théorème 2.2 consiste à appliquer le théorème 2.3 dans  $\mathcal{P}_d$  pour  $K = \mathcal{C}_d$ . A cette fin, il est nécessaire de montrer que la mesure de bifurcation  $\mu_{\text{bif}}$  ne charge pas la frontière des composantes connexes de l'intérieur de  $\mathcal{C}_d$ . En utilisant la description des paramètres typiques de la mesure de bifurcation donnée par Dujardin et Favre [DujFav08] (à savoir que tous leurs cycles sont répulsifs, que leur ensemble de Julia est de mesure nulle et que leurs orbites critiques sont denses dans leur Julia) et des propriétés de propagation des champs de droites invariants établies par McMullen [McM94], je démontre le résultat suivant :

**Théorème 2.5** ([Gau16]) *Soit  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_d$  une composante connexe de l'intérieure de  $\mathcal{C}_d$ . Alors*

$$\mu_{\text{bif}}(\partial \mathcal{U}) = 0.$$

### 2.1.2 Équidistribution arithmétique et espaces de paramètres

Dans un premier travail en commun avec Charles Favre, nous avons démontré l'équidistribution des paramètres postcritiquement finis ayant une combinatoire postcritique donnée, ainsi que l'équidistribution des paramètres hyperboliques possédant  $d - 1$  cycles attractifs de multiplicateurs et périodes prescrits vers la mesure de bifurcation dans l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$  des polynômes de degré  $d$ . Notre idée a été de construire une bonne fonction hauteur arithmétique sur  $\mathcal{P}_d$  à laquelle on puisse appliquer le théorème d'équidistribution des points de petite hauteur de Yuan [Yua08]. A cette fin, nous modifions de façon adéquate la hauteur critique construite par Ingram [Ing12] et la première difficulté réside dans la vérification des hypothèses du théorème de Yuan. On renvoie au chapitre 4 pour plus de détails sur les fonctions hauteurs.

Rappelons que la fonction de Green de  $P_{c,a}$  (défini en  $(\star)$ ) est la fonction sousharmonique continue définie comme la limite uniforme

$$g_{c,a}(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |P_{c,a}^n(z)|.$$

On peut montrer que la fonction  $G : \mathbb{C}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$G(c, a) := \max\{g_{c,a}(c_0), \dots, g_{c,a}(c_{d-2})\},$$

est continue et psh sur  $\mathbb{C}^{d-1}$  et que le lieu de connexité  $\mathcal{C}_d$  de  $\hat{P}$  est exactement le lieu  $\{G = 0\}$ . Par ailleurs, il est connu que  $\mu_{\text{bif}} = (d - 1)! \cdot (dd^c G)^{\wedge(d-1)}$  et que

$$\mu_{\mathcal{C}_d} := (dd^c G)^{\wedge(d-1)}$$

est la mesure de Green pluri-complexe du compact  $\mathcal{C}_d$ , voir [DujFav08].

Le premier résultat que nous établissons est le suivant :

**Théorème 2.6 ([FavGau15])** *Pour tous  $0 \leq i \leq d - 2$ , fixons deux suites d'entiers  $m_{k,i} > n_{k,i} > 0$  tels que  $m_{k,i} - n_{k,i} \rightarrow \infty$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Considérons la mesure de probabilité  $\mu_k$  qui est uniformément distribuée sur les paramètres  $(c, a) \in \mathbb{C}^{d-1}$  tels que  $P^n(c_i)$  est périodique si et seulement si  $n \geq n_{k,i}$  et dont la période exacte est égale à  $m_{k,i} - n_{k,i}$ .*

*Alors les mesures  $\mu_k$  convergent au sens faible vers  $\mu_{\mathcal{C}_d}$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .*

En termes simples, ce théorème stipule que les paramètres Misiurewicz, dont la combinatoire postcritique est prescrite, s'équidistribuent selon la mesure de bifurcation (renormalisée) lorsque la taille des orbites critiques tend vers l'infini. Notre second résultat traite de la distribution des centres des composantes hyperboliques :

**Théorème 2.7 ([FavGau15])** *Pour tous  $0 \leq i \leq d - 2$  choisissons une suite d'entiers  $m_{k,i}$  tels que  $m_{k,i} \rightarrow \infty$  quand  $k \rightarrow \infty$  et tels que  $m_{k,i} \neq m_{k,j}$  pour tous  $i \neq j$  et tout  $k$ . Considérons la mesure de probabilité  $\mu'_k$  qui est uniformément distribuée sur les paramètres  $(c, a) \in \mathbb{C}^{d-1}$  tels que  $c_0, \dots, c_{d-2}$  sont périodiques de périodes exactes respectives  $m_{k,0}, \dots, m_{k,d-2}$ .*

*Alors les mesures  $\mu'_k$  convergent au sens faible vers  $\mu_{\mathcal{C}_d}$  quand  $k \rightarrow \infty$ .*

Ce résultat n'est autre, lorsque  $d = 2$ , que le résultat de Levin mentionné précédemment. En nous inspirant du travail fondateur de Briend and Duval [BrDuv01] sur la construction de la mesure d'entropie maximale des endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^k$ , nous déduisons du théorème 2.7 un résultat d'équidistribution des ensembles

$$\text{Per}_{\underline{m}}(\underline{w}) := \bigcap_{i=1}^{d-1} \text{Per}_{m_i}(w_i),$$

où  $\underline{m} = (m_1, \dots, m_{d-1}) \in (\mathbb{N}^*)^{d-1}$  et  $\underline{w} = (w_1, \dots, w_{d-1}) \in \mathbb{D}^{d-1}$ . Observons que l'adhérence de l'union sur les multi-indices  $\underline{m}$  de ces ensembles contient bien le support de  $\mu_{\mathcal{E}_d}$ . Ici nous prouvons le résultat suivant.

**Théorème 2.8 ([FavGau15])** *Pour tout  $1 \leq i \leq d - 1$ , fixons  $w_i \in \mathbb{D}$ , et choisissons une suite  $m_{k,i}$  d'entiers positifs telle que  $m_{k,i} \rightarrow \infty$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Supposons par ailleurs que  $m_{k,i} \neq m_{k,j}$  pour tout  $k$  et tous  $i \neq j$ . Alors l'ensemble  $\text{Per}_{\underline{m}_k}(\underline{w})$  est fini, et la mesure de probabilité  $\mu_k''$  qui est uniformément distribuée sur cet ensemble est bien définie.*

*De plus, la suite  $\mu_k''$  converge au sens faible vers  $\mu_{\mathcal{E}_d}$  quand  $k \rightarrow \infty$ .*

Comme mentionné ci-dessus, les preuves des théorèmes 2.6 et 2.7 reposent sur le théorème d'équidistribution des points de petite hauteur de Yuan. En revanche, la preuve du théorème 2.8 repose sur des estimées de type aire-diamètre.

Le premier problème qui se pose lorsqu'on veut appliquer ce théorème d'équidistribution arithmétique est de construire une fonction hauteur sur une variété projective à laquelle le théorème de Yuan s'applique. Ici, nous travaillons sur  $\mathbb{P}^{d-1}$  qui est définie sur  $\mathbb{Q}$ . En termes techniques, nous devons prouver que la hauteur en question est induite par une métrique *adélique semi-positive* continue sur le fibré en droites ample  $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$ . A chaque polynôme  $P_{c,a}$  défini sur  $\bar{\mathbb{Q}}$  (autrement dit tel que  $(c, a) \in \bar{\mathbb{Q}}^{d-1}$ ), on peut associer une fonction hauteur canonique  $h_{c,a} : \bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  (comme définie par Call et Silverman);

$$h_{c,a}(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} h(P_{c,a}^n(z)), \quad z \in \bar{\mathbb{Q}},$$

où  $h : \bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la hauteur naïve. Une première fonction hauteur naturelle sur l'espace des paramètres est la *hauteur critique* définie comme  $h_{\text{crit}}(P_{c,a}) := \sum_{i=0}^{d-2} h_{c,a}(c_i)$ . Cette fonction hauteur a été utilisée par Ingram mais ne provient pas d'une métrisation continue sur un fibré en droites ample. Notre première observation est que la hauteur  $\max_{0 \leq i \leq d-2} h_{c,a}(c_i)$  est, elle, bien induite par une métrisation adélique continue sur  $\mathcal{O}(1)$ .

Nous devons alors surmonter une deuxième difficulté : le théorème de Yuan s'applique aux suites d'ensembles finis  $Z_k$  qui sont *génériques* au sens suivant : pour toute sous-variété algébrique  $V$  de  $\mathbb{A}^{d-1}$  qui est définie sur  $\bar{\mathbb{Q}}$ , la proportion de points de  $Z_k$  qui sont dans  $V(\bar{\mathbb{Q}})$  doit être négligeable, autrement dit,  $\lim_k \text{Card}(Z_k \cap V(\bar{\mathbb{Q}})) / \text{Card}(Z_k) = 0$ . La vérification de cette condition pour des ensembles formés de paramètres postcritiquement finis est une difficulté majeur de ce travail. Pour ce faire, nous utilisons des résultats de transversalité décrivant comment les hypersurfaces de paramètres où un point critique

est prépériodique s'intersectent dans  $\mathbb{C}^{d-1}$ . On utilise donc de façon essentielle la contribution importante d'Epstein comme exposée dans [Eps09, BufE09] et nous adaptons ces arguments à la situation étudiée.

Un autre ingrédient apparaît dans la preuve du théorème 2.6, à savoir, notre décompte des paramètres Misiuiewicz est basé sur la notion de *portrait critique* qui a été introduite par Fisher [Fis89] et sur les résultats de continuité combinatoire de Bielefeld, Fisher et Hubbard [BiFisH92] et de Kiwi [Kiw05].

Observons finalement que le théorème de Yuan donne également un résultat d'équidistribution aux places non-archimédiennes de  $\mathbb{Q}$  : pour tout nombre premier  $p >$ , on peut remplacer  $\mathbb{C}$  by la complétion  $\mathbb{C}_p$  de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$  dans les énoncés des théorèmes 2.6 et 2.7. Les mesure atomiques correspondantes  $\mu_k, \mu'_k$  sont alors supportées sur l'espace analytique de Berkovich accosé à  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}_p}^{d-1}$ , et elles convergent vers une même mesure de probabilité  $\mu_{\text{bif},p}$  au sens faible sur cet espace analytique.

L'approche développée ici repose d'une manière essentielle sur la compacité du support de la mesure de bifurcation dans  $\mathcal{P}_d$ . Nous allons voir dans la suite que cela permet en fait d'obtenir des vitesses de convergences dans le cas hyperbolique. Cette propriété n'est pas vraie dans l'espace des modules  $\mathcal{M}_d$  des fractions rationnelles de degré  $d$  et nous verrons comment surmonter cette difficulté également.

### 2.1.3 Équidistribution quantitative de paramètres hyperboliques

Dans la famille unicritique de degré  $d$  donnée par  $f_\lambda(z) = z^d + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , Favre et Rivera-Letelier [FavRL06] ont donné une version *quantitative* du résultat de Levin, en utilisant une méthode arithmétique. Ils montrent précisément que

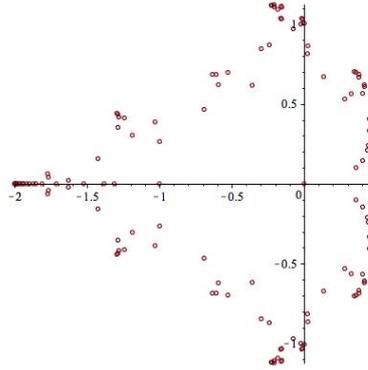
$$\left| \frac{1}{d^{n-1}} \sum_{f_\lambda^n(0)=0} \varphi(\lambda) - \int \varphi \mu_{M_d} \right| \leq C \left( \frac{n}{d^n} \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1},$$

pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{C})$  et tout entier  $n \geq 1$ , où  $\mu_{M_d}$  est la mesure harmonique de l'ensemble  $M_d = \{\lambda \in \mathbb{C}, J(f_\lambda) \text{ est connexe}\}$  de Multibrot de degré  $d$ . En utilisant des arguments de théorie du potentiel, en collaboration avec Gabriel Vigny, nous montrons une estimée  $\mathcal{C}^2$  :

**Théorème 2.9 ([GauV17b])** *Fixons  $d \geq 2$ . Il existe une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $d$  telle que pour toute  $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{C})$  et tout  $n \geq 1$ , on a*

$$\left| \frac{1}{d^{n-1}} \sum_{f_\lambda^n(0)=0} \varphi(\lambda) - \int \varphi \mu_{M_d} \right| \leq C \frac{n}{d^n} \|\varphi\|_{\mathcal{C}^2}.$$

Un argument classique d'interpolation redonne immédiatement le résultat de Favre et Rivera-Letelier et on obtient également une vitesse de convergence exponentielle en norme  $\mathcal{C}^1$  des mesures  $d^{-n+1}[\text{Per}_n(w)]$  vers  $\mu_{M_d}$ .

FIGURE 2.1 – Une simulation numérique des solutions de  $f_\lambda^8(0) = 0$ .

Il y a deux objectifs principaux à ce travail : d'abord, nous souhaitons donner une version quantitative des résultats obtenus dans [FavGau15] pour les paramètres hyperboliques. Ensuite, nous souhaitons donner une preuve plus simple (et reposant sur des arguments de nature plus dynamique qu'arithmétique) en utilisant des outils classiques de théorie du pluripotentiel complexe. Pour un entier  $n \geq 1$ , on note  $\sigma_1(n)$  la somme des diviseurs premiers de  $n$ , à savoir

$$\sigma_1(n) := \sum_{k|n} k.$$

Il est connu qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $n$  telle que  $\sigma_1(n) \leq Cn \log \log n$  pour tout  $n$ .

Le premier résultat que nous obtenons est le suivant.

**Théorème 2.10 ([GauV17b])** *Soit  $\underline{n} = (n_0, \dots, n_{d-2})$  un  $(d-1)$ -uplet d'entiers strictement positifs deux à deux distincts tels que  $n_0 \geq 2$  et soit  $\mu_{\underline{n}}$  la mesure de probabilité uniformément distribuée sur les paramètres  $(c, a) \in \mathbb{C}^{d-1}$  tels que le point critique  $c_i$  est périodique de période exacte  $n_i$  pour tout  $i$ .*

*Il existe une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $d$  telle que*

$$\left| \int \varphi \mu_{\underline{n}} - \int \varphi \mu_{\mathcal{C}_d} \right| \leq C \max_{1 \leq j \leq d-1} \left( \frac{\sigma(n_j)}{d^{n_j}} \right) \|\varphi\|_{\mathcal{C}^2},$$

pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{C}^{d-1})$ .

Le premier ingrédient de la preuve est une propriété dynamique très générale établie par Przytycki : si un point critique  $c$  d'une fraction rationnelle  $f$  n'est pas dans un bassin d'attraction de  $f$ , les points  $c$  et  $f^n(c)$  ne peuvent pas être trop proches (il s'agit de l'idée mentionnée au début du chapitre utilisée par Okuyama pour s'affranchir de l'hypothèse technique de Dujardin et Favre). Combiné à des propriétés globales de l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$ , cela nous permet d'avoir des estimations ponctuelles précises de  $|c_i - P_{c,a}^n(c_i)|$  en dehors de "mauvaises" composantes hyperboliques spécifiques. Le second ingrédient important est, comme dans le travail avec Favre, la transversalité des relations sur les orbites critiques. Le

dernier ingrédient de la démonstration est une estimée  $L^1$  pour des solutions particulières du Laplacien dans des disques topologiques bornés de courbes affines de  $\mathcal{P}_d$ , dont la preuve repose de façon cruciale sur des estimées de type aire-diamètre. Cela nous permet de remplacer une estimation mettant en jeu le *diamètre* des composante hyperboliques de  $\mathcal{C}_d$  par leur *volume*. Il s'agit d'une des clés de la démonstration puisque, même dans la famille quadratique, estimer précisément le diamètre des composantes hyperboliques est un problème extrêmement délicat qui est intimement lié à la Conjecture d'Hyperbolicité.

Comme dans [FavGau15], nous déduisons du théorème 2.10 un résultat concernant les paramètres possédant  $(d-1)$  cycles de période et multiplicateurs donnés. Afin d'être plus précis, pour tout  $(d-1)$ -uplet  $\underline{n} = (n_0, \dots, n_{d-2})$  d'entiers strictement positifs et tout  $\underline{w} := (w_1, \dots, w_{d-1}) \in \mathbb{C}^{d-1}$ , lorsque l'ensemble  $\text{Per}_{\underline{n}}(\underline{w}) := \bigcap_{i=1}^{d-1} \text{Per}(n_i, w_i)$  est fini, on pose

$$\mu_{\underline{n}, \underline{w}} := \frac{1}{(d-1)! \prod_j d_{n_j}} \bigwedge_{j=1}^{d-1} [\text{Per}(n_j, w_j)].$$

Il s'agit d'une mesure de probabilité et, quand  $\underline{w} \in \mathbb{D}^{d-1}$  et  $n_i \neq n_j$  pour tous  $i \neq j$ , la mesure  $\mu_{\underline{n}, \underline{w}}$  n'est autre que la mesure uniformément distribuée sur l'ensemble  $\text{Per}_{\underline{n}}(\underline{w})$  des paramètres  $(c, a) \in \mathbb{C}^{d-1}$  ayant  $(d-1)$  cycles de périodes exactes  $n_0, \dots, n_{d-2}$  et multiplicateurs  $w_0, \dots, w_{d-2}$  respectivement.

Nous montrons le résultat suivant.

**Théorème 2.11 ([GauV17b])** *Soient  $\underline{w} = (w_0, \dots, w_{d-2}) \in \mathbb{D}^{d-1}$ , et  $\underline{n} = (n_0, \dots, n_{d-2})$  un  $(d-1)$ -uplet d'entiers strictement positifs deux-à-deux distincts avec  $n_0 \geq 2$  et soit  $\mu_{\underline{n}, \underline{w}}$  comme définie ci-dessus. Il existe une constant  $C > 0$  ne dépendant que de  $d$  et telle que pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{C}^{d-1})$ , on ait*

$$\left| \int \varphi \mu_{\underline{n}, \underline{w}} - \int \varphi \mu_{\mathcal{C}_d} \right| \leq C \left( \max_{0 \leq j \leq d-2} \left\{ \frac{\sigma(n_j)}{d^{n_j}}, \frac{-1}{d^{n_j} \log |w_j|} \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1}.$$

Ce résultat quantitatif, combiné à des outils classiques de théorie du pluripotentiel complexe (voir par exemple [DeTV10] ou [DiSib10]), permet par exemple d'établir la convergence de mesures de la forme  $\mu_{\underline{n}, \underline{w}}$  vers  $\mu_{\mathcal{C}_d}$  pour tous les  $(d-1)$ -uplets de multiplicateurs  $(w_0, \dots, w_{d-2})$  étant en dehors d'un ensemble pluripolaire de  $\mathbb{C}^{d-1}$ , dès lors que les périodes  $n_i$  tendent toutes suffisamment vite vers l'infini.

Précisément, on montre

**Théorème 2.12 ([GauV17b])** *Choisissons une suite  $\underline{n}_k = (n_{1,k}, \dots, n_{d-1,k})$  de  $(d-1)$ -uplets d'entiers strictement positifs deux-à-deux distincts tels que la série  $\sum_k \max_j \{n_{j,k}^{-1}\}$  converge. Alors il existe une ensemble pluripolaire  $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}^{d-1}$  tel que pour tout  $\underline{w} \notin \mathcal{E}$ , l'ensemble  $\text{Per}_{\underline{n}_k}(\underline{w})$  est fini pour tout  $k$  et la suite de mesures de probabilités  $(\mu_{\underline{n}_k, \underline{w}})_k$  converge vers  $\mu_{\mathcal{C}_d}$  au sens faible des mesures lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .*

### 2.1.4 Continuité combinatoire et équidistribution

#### Dans l'espace des modules des polynômes

Encore en collaboration avec Gabriel Vigny, nous avons développé une approche combinatoire des problèmes de répartitions de certains paramètres Misiurewicz, qui est basée sur la notion d'*impression* des rayons externes paramétriques. Pour cela, nous imposons des conditions sur la combinatoire des angles (de type période et prépériodes fixés sous l'action de  $\theta \mapsto d\theta \pmod{d}$ ) qui aboutissent aux points critiques des paramètres étudiés au lieu d'imposer des conditions sur le paramètre lui-même, comme dans les travaux qui précèdent. En contrepartie, nous n'avons besoin d'imposer aucune contrainte supplémentaire sur les périodes et prépériodes des orbites critiques.

Notre premier résultat dans cette direction concerne l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$  des polynômes de degré  $d$ . Soit  $\mathbf{Cb}$  l'espace combinatoire des polynômes de degré  $d$ , comme défini par Kiwi [Kiw05]. L'espace  $\mathbf{Cb}$  est connu pour contenir un ouvert dense portant une structure de variété de translation de dimension réelle  $d - 1$  et, de ce fait, pour admettre une mesure de probabilité naturelle  $\mu_{\mathbf{Cb}}$ . Fixons deux  $(d - 1)$ -uplets  $\underline{n} = (n_0, \dots, n_{d-2})$  et  $\underline{m} = (m_0, \dots, m_{d-2})$  d'entiers positifs vérifiant  $m_i > n_i$ . On pose

$$\mathbf{C}(\underline{m}, \underline{n}) := \{(\Theta_0, \dots, \Theta_{d-2}) \in \mathbf{Cb}; \forall i, \exists \theta \in \Theta_i, d^{m_i} \theta = d^{n_i} \theta\}.$$

Quand  $m_i > n_i \geq 1$  pour tout  $i$ , on pose également

$$\mathbf{C}^*(\underline{m}, \underline{n}) := \mathbf{C}(\underline{m}, \underline{n}) \setminus \mathbf{C}(\underline{m} - \underline{n}, \underline{0}).$$

Une combinatoire  $\Theta \in \mathbf{C}^*(\underline{m}, \underline{n})$  est appelée *Misiurewicz*. Dujardin et Favre ont également construit une *application d'aboutissement*  $e : \mathbf{Cb} \rightarrow \mathcal{P}_d$  qui satisfait  $e_*(\mu_{\mathbf{Cb}}) = \mu_{\mathcal{E}_d}$ , où  $\mu_{\mathcal{E}_d}$  est encore la mesure de probabilité proportionnelle à  $\mu_{\text{bif}}$ . L'application d'aboutissement  $e$  envoie également les combinaisons Misiurewicz sur les paramètres Misiurewicz.

Le premier résultat obtenu grâce à cette approche est le suivant :

**Théorème 2.13 ([GauV19a])** *Soient  $(\underline{n}_k)_k$  et  $(\underline{m}_k)_k$  deux suites de  $(d - 1)$ -uplets d'entiers tels que  $m_{k,j} > n_{k,j} \geq 1$  et  $m_{k,j} \rightarrow \infty$  lorsque  $k \rightarrow \infty$  pour tout  $j$ . Soit  $X_k := e(\mathbf{C}^*(\underline{m}_k, \underline{n}_k))$  et soit  $\mu_k$  la mesure de probabilité*

$$\mu_k := \frac{1}{\text{Card}(\mathbf{C}^*(\underline{m}_k, \underline{n}_k))} \sum_{[P] \in X_k} \mathcal{N}_{\mathbf{Cb}}(P) \cdot \delta_{[P]},$$

où  $\mathcal{N}_{\mathbf{Cb}}(P) \geq 1$  est le nombre fini de combinaisons distinctes du polynôme  $P$ . Alors  $\mu_k$  converge vers  $\mu_{\mathcal{E}_d}$  quand  $k \rightarrow \infty$  au sens faible des mesures sur  $\mathcal{P}_d$ .

Nous développons plus en détails les arguments mis en place par Dujardin et Favre [DujFav08], en utilisant les résultats de Kiwi sur l'espace combinatoire des polynômes de degré  $d$ , ainsi que sur leurs propriétés d'aboutissement des rayons externes ([Kiw05, Kiw04]) et en utilisant les résultats de Przytycki et Rohde [PrzRho99] portant sur la rigidité des répulseurs Topologiquement Collet-Eckmann (noté TCE). On montre que

pour  $\mu_{\text{Cb}}$ -presque toute combinatoire  $\Theta$ , l'impression de  $\Theta$  est réduite à un singleton (en particulier, l'application  $e : \text{Cb} \rightarrow \mathcal{P}_d$  est  $\mu_{\text{Cb}}$ -presque sûrement continue). Ensuite, on montre que les mesures uniformément distribuées sur les ensembles  $\mathbb{C}^*(\underline{m}_k, \underline{n}_k)$  convergent vers  $\mu_{\text{Cb}}$  et que la convergence se pousse en avant par  $e$  dans notre cas.

**Remarque 2.1** Remarquons que le support de la mesure  $\mu_k$  est contenu dans un ensemble de classes de conjugaisons  $[P] \in \mathcal{P}_d$  telles que  $P^{n_{k,j}}(c_j) = P^{m_{k,j}}(c_j)$  et  $c_j$  n'est pas périodique et qu'il ne s'agit pas à proprement parler d'un résultat d'équidistribution, puisque les mesures  $\mu_k$  prennent en compte la *multiplicité combinatoire*  $\mathcal{N}_{\text{Cb}}(P)$  des paramètres Misiurewicz.

La même idée de démonstration permet de donner une condition suffisante pour que les classes de polynômes ayant  $(d-1)$  cycles paraboliques distincts s'équidistribuent selon la mesure  $\mu_{\mathcal{C}_d}$ .

### Dans la famille quadratique anti-holomorphe

Dans le même travail, nous avons également adapté les arguments combinatoires à l'étude de l'espace des paramètres des polynômes quadratiques anti-holomorphes, c'est-à-dire à la famille

$$f_c(z) := \bar{z}^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Le lieu de connexité  $\mathbf{M}_2^*$  de cette famille est le *Tricorne*. Comme observé par Inou et Mukeherjee [IMuk16], la mesure harmonique du Tricorne *n'est pas* un bon candidat pour détecter les phénomènes de bifurcation : il existe des arcs paraboliques réels analytiques stables dans la frontière  $\partial\mathbf{M}_2^*$  du Tricorne, qui sont une obstruction à la densité des paramètres PCF dans  $\partial\mathbf{M}_2^*$ .

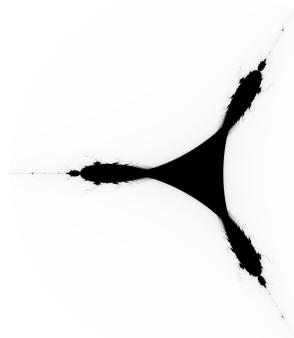


FIGURE 2.2 – Le Tricorne  $\mathbf{M}_2^*$ .

En développant notre approche de l'aboutissement des rayons externes, nous montrons le résultat suivant.

**Théorème 2.14** ([GauV19a]) *Presque tout rayon externe du Tricorne  $\mathbf{M}_2^*$  aboutit et, si  $\ell : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial\mathbf{M}_2^*$  est l'application d'aboutissement, alors  $\ell$  est mesurable et il existe un ensemble  $R \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  de mesure totale et tel que  $\ell|_R$  est continue.*

L'idée d'utiliser les rayons externes du Tricorne a été utilisée en premier par Nakane [Nak93] pour montrer la connexité du Tricorne. De nombreux auteurs ont poursuivi une étude précise des propriétés topologiques et combinatoires du Tricorne (on peut citer [HSch14] où il est établi que le Tricorne n'est pas connexe par arcs). Pour démontrer le théorème 2.14, on plonge la famille quadratique anti-holomorphe dans une famille (holomorphe) de polynôme de degré 4. On utilise alors les résultats de Kiwi sur l'espace des combinatoires en degré 4. Comme pour l'ensemble de Mandelbrot, on peut alors définir la *mesure de bifurcation*  $\mu_{\text{bif}}^*$  du Tricorne  $\mathbf{M}_2^*$  comme le poussé en avant  $\mu_{\text{bif}}^* := (\ell)_* (\lambda_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}})$ .

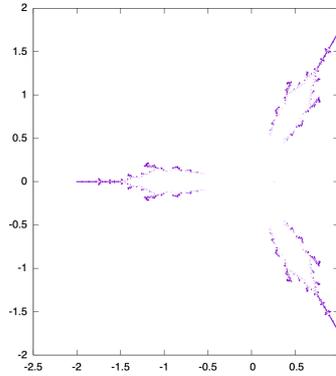


FIGURE 2.3 – Une simulation numérique du support de la mesure  $\mu_{\text{bif}}^*$ .

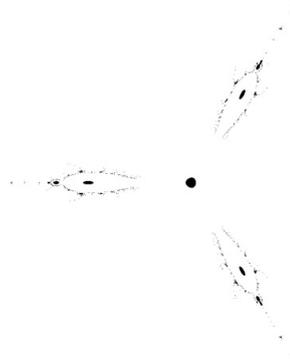


FIGURE 2.4 – Une simulation numérique des paramètres PCF.

Pour  $n > k > 0$ , on considère l'ensemble suivant des *paramètres Misiurewicz* :

$$\text{Per}^*(n, k) := \{c \in \mathbb{C}; f_c^n(0) = f_c^k(0) \text{ and } f_c^{n-k}(0) \neq 0\},$$

et de même, on considère l'ensemble suivant de *combinatoires Misiurewicz* :

$$\mathbf{C}^*(n, k) := \{\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}; (-2)^{n-1}\theta = (-2)^{k-1}\theta \text{ and } (-2)^{n-k}(\theta) \neq \theta\}.$$

On établit le résultat de convergence suivant.

**Théorème 2.15** ([GauV19a]) *Pour tous  $1 < k < n$ , l'ensemble  $\text{Per}^*(n, k)$  est fini et on a  $\ell(\mathbb{C}^*(n, k)) \subset \text{Per}^*(2n, 2k)$ . De plus, pour toute suite  $1 < k(n) < n$  d'entiers, les mesures*

$$\mu_n^* := \frac{1}{\text{Card}(\mathbb{C}^*(n, k(n)))} \sum_{c \in (\ell)_*(\mathbb{C}^*(n, k(n)))} \mathcal{N}_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(c) \cdot \delta_c,$$

où  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(c) := \text{Card}\{\theta \in \mathbb{C}^*(n, k(n)); \ell(\theta) = c\} \geq 1$ , convergent vers  $\mu_{\text{bif}}^*$  au sens faible des mesures sur  $\mathbb{C}$ .

Pour prouver ce théorème, nous relierons le caractère Misiurewicz de  $f_c$  au caractère Misiurewicz de  $f_c^2$  en tant que polynôme (holomorphe) de degré 4 et nous en déduisons que l'application  $\ell$  est alors également continue en toute combinatoire Misiurewicz. On conclut en procédant comme dans le cas de l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$  des polynômes de degré  $d$ .

### 2.1.5 Autres résultats de convergence

Encore dans un travail en commun avec Gabriel Vigny, nous avons voulu comprendre en quoi les préimages de la dérivée des itérées d'un polynôme se comportaient asymptotiquement comme les itérées du polynôme elles-mêmes. En d'autres termes, se distribuent-elles selon la mesure de Green de ce polynôme? Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on note  $\nu_n^\lambda$  la mesure de probabilité

$$\nu_n^\lambda := \frac{1}{d^n - 1} \sum_{(f^n)'(z)=\lambda} \delta_z,$$

où la somme est comptée avec multiplicités. Nous montrons le résultat suivant.

**Théorème 2.16** ([GauV17a]) *Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme de degré  $d \geq 2$  de mesure d'entropie maximale  $\mu_f$ . Il existe un ensemble polaire  $\mathcal{E}_f \subset \mathbb{C}^*$  tel que*

1. *Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}_f$ , les mesures  $\nu_n^\lambda$  convergent faiblement vers  $\mu_f$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,*
2. *Si  $f$  n'a pas de disque de Siegel et si  $J(f)$  est connexe, alors  $\mathcal{E}_f = \emptyset$ ,*
3. *Si  $f$  est hyperbolique, on a également  $\mathcal{E}_f = \emptyset$ .*

Commençons par quelques motivations quelques remarques :

- par la règle des dérivations composées, l'application  $(z, n) \mapsto (f^n)'(z)$  définit un cocycle, ce résultat répond donc à la question de la distribution des préimages d'une cible précise par un cocycle dans le cas le plus simple.
- plus généralement, on peut considérer les polynômes sur  $\mathbb{C}$  comme un cas modèle, la question posée pouvant l'être dans de nombreuses situations, comme par exemple les automorphismes de Hénon ou les transformations rationnelles en dimension plus grande.

- Le cas  $\lambda = 0$  n'est autre que l'équidistribution des préimages des points critiques dont il est connu que soit  $f$  est conjuguée à  $z^d$  par un automorphisme affine de  $\mathbb{C}$ , soit  $\nu_n^0 \rightarrow \mu_f$ . Par ailleurs, lorsque  $\deg(f) = 2$ , le résultat est vrai pour tout  $\lambda \neq 0$  dès que  $f$  n'a pas de disque de Siegel.
- Le théorème 2.16 peut être partiellement généralisé au cas des fractions rationnelles de  $\mathbb{P}^1$ . Néanmoins, l'énoncé du théorème 2.16 est invariant par conjugaison affine, alors qu'il n'est pas invariant par conjugaison par des transformations de Möbius, donc nous avons choisi de nous restreindre au cas des polynômes.

La preuve du premier point se déduit de la proposition intéressante suivante :

**Proposition 2.17 ([GauV17a])** *Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme de degré  $d \geq 2$  et soit  $\nu$  une mesure PB sur  $\mathbb{P}^1$ , alors on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n - 1} ((f^n)')^* (\nu) = \mu_f$$

Rappelons qu'une mesure positive  $\nu$  est dite PB (ou à potentiel borné) sur  $\mathbb{P}^1$  s'il existe une fonction bornée  $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\nu = \nu(\mathbb{P}^1) \cdot \omega_{\mathbb{P}^1} + dd^c \varphi$ . L'idée de la preuve du premier point du théorème est d'étudier l'application tangente

$$F : (z, u) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (f(z), f'(z) \cdot u) \in \mathbb{C}^2.$$

On montre que le courant de Green  $T_F$  de  $F$  est en fait  $\pi_1^*(\mu_f)$ , si  $\pi_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  est la projection sur la première coordonnée et que l'on a

$$\frac{1}{d^n - 1} (F^n)^* [u = 1] \rightarrow T_F$$

au sens des courants. On en déduit alors que, pour  $\lambda$  en dehors d'un ensemble polaire, l'intersection  $(d^n - 1)^{-1} (F^n)^* [u = 1] \wedge [u = \lambda]$  converge vers  $\pi_1^*(\mu_f) \wedge [u = \lambda]$  en utilisant la proposition 2.17. Les deux autres points se montrent en utilisant les approches classiques de Borlin et Lyubich mais semblent pouvoir se généraliser au-delà des cas étudiés uniquement dans des situations très spécifiques.

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons sur des phénomènes paramétriques dans l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$  des polynômes de degré  $d \geq 3$ . Pour cela, nous utilisons la paramétrisation donnée en  $(\star)$ . Comme dans le cas précédent, on obtient :

**Théorème 2.18 ([GauV17a])** *Fixons un entier  $0 \leq i \leq d - 2$ . Alors les résultats de convergence suivants ont lieu au sens des courants sur  $\mathbb{C}^{d-1}$  :*

1. pour toute mesure de probabilité  $\nu$  à potentiel borné sur  $\mathbb{C}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \int_{\mathbb{C}} \left[ \{(c, a) \in \mathbb{C}^{d-1} : (P_{c,a}^n)'(P_{c,a}(c_i)) = \lambda\} \right] d\nu(\lambda) = T_{\hat{P}, c_i},$$

2. il existe un ensemble polaire  $\mathcal{E}_i \subset \mathbb{C}^*$  tel que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}_i$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \left[ \{(c, a) \in \mathbb{C}^{d-1} : (P_{c,a}^n)'(P_{c,a}(c_i)) = \lambda\} \right] = T_{\hat{P}, c_i}.$$

Enfin, dans la famille quadratique  $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on peut montrer facilement un résultat plus fort qui implique, en particulier, que l'ensemble exceptionnel est vide, ce qui signifie que pour tout  $w \in \mathbb{C}$ , la suite de mesures de probabilités  $\frac{1}{2^n}[(f_\lambda^n)'(\lambda) = w]$  converge vers la mesure harmonique de l'ensemble de Mandelbrot.

## 2.2 Dans les familles de fractions rationnelles

### 2.2.1 Approximation quantitative de l'exposant de Lyapunov

Dans les familles de polynômes, on a vu que l'utilisation systématique de la dynamique critique permettait de mettre en lumière des phénomènes d'équidistribution riches. Cependant, on utilise à chaque fois une description très précise du lieu d'accumulation des supports des courants  $T_{\text{bif}}^{\wedge k}$  lorsqu'on approche du bord de l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$ . Dans les familles de fractions rationnelles, on ne peut pas avoir une telle bonne description. On va donc plutôt, en général, utiliser l'exposant de Lyapunov. Nous reprenons donc cette fois la stratégie de Bassanelli et Berteloot et non plus celle de Dujardin et Favre.

#### Une formule d'approximation "régularisée"

Dans leurs travaux, Bassanelli et Berteloot utilisent la formule d'approximation

$$L(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nd^n} \sum_{z \in R_n(f)} \log |(f^n)'(z)|$$

où  $R_n(f)$  désigne l'ensemble des points périodiques répulsifs de période exacte  $n$  de  $f$ . Okuyama [Oku15] a donné une version quantitative de cette approximation (avec un terme d'erreur en  $\sigma_1(n)d^{-n}$ ); cependant le résultat obtenu n'est pas parfaitement satisfaisant, puisque le terme d'erreur dépend de façon extrêmement singulière de la fraction rationnelle  $f$ . En particulier, il ne permet pas de préciser le résultat de convergence de Bassanelli et Berteloot.

En collaboration avec Yûsuke Okuyama et Gabriel Vigny, nous nous sommes efforcés de gommer cette irrégularité, quitte à perdre un petit peu en vitesse de convergence et nous en avons déduit un certain nombre de conséquences. Fixons  $d \geq 2$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $\sigma_2(n) := \sum_{k|n} k^2$  et on définit par récurrence  $d_n$  par

$$d_1 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k|n} d_k = d^n + 1.$$

Notre premier résultat est le suivant :

**Théorème 2.19 ([GauOkuV19])** *Il existe une constante  $A \geq 1$  ne dépendant que de  $d$  et une fonction continue  $C : \mathcal{M}_d \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que pour toute fraction rationnelle  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  de degré  $d$ , tout  $r \in ]0, 1]$  et tout entier  $n \geq 1$ , on ait*

$$\left| \frac{1}{d_n} \int_0^{2\pi} \log |p_n(f, r e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} - L(f) \right| \leq A \cdot (C([f]) - \log r) \frac{\sigma_2(n)}{d^n}.$$

Puisqu'on peut écrire  $p_n(f, w) = \prod_{z \in R_n(f)} ((f^n)'(z) - w)$ , ce résultat est bien une "régularisation" de celui de Basanelli et Berteloot et de celui d'Okuyama. Le terme en  $\sigma_2(n)$  provient de cette "régularisation". On montre également que la fonction  $C$  a un bon comportement au bord de l'espace des modules, au sens où elle explose logarithmiquement. Cela joue un rôle crucial dans les conséquences que nous tirons de cette formule quantitative d'approximation.

La démonstration du théorème 2.19 repose d'abord sur des arguments de théorie du potentiel sur  $\mathbb{P}^1$  qui permettent de relier le multiplicateur d'un point  $n$ -périodique de  $f$  à la distance entre son orbite et l'ensemble critique de  $f$ . En faisant la moyenne sur les points  $n$ -périodique, on obtient un contrôle de  $d_n^{-1} \int_0^{2\pi} \log |p_n(f, re^{i\theta})| d\theta / 2\pi - L(f)$  par la moyenne des différences entre  $\log d_{\mathbb{P}^1}(c, f^n(c))$  pour  $c \in \text{Crit}(f)$  et les logarithmes des multiplicateurs plus petit que  $r$  en module. En réutilisant l'estimation de Przytycki sur  $d_{\mathbb{P}^1}(c, f^n(c))$  lorsque  $c$  n'est pas dans un bassin d'attraction et l'inégalité de Fatou-Shishikura, on obtient le résultat attendu.

### Conséquences : équidistribution et comptage des composantes hyperboliques

Notre principale application de la formule d'approximation ci-dessus est un résultat d'équidistribution en toute codimension dans toute famille algébrique de fractions rationnelles. Si  $\hat{f}$  est une famille de fractions rationnelles de degré  $d$  paramétrée par une variété complexe  $\Lambda$ , pour tout entier  $1 \leq p \leq \min\{\dim \Lambda, 2d - 2\}$ , tout  $p$ -uplet d'entiers strictement positif  $\underline{n} := (n_1, \dots, n_p)$ , tout  $p$ -uplet  $\underline{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_p) \in ]0, 1]^p$ , on pose

$$T_{\underline{n}}^p(\underline{\rho}) := \frac{1}{\prod_i d_{n_i}} \int_{[0, 2\pi]^p} \bigwedge_{j=1}^p [\text{Per}_{n_j}(\rho_j e^{i\theta_j})] \frac{d\theta_1 \cdots d\theta_p}{(2\pi)^p}.$$

Rappelons qu'une forme  $\Psi$  sur  $\Lambda$  est DSH si on peut écrire  $dd^c \Psi = T_+ - T_-$  avec  $T_{\pm}$  positif fermé ayant une masse finie sur  $\Lambda$ , c'est-à-dire que si  $\omega_{\Lambda}$  est une forme Kählérienne sur  $\Lambda$ , alors la mesure  $T_{\pm} \wedge \omega_{\Lambda}^{\ell} < +\infty$  si  $T_{\pm}$  est de bidimension  $\ell$ . La semi-norme DSH  $\|\cdot\|_{\text{DSH}}^*$  est définie comme

$$\|\Psi\|_{\text{DSH}}^* := \inf (\|T_+\| + \|T_-\|)$$

et l'inf est pris sur les décompositions possibles  $dd^c \Psi = T_+ - T_-$ . Une application directe de la formule d'approximation donne :

**Théorème 2.20 ([GauOkuV19])** *Soit  $\Lambda$  une variété quasi-projective qui est soit une sous-variété de  $\mathcal{M}_d$ , soit l'espace des paramètres d'une famille algébrique de fractions rationnelles de degré  $d$ . Alors pour tout compact  $K \Subset \Lambda$ , il existe une constante  $C(K) > 0$  telle que pour tout entier  $1 \leq p \leq \min\{\dim \Lambda, 2d - 2\}$ , tout  $p$ -uplet d'entiers strictement positifs  $\underline{n} := (n_1, \dots, n_p)$ , tout  $p$ -uplet  $\underline{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_p) \in ]0, 1]^p$  et toute forme DSH continue  $\Psi$  de bidegré  $(\dim \Lambda - p, \dim \Lambda - p)$  à support dans  $K$ , on a*

$$\left| \langle T_{\underline{n}}^p(\underline{\rho}) - T_{\text{bif}}^{\wedge p} \rangle \right| \leq C(K) \cdot \max_{1 \leq j \leq p} \left( (1 - \log \rho_j) \frac{\sigma_2(n_j)}{d^{n_j}} \right) \cdot \|\Psi\|_{\text{DSH}}^* .$$

Mentionnons que, comme dans le cas de l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$ , on obtient la distribution des paramètres possédant des cycles de multiplicateurs donnés en dehors d'un ensemble pluripolaire :

**Corollaire 2.21** ([GauOkuV19]) *Sous les hypothèses du théorème 2.20, pour tout entier  $1 \leq p \leq \min\{\dim \Lambda, 2d - 2\}$ , toute suite de  $p$ -uplets d'entiers strictement positifs  $\underline{n}_k := (n_{1,k}, \dots, n_{p,k})$  telle que  $\sum_k \max_j \{n_{j,k}^{-1}\} < +\infty$ , il existe un ensemble pluripolaire  $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}^p$  tel que pour tout  $\underline{w} = (w_1, \dots, w_p) \in \mathbb{C}^p \setminus \mathcal{E}$ , l'ensemble  $\bigcap_j \text{Per}_{n_{j,k}}(w_j)$  est une sous-variété algébrique de codimension pure  $p$  pour tout  $k$  et, quand  $k \rightarrow +\infty$ ,*

$$\frac{1}{\prod_j d_{n_{j,k}}} \bigwedge_{j=1}^p [\text{Per}_{n_{j,k}}(w_j)] \longrightarrow T_{\text{bif}}^{\wedge p}.$$

Venons-en au cas des mesures équidistribuées sur des paramètres hyperboliques possédant  $(2d - 2)$ -cycles de multiplicateurs et périodes donnés. Pour tout  $(2d - 2)$ -uplet d'entiers  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_{2d-2})$  et tout  $\underline{w} = (w_1, \dots, w_{2d-2}) \in \mathbb{D}^{2d-2}$ , on note  $\text{Stab}(\underline{n})$  (resp.  $\text{Stab}(\underline{n}, \underline{w})$ ) l'ensemble des permutations de  $\{1, 2, \dots, 2d - 2\}$  qui ne changent pas le  $(2d - 2)$ -uplet ordonné  $(n_1, \dots, n_{2d-2})$  (resp. le  $(2d - 2)$ -uplet de  $((n_1, w_1), \dots, (n_{2d-2}, w_{2d-2}))$ ). On voit facilement que  $1 \leq \text{Card}(\text{Stab}(\underline{n}, \underline{w})) \leq \text{Card}(\text{Stab}(\underline{n})) \leq (2d - 2)!$ .

En utilisant encore les résultats de transversalité d'Epstein et le fait que les fonctions  $\mathcal{C}^2$  à support compact sont DSH, on peut déduire du théorème 2.20 ce qui suit.

**Théorème 2.22** ([GauOkuV19]) *Soient  $\underline{n} := (n_1, \dots, n_{2d-2})$ , où  $n_i \geq 1$  est entier pour tout  $i$  et  $\underline{w} := (w_1, \dots, w_{2d-2}) \in \mathbb{D}^{2d-2}$ . On note  $X_{\underline{n}, \underline{w}}$  l'ensemble fini des paramètres  $[f] \in \mathcal{M}_d$  pour lesquels  $f$  possède  $2d - 2$  cycles attractifs distincts de multiplicateurs  $w_i$  et périodes  $n_i$  respectivement et*

$$\mu_{\underline{n}, \underline{w}} := \frac{\text{Card}(\text{Stab}(\underline{n}, \underline{w}))}{\prod_i d_{n_i}} \sum_{[f] \in X_{\underline{n}, \underline{w}}} \delta_{[f]}.$$

Alors pour tout compact  $K \Subset \mathcal{M}_d$  il existe  $C_K > 0$  ne dépendant que de  $K$  et  $d$  telle que

1. pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  à support contenu dans  $K$ ,

$$\left| \langle \mu_{\underline{n}, \underline{0}} - \mu_{\text{bif}}, \varphi \rangle \right| \leq C_K \cdot \max_{1 \leq i \leq 2d-2} \left( \frac{\sigma_2(n_i)}{d^{n_i}} \right) \|\varphi\|_{\mathcal{C}^2},$$

2. pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  à support contenu dans  $K$ ,

$$\left| \langle \mu_{\underline{n}, \underline{w}} - \mu_{\text{bif}}, \varphi \rangle \right| \leq C_K \cdot \max_{1 \leq i \leq 2d-2} \left( \frac{-1}{d^{n_i} \log |w_i|}, \frac{\sigma_2(n_i)}{d^{n_i}} \right) \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1}.$$

Remarquons que notre stratégie nous permet de donner un équivalent du nombre de composantes hyperboliques dans lesquelles les fractions rationnelles possèdent  $(2d - 2)$  cycles attractifs distincts dans  $\mathcal{M}_d$  en tout degré  $d$ . Jusqu'à présent, seul le cas  $d = 2$

était traité, par des méthodes fondamentalement différentes, qui utilisent les comptage des limites de renormalisation (voir [KiwRee13]). Notons que la stratégie mise en place par Kiwi et Rees ne peut être généralisée au cas  $d > 2$  et que,  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_{2d-2})$  étant donné, il n'est même pas clair à priori qu'il existe une composante hyperbolique de  $\mathcal{M}_d$  dans laquelle les fractions rationnelles possédant  $(2d - 2)$  cycles attractifs distincts de périodes respectives  $n_1, \dots, n_{2d-2}$ .

Pour  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_{2d-2})$ , on note  $N_d(\underline{n})$  le nombre de composantes hyperboliques de  $\mathcal{M}_d$  dans lesquelles tout paramètre possède  $2d - 2$  cycles attractifs distincts de périodes respectives  $n_1, \dots, n_{2d-2}$ , i.e. le nombre de composantes de type disjoint. On donne ici un asymptotique sur  $N_d(\underline{n})$  qui met en jeu la masse de la mesure de bifurcation.

Notre résultat est le suivant

**Théorème 2.23** ([GauOkuV19]) *Pour tout  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_{2d-2})$ , on a*

$$N_d(\underline{n}) \cdot \frac{\text{Card}(\text{Stab}(\underline{n}))}{d^{n_1 + \dots + n_{2d-2}}} = \int_{\mathcal{M}_d} \mu_{\text{bif}} + O\left(\max_{1 \leq i \leq 2d-2} \left(\frac{\sigma_2(n_i)}{d^{n_i}}\right)\right).$$

Ce résultat repose de façon cruciale sur le fait que le terme d'erreur obtenu au théorème 2.20 ne fait intervenir que la semi-norme DSH et sur le contrôle logarithmique de la dégénérescence de la fonction  $C$  obtenue dans le théorème 2.19.

Une application facile de ce résultat et du comptage combinatoire de Kiwi et Rees est un calcul explicite de la masse de la mesure de bifurcation dans le cas  $d = 2$  :

**Corollaire 2.24** ([GauOkuV19]) *La mesure de bifurcation  $\mu_{\text{bif}}$  de  $\mathcal{M}_2$  a pour masse*

$$\int_{\mathcal{M}_2} \mu_{\text{bif}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{(2^n - 1)^2},$$

où  $\phi$  est la fonction d'Euler.

## 2.2.2 Distribution des valeurs dans les espaces de paramètres

Dans cette dernière section, je souhaite mentionner un dernier résultat obtenu en collaboration avec Gabriel Vigny. Considérons une famille holomorphe  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  de fractions rationnelles de degré  $d \geq 2$  de dimension  $\dim(\Lambda) = m$ . Soit  $\omega_\Lambda$  une forme de Kähler sur  $\Lambda$ . Supposons que  $a_1, \dots, a_k : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$  sont des points marqués de courants de bifurcation respectifs  $T_1, \dots, T_k$ .

Pour tout  $1 \leq j \leq k$ , on définit une application holomorphe  $a_n^j : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$  en posant  $a_n^j(\lambda) = f_\lambda^n(a_j(\lambda))$  et on note  $\mathbf{a}_n := (a_n^1, \dots, a_n^k) : \Lambda \rightarrow (\mathbb{P}^1)^k$ . Dujardin [Duj13, Theorem 0.3] prouve l'existence d'un ensemble pluripolaire  $\mathcal{E} \subset (\mathbb{P}^1)^k$  tel que, pour tout  $(z_1, \dots, z_k) \in (\mathbb{P}^1)^k \setminus \mathcal{E}$ , on ait

$$\frac{1}{d^{nk}} [\{f_\lambda^n(a_1(\lambda)) = z_1\} \cap \dots \cap \{f_\lambda^n(a_k(\lambda)) = z_k\}] \rightarrow T_1 \wedge \dots \wedge T_k.$$

Le théorème de Dujardin est uniquement formulé pour les points *critiques* marqués mais il n'est utilisé à aucun moment que les  $a_i$  sont critiques. Par ailleurs son résultat se reformule :

$$\frac{1}{d^{nk}}(\mathbf{a}_n)^*(\delta_{(z_1, \dots, z_k)}) = \frac{1}{d^{nk}}(a_n^1)^*(\delta_{z_1}) \wedge \dots \wedge (a_n^k)^*(\delta_{z_k}) \rightarrow T_1 \wedge \dots \wedge T_k.$$

Nous montrons la version quantitative suivante :

**Théorème 2.25** ([GauV17b]) *Supposons que la famille  $\hat{f}$  est algébrique et soit  $m$  la dimension de la variété quasi-projective  $\Lambda$ . Soit  $K \Subset \Lambda$  un compact. Alors*

1. *Pour toute mesure de probabilité PB  $\nu$  sur  $(\mathbb{P}^1)^k$ , il existe  $C(K) > 0$  telle que pour toute forme  $\mathcal{C}^2$  test  $\varphi$  de bidegré  $(m-k, m-k)$  à support dans  $K$  et tout  $n \geq 1$ , on a*

$$\left| \left\langle \frac{1}{d^{nk}}(\mathbf{a}_n)^*(\nu) - T_1 \wedge \dots \wedge T_k, \varphi \right\rangle \right| \leq C(K) \frac{1}{d^n} \|\varphi\|_{\mathcal{C}^2(K)}.$$

2. *Soit  $(\alpha_n)_n$  une suite de nombres positifs telle que  $\sum_n \alpha_n < \infty$ . Alors il existe un ensemble pluripolaire  $\mathcal{E} \subset (\mathbb{P}^1)^k$  tel que pour tout  $(z_1, \dots, z_k) \in (\mathbb{P}^1)^k \setminus \mathcal{E}$ , il existe une constante  $C(K) > 0$  telle que pour toute forme  $\mathcal{C}^2$  test  $\varphi$  de bidegré  $(m-k, m-k)$  supportée dans  $K$  et tout  $n \geq 1$ , on a*

$$\left| \left\langle \frac{1}{d^{nk}}(\mathbf{a}_n)^*(\delta_{(z_1, \dots, z_k)}) - T_1 \wedge \dots \wedge T_k, \varphi \right\rangle \right| \leq C(K) \frac{1}{\alpha_n d^n} \|\varphi\|_{\mathcal{C}^2(K)}.$$

La preuve est assez courte et repose sur des arguments de théorie du pluripotential complexe développés par Dinh et Sibony, notamment les super-potentiels [DiSib09].

**Exemple 2.2** Revenons finalement à la famille quadratique  $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  et au point marqué  $a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  constant  $a(\lambda) \equiv 0$ . Alors en adaptant la preuve de Levin, si on pose  $a_n(\lambda) := f_\lambda^n(a(\lambda))$ , on trouve que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , la suite  $(d^{-n}a_n^*(\delta_z))_n$  converge vers  $\mu_M$ . Autrement dit, l'ensemble exceptionnel n'est autre que  $\mathcal{E} = \{\infty\}$ .

## 2.3 Perspectives

Etant donné l'avancement important des résultats de distribution paramétrique dans les familles d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^1$ , il est naturel de s'intéresser dorénavant à des questions similaires dans les familles d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^k$ ,  $k \geq 2$ . Les phénomènes de bifurcations supérieures en dynamique sur  $\mathbb{P}^1$  proviennent de bifurcations "indépendantes" simultanées de plusieurs points critiques. En dynamique sur  $\mathbb{P}^k$ , le phénomène mis en lumière par [BerBDu14] est beaucoup plus compliqué. Les deux différences fondamentales avec les phénomènes de bifurcation en dynamique sur  $\mathbb{P}^1$  résident dans le fait que l'ensemble critique est une *hypersurface* et que les points périodiques ont *plusieurs* valeurs propres.

Un problème qui me semble intéressant est le problème de la distribution des paramètres possédant un cycle de période donnée et pour lequel la différentielle possède un déterminant donné : fixant  $n \geq 1$  et  $w \in \mathbb{C}$ , on pose

$$\text{Per}_n(w) := \{\lambda; f_\lambda \text{ possède un cycle de période } n \text{ et tel que } \det(D_z(f_\lambda^n)) = w\}.$$

Dans les espaces de paramètres d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^1$ , il est soit connu, soit conjecturé que  $d^{-n}[\text{Per}_n(w)]$  converge faiblement vers  $dd^c L$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Problème 2.1** *Montrer que  $d^{-n}[\text{Per}_n(w)]$  converge au sens faible des courants vers le courant de bifurcation introduit par Berteloot, Bianchi et Dupont :  $T_{\text{bif}} = dd^c L$ , où*

$$L(f_\lambda) = \int_{\mathbb{P}^k} \log |\det(Df_\lambda)| d\mu_{f_\lambda}.$$

Un résultat semblable est connu pour les familles de produits fibrés par le travail d'Astorg et Bianchi [AstB18] pour  $|w| < 1$ . Un exemple des difficultés à surmonter est l'absence d'inégalité de Fatou-Shishikura qui borne le nombre de cycles non-répulsifs (c'est même faux, d'après un résultat de Buzzard [Buz97]).

Une autre question qui m'intéresse est de savoir s'il est possible de mettre en lumière de façon systématique des phénomènes de bifurcation propres à la dimension supérieure ?

Dans un travail en cours, Astorg et Bianchi établissent, par exemple, que dans une famille algébrique de produits fibrés polynomiaux

$$\hat{f} : (\lambda, z, w) \in \Lambda \times \mathbb{C}^2 \mapsto (\lambda, p(z), q_\lambda(z, w)) \in \Lambda \times \mathbb{C}^2,$$

sous une hypothèse assez générale sur  $p \in \mathbb{C}[z]$  et sur la famille, les supports des courants de bifurcations coïncident tous :  $\text{supp}(T_{\text{bif}}^{\wedge k}) = \text{supp}(T_{\text{bif}})$  pour tout  $1 \leq k \leq \dim \Lambda$ . Il s'agit d'un exemple de phénomène typique de la dimension supérieure.

Les phénomènes que j'ai à l'esprit sont plutôt de nature à faire intervenir *plusieurs* directions dynamiques. Je vais illustrer par un exemple de problème la piste que je privilégie dans cette direction. Dans une famille  $f_\lambda(z, w) = (p_\lambda(z), q_\lambda(z, w))$  de produits fibrés polynomiaux, le courant de bifurcation se décompose

$$dd^c L(f_\lambda) = dd^c L(p_\lambda) + dd^c L_v(f_\lambda)$$

où  $L_v(f_\lambda)$  est l'exposant de Lyapunov de  $f_\lambda$  dans la direction verticale. On a alors

$$T_{\text{bif}}^{\wedge 2} = (dd^c L)^2 = (dd^c L(p_\lambda))^2 + 2dd^c L(p_\lambda) \wedge dd^c L_v(f_\lambda) + (dd^c L_v(f_\lambda))^2.$$

On pose  $T_{\text{Sbif}} := dd^c L(p_\lambda) \wedge dd^c L_v(f_\lambda)$ . Il s'agit d'un courant qui détecte seulement une partie des bifurcations. Philosophiquement, celui-ci va détecter des bifurcations *simultanées* des 2 multiplicateurs d'un même cycle.

**Problème 2.2** *Déterminer le lien entre le support de  $T_{\text{Sbif}}$  et le lieu de bifurcation.*

L'étude d'un tel courant sera d'autant plus intéressant qu'il décrira la distribution de paramètres possédant des propriétés dynamiques particulières. A titre d'exemple, dans la famille  $f_\lambda(z, w) = (z^2 + \lambda_1, z^2 + w^2 + \lambda_2)$  avec  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ , on peut montrer que

$$T_{\text{Sbif}} = (dd^c G_{f_\lambda}(0))^2,$$

où  $G_{f_\lambda}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-k} \log^+ \|f_\lambda^n(z)\|$  est la fonction de Green pluri-complexe du Julia rempli de  $f_\lambda$  et 0 est l'unique point d'intersection des deux composantes irréductibles de  $\text{Crit}(f_\lambda)$  (une sorte de point "super-critique").

- Problème 2.3** 1. Montrer que la suite de mesures finies  $\mu_n := \left( dd^c \frac{1}{2^n} \log \|f_\lambda^n(0)\| \right)^2$  converge vers  $T_{\text{Sbif}}$  et donner une vitesse de convergence.
2. Si  $\nu_n$  est la mesure équirépartie sur les paramètres possédant un cycle de période  $n$  dont les 2 multiplicateurs sont fixés égaux à  $w_1, w_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ , montrer que  $\nu_n$  converge vers  $T_{\text{Sbif}}$  et donner une vitesse de convergence.

Certaines difficultés majeures apparaissent cependant. La première étant la suivante : les paramètres en question sont définis comme intersection d'hypersurfaces algébriques complexes. La méthode envisagée nécessite de savoir montrer que ces intersections sont lisses et transverses. Une idée nouvelle est nécessaire pour surmonter cette difficulté.

Finalement, on peut s'intéresser au problème suivant :

**Problème 2.4** Prouver qu'une formule semblable a lieu dans toute famille d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^2$  et donner une caractérisation dynamique du support de  $T_{\text{Sbif}}$  et de ses auto-intersections successives.

La caractérisation à laquelle je pense est double : d'abord, on peut essayer de prouver que le support de  $T_{\text{Sbif}}$  est l'adhérence des paramètres pour lesquels un point "super-critique" est Misiurewicz, i.e. préperiodique répulsif de façon non-persistante. Remarquons qu'il faut commencer par donner un sens au terme super-critique. On peut également espérer prouver qu'il s'agit de l'adhérence des paramètres admettant un cycle dont toutes les valeurs propres sont neutres.

Dans le cas de l'exemple simple mentionné ci-dessus, les premières observations suggèrent que le support de  $T_{\text{Sbif}}$  est strictement contenu dans le lieu de bifurcation. On peut espérer le décrire plus précisément, au moins dans ce cas-là.

# Chapitre 3

---

## Phénomènes de rigidité paramétrique

### 3.1 Rigidité des lieux et mesures de bifurcation

Les résultats de rigidité sont nombreux en dynamique holomorphe. Un des résultats de rigidité les plus célèbres a été obtenu par Zdunik [Zdu90] et peut se formuler comme suit. La mesure d'entropie maximale  $\mu_f$  d'une fraction rationnelle  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  de degré  $d$  est toujours singulière par rapport à la mesure de Hausdorff de dimension  $\dim_H(J(f))$ , à l'exception des cas où  $f$  est conjuguée par une transformation de Möbius à

1. une application monomial  $z \mapsto z^{\pm d}$ . Dans ce cas-là,  $J(f)$  est un cercle  $C$  et  $\mu_f$  est la mesure de Lebesgue (normalisée).
2. un polynôme de Chebyshev  $\pm T_d$ , où  $T_d$  est défini par  $T_d(z + z^{-1}) = z^d + z^{-d}$ . Dans ce cas,  $J(f)$  est l'image par une transformation de Möbius de  $[-2, 2]$  et  $\mu_f$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle sur  $J(f)$ .
3. un exemple de Lattès, c'est-à-dire qu'il existe une courbe elliptique  $E$ , une isogénie  $L : E \rightarrow E$  et un revêtement ramifié fini  $\Theta : E \rightarrow \mathbb{P}^1$  tel que  $f \circ \Theta = \Theta \circ L$  et  $\mu_f$  est absolument continue par rapport à  $\omega_{\mathbb{P}^1}$ .

**Définition 3.1** *On dit qu'une fraction rationnelle est intégrable si elle est conjuguée à un monôme, un polynôme de Chebyshev ou un exemple de Lattès.*

On peut également citer un résultat de Fatou [Fat20] qui affirme que les polynômes de Chebyshev et les monômes sont les seuls polynômes (à conjugaison près) à avoir un ensemble de Julia lisse.

Etant donnée une *paire dynamique*  $(\hat{f}, a)$ , c'est-à-dire une famille  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  de fractions rationnelles de degré  $d$  et un point marqué  $a : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ , j'ai établi certaines généralisations de ces résultats de Fatou et Zdunik. Avant d'exposer mes résultats, je souhaite rappeler la définition de famille (et de paire) isotriviale.

**Définition 3.2** Une famille algébrique  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  de fractions rationnelles de degré  $d$  est dite isotriviale s'il existe un revêtement ramifié fini  $\rho : \Lambda' \rightarrow \Lambda$  et une famille  $\phi : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  de transformations de Möbius telle que  $f := \phi_\lambda \circ f_\lambda \circ \phi_\lambda^{-1}$  est indépendante du paramètre  $\lambda$ .

On dit qu'une paire dynamique  $(\hat{f}, a)$  est isotriviale si  $\hat{f}$  est isotriviale et si on peut trouver  $\phi$  telle que  $\phi_\lambda(a(\lambda))$  est également indépendant du paramètre  $\lambda$ .

Remarquons que  $\hat{f}$  est isotriviale si et seulement si, pour tous  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ , il existe  $\phi \in PGL_2(\mathbb{C})$  telle que  $\phi \circ f_\lambda = f_{\lambda'} \circ \phi$  sur  $\mathbb{P}^1$ .

### 3.1.1 Rigidité de lieux de bifurcation en dimension 1

Considérons d'abord une famille  $\hat{P} : \Lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \Lambda \times \mathbb{C}$  de polynômes paramétrée par une variété quasi-projective  $\Lambda$ , munie d'une fonction régulière  $a : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ . On dira alors que la paire dynamique  $(\hat{P}, a)$  est *polynomiale*. Son lieu de bifurcation n'est autre que

$$\text{Bif}(\hat{P}, a) := \text{supp}(T_{\hat{f}, a}).$$

On dit qu'une pair dynamique polynomiale  $(\hat{P}, a)$  paramétrée par le disque unité est une *famille réelle* si  $a$  est une série entière à coefficients réels sur  $\mathbb{D}$  et

$$P_t(z) = \sum_{i=0}^d a_i(t)z^i, \quad (t, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C},$$

où les  $a_i$  sont des séries entières à coefficients réels sur  $\mathbb{D}$ .

En collaboration avec Charles Favre, nous obtenons l'analogie paramétrique suivant du théorème de Fatou :

**Théorème 3.1 ([FavGau20])** Soit  $(\hat{P}, a)$  une paire dynamique polynomiale de degré  $d \geq 2$  paramétrée par une surface de Riemann connexe de type fini  $C$ . Supposons que  $\text{Bif}(\hat{P}, a)$  est non-vide et contenu dans une courbe réelle lisse. Alors l'une des situations suivantes arrive :

- soit  $P_\lambda$  est intégrable (conjugué à  $z^d$  ou  $\pm T_d$ ) pour tout  $\lambda \in C$  ;
- soit il existe une application univalente  $\iota : \mathbb{D} \rightarrow C$  telle  $\iota^{-1}(\text{Bif}(\hat{P}, a))$  est un sous-ensemble fermé parfait non-vide totalement disconnexe de la droite réelle et la paire  $(\hat{P} \circ \iota, a \circ \iota)$  est conjuguée à une paire réelle sur  $\mathbb{D}$ .

Ce résultat est un des ingrédients principaux pour traiter des problèmes d'intersections improbables dans les familles de polynômes que l'on abordera au chapitre suivant.

**Exemple 3.1** Revenons à la famille quadratique qui nous sert de model :  $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors le théorème 3.1 nous dit que, pour un point marqué constant  $a \in \mathbb{C}$ , si  $\text{Bif}(\hat{f}, a)$  est contenu dans une corbe lisse, alors  $a \in ]-\infty, -2]$  et  $\text{Bif}(\hat{f}, a)$  est un ensemble de Cantor réel.

La preuve du théorème 3.1 s'appuie sur un principe de transfert de l'espace des paramètres dans l'espace des phases qui peut se décomposer en deux parties. Celle-ci nécessite la définition suivante.

**Définition 3.3** *Dans une famille  $\hat{P}$  munie d'un point marqué  $a$ , on dit que  $a$  est transversalement pré-répulsif en  $\lambda_0 \in \Lambda$  si  $a(\lambda_0)$  est prépériodique à un cycle répulsif  $z_0$  de  $P_{\lambda_0}$  et tel que le graphe de  $\lambda \mapsto a(\lambda)$  et celui de la continuation holomorphe locale de  $z_0$  comme points périodique répulsif de  $P_\lambda$  s'intersectent transversalement en  $\lambda_0$ .*

La première étape est de trouver, de façon dense dans  $\text{Bif}(\hat{P}, a)$ , des paramètres  $\lambda_0$  auxquels  $a$  est transversalement pré-répulsif. Cette étape utilise sur un argument de Dujardin [Duj13]. La deuxième étape repose sur une réinterprétation du théorème de similarité de Tan Lei [Tan90] qui montre que le lieu de bifurcation  $\text{Bif}(\hat{P}, a)$  au voisinage de  $\lambda_0$  est conformément équivalent à petite échelle à l'ensemble de Julia de  $P_{\lambda_0}$ .

En combinant ces deux ingrédients, on voit que si  $\text{Bif}(\hat{P}, a)$  admet une composante connexe non-triviale, alors le théorème de Fatou implique que  $\hat{P}$  est isotriviale conjuguée à  $z^d$  ou  $\pm T_d$  pour tout  $\lambda \in C$  (ici isotriviale signifie que les polynômes  $P_\lambda$  sont tous deux à deux conjugués par un automorphisme affine de  $\mathbb{C}$ ). Lorsque  $\text{Bif}(\hat{P}, a)$  est totalement disconnexe, on montre que tous les multiplicateurs de  $P_{\lambda_0}$  sont réels et on conclut que  $P_\lambda$  est réel pour tout paramètre voisin dans la courbe lisse qui contient  $\text{Bif}(\hat{P}, a)$  en utilisant un argument d'Eremenko et Van Strien [ErvS11].

Considérons maintenant une famille holomorphe  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  de fractions rationnelles de degré  $d$  et une fonction holomorphe  $a : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Dans le cas polynomial, le lieu de bifurcation du point marqué  $a$  est nécessairement une *frontière*, et donc est d'intérieure vide. Une question naturelle est alors de comprendre dans quel cas  $\text{Bif}(\hat{f}, a)$  n'est pas d'intérieur vide.

Sur cette question, le premier résultat partiel que j'obtiens est le suivant.

**Théorème 3.2** ([Gau18]) *Soit  $(\hat{f}, a)$  une paire dynamique de degré  $d$  paramétrée par une surface de Riemann ouverte  $\Lambda$ . Si  $\text{Bif}(\hat{f}, a) = \Lambda$ , alors  $\hat{f}$  est stable et*

- soit  $\hat{f}$  est triviale,
- soit  $J(f_\lambda) = \mathbb{P}^1$  et  $f_\lambda$  porte un champs de droites invariant pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .

L'idée de la preuve est assez simple et se découpe en deux étapes. Dans un premier temps, je montre en utilisant encore la densité des paramètres transversalement pré-répulsifs que, lorsque  $\Omega \subset \Lambda$  est un ouvert sur lequel  $\hat{f}$  est stable, on a

$$\text{Bif}(\hat{f}, a) \cap \Omega = \{\lambda \in \Omega : a(\lambda) \in J(f_\lambda)\}.$$

Ensuite, en utilisant cette description de  $\text{Bif}(\hat{f}, a)$  dans les ouverts de stabilité et le théorème de Montel, on montre facilement que  $\hat{f}$  est stable et que  $J(f_\lambda) = \mathbb{P}^1$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et on conclut grâce à un argument de Mañé, Sad et Sullivan [MaSadSul83].

### 3.1.2 Paires dynamiques possédant une mesure de bifurcation lisse

On vient de voir que la régularité du lieu de bifurcation  $\text{Bif}(\hat{f}, a)$  contraint fortement la famille  $\hat{f}$ . On va maintenant s'intéresser au cas où le courant  $T_{\hat{f}, a}$  est régulier.

Rappelons que le point marqué  $a$  est transversalement prérépulsif en  $\lambda_0$  si les graphes de  $\lambda \mapsto f_\lambda^n(a(\lambda))$  et de la continuation  $\lambda \mapsto x(\lambda)$  de  $a(\lambda_0)$  comme point répulsif de  $f_\lambda$  s'intersectent transversalement en  $\lambda_0$ . Rappelons également qu'une fraction rationnelle  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un exemple de Lattès s'il existe une courbe elliptique  $E$ , un endomorphisme  $L : E \rightarrow E$  et un revêtement ramifié fini  $p : E \rightarrow \mathbb{P}^1$  tel que  $p \circ L = f \circ p$  sur  $E$ .

Lorsque  $\hat{f}$  est une famille algébrique d'exemples de Lattès de dimension 1 et que  $\mu_{\hat{f}, a} \neq 0$ , DeMarco et Mavraki [DeMMav20] ont montré que  $\text{Bif}(\hat{f}, a) = \Lambda$  et on peut se demander si la mesure  $\mu_{\hat{f}, a}$  est lisse ou non sur  $\Lambda$  dans ce cas-là.

J'ai établi le résultat suivant.

**Théorème 3.3 ([Gau18])** *Soit  $(\hat{f}, a)$  une paire dynamique de  $\mathbb{P}^1$  de degré  $d \geq 2$  paramétrée par une surface de Riemann de type fini  $\Lambda$ . Supposons que  $\hat{f}$  n'est pas isotriviale et que  $\text{Bif}(\hat{f}, a) \neq \emptyset$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le lieu de bifurcation de  $(\hat{f}, a)$  est  $\text{Bif}(f, a) = \Lambda$ ,*
2. *Les paramètres transversalement prérépulsifs sont denses dans  $\Lambda$ ,*
3. *La mesure de bifurcation  $\mu_{\hat{f}, a}$  de la paire  $(\hat{f}, a)$  est absolument continue,*
4. *La famille  $\hat{f}$  est une famille d'exemples de Lattès flexibles.*

Plusieurs remarques sont de rigueur :

- D'abord, l'hypothèse de non-isotrivialité est nécessaire pour obtenir un tel résultat. En effet, si  $\hat{f}(\lambda, z) = (\lambda, f(z))$  où  $f$  est Collet-Eckmann mais non-Lattès, alors  $J(f) = \mathbb{P}^1$  et les deux premiers points du théorème sont vrais.
- Ensuite, le seul endroit où nous utilisons que  $\Lambda$  est une courbe algébrique (quasi-projective) est dans la preuve de l'équivalence entre  $\text{Bif}(f, a) = \Lambda$  et le fait que  $\hat{f}$  est une famille d'exemples Lattès flexibles, en utilisant [McM87]. Il s'agit d'une hypothèse nécessaire, sauf à supposer vraie la Conjecture No Invariant Line Fields de McMullen, qui est très loin d'être démontrée.

La stratégie de la preuve est identique à celle du théorème 3.1 : on prouve d'abord que les paramètres transversalement prérépulsifs sont denses dans le support de  $\mu_{\hat{f}, a}$ , puis on donne une version pluripotentialiste de l'argument de similarité de Tan Lei pour prouver que, si  $a$  est transversalement prérépulsif en  $\lambda_0$  et si  $\mu_{\hat{f}, a}$  est absolument continue au voisinage de  $\lambda_0$ , alors la mesure de Green  $\mu_{f_{\lambda_0}}$  de  $f_{\lambda_0}$  est également non-singulière par rapport à  $\omega_{\mathbb{P}^1}$ . On conclut grâce au résultat de Zdunik.

En cours de route, on a montré le résultat suivant.

**Théorème 3.4 ([Gau18])** *Soit  $d \geq 2$  et soit  $(\hat{f}, a)$  une paire dynamique de degré  $d$  paramétrée par une variété Kählerienne  $(M, \omega)$  de dimension 1. Supposons que  $\text{supp}(\mu_{\hat{f}, a}) = M$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. la mesure  $\mu_{\hat{f},a}$  est absolument continue par rapport à  $\omega$ ,
2. la famille  $\hat{f}$  est une famille d'exemples de Lattès.

On peut penser au théorème 3.3 comme une contrepartie paramétrique partielle au résultat de Zdunik. Cependant, la comparaison avec le travail de Zdunik s'arrête là : les fractions rationnelles dont l'ensemble de Julia coïncide avec la sphère de Riemann forment un ensemble de mesure positive dans  $\text{Rat}_d$  et ne sont donc, en général, pas des exemples de Lattès puisque celles-ci forment une sous-variété algébrique de  $\text{Rat}_d$ . D'une certaine façon, le théorème 3.3 établit une propriété de rigidité plus forte que celle qui a lieu dans l'espace dynamique.

### 3.1.3 Uplets dynamiques possédant une mesure de bifurcation lisse

Pour finir cette section, je souhaite aborder le même type de phénomènes de rigidité dans les familles d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^k$  pour  $k \geq 2$ . Rappelons qu'un endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^k$  de degré  $d \geq 2$  admet une unique mesure d'entropie maximale (sa mesure de Green  $\mu_f$ ) et que ses exposants de Lyapunov  $\chi_1, \dots, \chi_k$  satisfont tous  $\chi_j \geq \frac{1}{2} \log d$ .

**Définition 3.4** *On dit que les exposants de Lyapunov de  $f$  sont résonants s'il existe  $1 \leq i < j \leq k$  et un entier  $q \geq 2$  tels que  $\chi_i = q\chi_j$ .*

Rappelons également que, comme en dimension 1, un endomorphisme  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  est un *exemple de Lattès* s'il existe une variété abélienne  $A$ , un revêtement ramifié fini  $p : A \rightarrow \mathbb{P}^k$  et une isogénie  $\ell : A \rightarrow A$  tels que  $p \circ \ell = f \circ p$  sur  $A$ . Berteloot et Loeb [BerLo98] puis Berteloot et Dupont [BerDu05] ont généralisé le travail de Zdunik au cas des endomorphismes de  $\mathbb{P}^k$  :  $f$  est un exemple de Lattès de  $\mathbb{P}^k$  si et seulement si la mesure de Green  $\mu_f$  n'est pas singulière par rapport à la mesure  $\omega_{\mathbb{P}^k}^{\wedge k}$ , (on peut aussi consulter [Dup02] pour une exposition complète sur la question). Il est également à noter que certains automorphismes de surface projectives sont d'entropie positive (les surfaces sont alors des surfaces  $K3$ ). Parmi ceux-ci, Cantat et Dupont [CanDu20] ont caractérisé ceux qui possèdent une mesure d'entropie maximale absolument continue comme étant des exemples de Kummer : l'automorphisme  $f : X \rightarrow X$  est induit par un automorphisme d'une surface abélienne.

Lorsque  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^k$  est une famille d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^k$  de degré  $d$  et  $a : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^k$  est holomorphe, on dit que  $(\hat{f}, a)$  est une paire dynamique de degré  $d$  de  $\mathbb{P}^k$ . Le *courant de bifurcation*  $T_{\hat{f},a}$  de la paire  $(\hat{f}, a)$  est

$$T_{\hat{f},a} := (\pi_\Lambda)_* \left( \widehat{T}^{\wedge k} \wedge [\Gamma_a] \right) ,$$

où, comme lorsque  $k = 1$ ,  $\widehat{T}$  est le courant de Green fibré de  $\hat{f}$ ,  $\Gamma_a$  est le graphe de  $a$  et  $\pi_\Lambda : \Lambda \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Lambda$  est la projection canonique. Une partie importante de arguments mis en place pour prouver le théorème 3.3 s'adaptent en dimension supérieure pour donner :

**Théorème 3.5** ([Gau18]) *Soient  $d, k \geq 2$  des entiers,  $(\hat{f}, a)$  une paire dynamique de degré  $d$  de  $\mathbb{P}^k$  paramétrée par une variété Kählerienne  $(M, \omega)$  de dimension  $k$ . Supposons que pour tout  $\lambda \in M$ ,*

- *tout point périodique  $J$ -répulsif  $z$  de  $f_\lambda$ , i.e.  $z \in \text{supp}(\mu_{f_\lambda})$ , est linérisable,*
- *les exposants de Lyapunov de  $f_\lambda$  sont non-résonants.*

*Supposons également que la mesure de bifurcation  $\mu_{\hat{f}, a} := T_{\hat{f}, a}^{\wedge k}$  de la paire  $(\hat{f}, a)$  est de support plein  $\text{supp}(\mu_{\hat{f}, a}) = M$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la mesure  $\mu_{\hat{f}, a}$  est absolument continue par rapport à  $\omega^{\wedge k}$ ,*
2. *la famille  $\hat{f}$  est une famille d'exemples de Lattès de  $\mathbb{P}^k$ .*

Encore une fois, la stratégie est la même : On montre d'abord que les paramètres transversalement pré- $J$ -répulsifs sont denses dans  $\text{supp}(\mu_{\hat{f}, a})$ . A cette fin, on utilise en plus des propriétés ergodiques des applications à Allure Polynomiale en dimension  $k$ . C'est ici que nous avons besoin de l'hypothèse de non-résonance.

On met ensuite en place l'argument de similarité à la Tan Lei : c'est dans ce procédé de renormalisation qu'on a besoin de l'hypothèse de linéarisabilité. On conclut cette fois la preuve à l'aide du résultat de Berteloot et Dupont. Il serait intéressant de pouvoir enlever ces hypothèses de l'énoncé ci-dessus.

## 3.2 Les propriétés géométriques de Northcott et Bogomolov dynamiques

Un autre phénomène de rigidité qui joue un rôle central dans l'étude des espaces de paramètres (et que nous avons déjà utilisé à de nombreuses reprises) est dû à McMullen [McM87] et stipule que si  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  est une famille algébrique de fractions rationnelles de degré  $d$  qui est stable, autrement dit telle que  $T_{\text{bif}} = 0$ , alors

- soit  $\hat{f}$  est isotriviale,
- soit  $\hat{f}$  est une famille d'exemples de Lattès flexibles.

La preuve de ce résultat fondamental consiste en deux grandes étapes : d'abord, McMullen montre que si  $\hat{f}$  est stable, alors  $\hat{f}$  est PCF, c'est-à-dire que

$$\text{PC}(\hat{f}) := \bigcup_n \hat{f}^n(\text{Crit}(\hat{f}))$$

est une sous-variété algébrique de  $\Lambda \times \mathbb{P}^1$ . Ensuite, en utilisant la théorie de Thurston, McMullen prouve que les seules familles non-isotriviales PCF sont les familles de Lattès flexibles.

Dujardin et Favre [DujFav08] ont spécifié la première partie de la preuve du McMullen en montrant que si  $c : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un point critique marqué d'une famille algébrique  $\hat{f}$  de fractions rationnelles : ils ont adapté la preuve de McMullen pour montrer que, si la paire  $(\hat{f}, c)$  est stable (ce que l'on peut traduire par  $T_{\hat{f}, c} = 0$ ), alors

- soit  $c$  est stablement prépériodique, ce qui signifie qu'il existe  $n > k \geq 0$  tels que  $f_\lambda^n(c(\lambda)) = f_\lambda^k(c(\lambda))$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,
- soit la paire  $(\hat{f}, c)$  est isotriviale, ce qui signifie que, quitte à remplacer  $\Lambda$  par un revêtement ramifié fini, il existe une famille  $\phi : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  de transformations de Möbius telle que

$$f := \phi_\lambda \circ f_\lambda \circ \phi_\lambda^{-1} \quad \text{et} \quad a := \phi_\lambda(c(\lambda))$$

sont indépendants du paramètre  $\lambda$ .

DeMarco [DeM16] a montré que, lorsque  $a : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$  est *n'importe quel* pont marqué, alors le même résultat est vrai. Nous pouvons résumer tout cela ainsi.

**Théorème 3.6** *Soit  $(\hat{f}, a)$  une paire dynamique algébrique non-isotriviale paramétrée par une variété quasi-projective complexe  $\Lambda$ . Supposons que  $T_{\hat{f}, a} = 0$ , alors  $a$  est stablement prépériodique par  $\hat{f}$ .*

Un autre aspect important du travail de DeMarco est qu'elle relie ce résultat à un théorème de dynamique arithmétique sur les corps de fonctions globaux : si  $\mathbf{K}$  est le corps des fonctions rationnelles sur la variété quasi-projective  $\Lambda$ , la famille  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  se restreint à la fibre générique de  $\pi_\Lambda : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda$  en une fraction rationnelle  $f : \mathbb{P}_{\mathbf{K}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{K}}^1$  de degré  $d \geq 2$ . La hauteur canonique  $\hat{h}_f : \mathbb{P}^1(\bar{\mathbf{K}}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  de  $f$  est définie par

$$\hat{h}_f(z) = \frac{1}{\deg(\pi_z)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \deg_{\Lambda'}(f^n(z)), \quad z \in \mathbb{P}^1(\bar{\mathbf{K}}),$$

où  $\pi_z : \Lambda' \rightarrow \Lambda$  est un revêtement ramifié fini pour lequel  $z$  peut être vu comme une fonction rationnelle  $z : \Lambda' \rightarrow \mathbb{P}^1$ . DeMarco a montré que

$$T_{\hat{f}, a} = 0 \text{ sur } \Lambda \text{ si et seulement si } \hat{h}_f(a) = 0.$$

Baker [Bak09] a montré que si  $f$  n'est pas isotriviale, alors l'ensemble  $\{z \in \mathbb{P}^1(\mathbf{K}) : \hat{h}_f(z) = 0\}$  est un ensemble fini (le cas polynomial est dû à Benedetto [Ben05]). Nous reviendrons plus en détails sur les aspects arithmétiques des systèmes dynamiques algébriques au cours du Chapitre 4.

Dans un article en commun avec Gabriel Vigny, nous généralisons ces résultats en dimension supérieure. Il est à noter que la preuve du théorème 3.6 repose sur la formule de Riemann-Hurwitz et sur le théorème de Montel. Elle ne peut donc pas être adaptée en l'état. Nous allons plutôt utiliser une approche pluripotentialiste de ce problème.

### 3.2.1 Paires dynamiques stables en toute dimension

Commençons par fixer le cadre dans lequel nous travaillons. La bonne notion pour généraliser les résultat ci-dessus est celle d'endomorphisme polarisé. Cette section est dédiée à l'introduction du matériel nécessaire pour énoncer nos résultats.

Soient  $K$  un corps de caractéristique nulle,  $X$  une variété projective normale et  $L$  un fibré en droite ample sur  $X$ , tous deux définis sur  $K$ . Un endomorphisme  $f : X \rightarrow X$  est *polarisé* par  $L$  s'il existe  $d \geq 2$  tel que  $f^*L \simeq L^{\otimes d}$ , c'est-à-dire que  $f^*L$  est linéairement équivalent à  $L^{\otimes d}$ . Un exemple typique est un endomorphisme  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  de degré  $d \geq 2$ , puisque l'on a alors  $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(d) \simeq \mathcal{O}(1)^{\otimes d}$ .

**Définition 3.5** *Un système dynamique polarisé sur  $K$  est la donnée  $(X, f, L)$ .*

Soit  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$  une famille de variétés projectives complexes, c'est-à-dire que

- $\mathcal{X}$  est une variété projective complexe normale,
- $\mathcal{B}$  est une variété projective complexe lisse,
- $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$  est un morphisme surjectif, qui est plat au-dessus un ouvert de Zariski non-vide  $\Lambda$  de  $\mathcal{B}$ .

Pour tout  $\lambda \in \mathcal{B}$ , on note  $\mathcal{X}_\lambda := \pi^{-1}\{\lambda\}$ , la fibre au-dessus de  $\lambda$  et on suppose que  $\mathcal{X}_\lambda$  est normale pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . On note également  $\mathcal{X}_\Lambda := \pi^{-1}(\Lambda)$ . Si  $\mathcal{L}$  est un fibré en droites sur  $\mathcal{X}$ , on dit que  $\mathcal{L}$  est *relativement ample* si pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , la restriction  $\mathcal{L}_\lambda := \mathcal{L}|_{\mathcal{X}_\lambda}$  est un fibré en droites amples sur la fibre  $\mathcal{X}_\lambda$ .

On munira aussi  $\mathcal{B}$  d'un fibré en droites ample  $\mathcal{N}$  et d'une forme Kählerienne  $\omega_{\mathcal{B}}$  telle que  $\{\omega_{\mathcal{B}}\} = c_1(\mathcal{N})$  dans toute la suite. Quitte à remplacer  $\mathcal{N}$  par une puissance tensorielle, on peut supposer que  $\mathcal{M} := \mathcal{L} \otimes \pi^*(\mathcal{N})$  est ample.

On dira qu'une famille  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$  munie d'un fibré en droites relativement ample  $\mathcal{L}$  est *isotriviale* si pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , il existe un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{X}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_{\lambda'} \quad \text{avec} \quad \phi^*\mathcal{L}_{\lambda'} \simeq \mathcal{L}_\lambda.$$

**Définition 3.6** *Une famille d'endomorphismes polarisés au-dessus de  $\mathcal{B}$  est un triplet  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L})$  où  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$  est une famille de variétés projectives,  $\mathcal{L}$  est un fibré en droites relativement ample sur  $\mathcal{X}$  et  $\hat{f} : \mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{X}$  est une transformation rationnelle telle que  $\hat{f}|_{\mathcal{X}_\lambda} : \mathcal{X}_\lambda \rightarrow \mathcal{X}_\lambda$  est un morphisme et, si on note  $f_\lambda := \hat{f}|_{\mathcal{X}_\lambda} : \mathcal{X}_\lambda \rightarrow \mathcal{X}_\lambda$ , alors  $(\mathcal{X}_\lambda, f_\lambda, \mathcal{L}_\lambda)$  est un système dynamique polarisé, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .*

$\Lambda$  est la partie régulière de la famille.

Pour une telle famille d'endomorphismes polarisés  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L})$ , comme dans le cas des familles d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^1$ , on peut définir son *courant de Green fibré*  $\hat{T}$  : soit  $\omega$  une  $(1,1)$ -forme positive fermée de classe de cohomologie  $\{\omega\} = c_1(\mathcal{L})$ . Il s'agit de la limite

$$\hat{T} := \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} (\hat{f}^n)^* (\omega|_{\mathcal{X}_\Lambda}) ,$$

au sens des courants sur  $\mathcal{X}_\Lambda$ . Il s'agit d'un  $(1,1)$ -courant positif fermé à potentiel continu sur  $\mathcal{X}_\Lambda$  (qui s'étend en un  $(1,1)$ -courant positif fermé sur  $\mathcal{X}$ , car il est de masse finie). Si  $k$  est la dimension d'une fibre générale de  $\pi$ , alors  $\hat{T}$  satisfait  $\hat{T}^{\wedge(k+1)} = 0$  et, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , la tranche  $\mu_{f_\lambda}$  de  $\hat{T}^{\wedge k}$  le long de  $\mathcal{X}_\lambda$  est l'unique mesure d'entropie maximale de  $f_\lambda$  et elle équidistribue les points périodiques  $J$ -répulsifs de  $f_\lambda$  (donc ceux contenus dans  $\text{supp}(\mu_{f_\lambda})$ ).

**Définition 3.7** Une paire dynamique de dimension  $k$  est la donnée  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L}, a)$  de

1. une famille d'endomorphismes polarisés  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L})$  où  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$  est une famille de variétés de dimension  $k$  de partie régulière  $\Lambda$  et
2. une section rationnelle  $a : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{X}$  de  $\pi$  qui est bien définie sur  $\Lambda$ .

On définit alors le courant de bifurcation de  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L}, a)$  comme

$$T_{\hat{f},a} := \pi_* \left( \widehat{T}^{\wedge k} \wedge [a(\Lambda)] \right).$$

Il s'agit d'un  $(1, 1)$ -courant positif fermé à potentiel continu sur  $\Lambda$  dont l'extension triviale à  $\mathcal{B}$  est positive et fermée. Il est relativement facile, en utilisant un théorème de Bishop portant sur les suites de courants d'intégration de masse bornée localement, d'adapter la preuve du cas des fractions rationnelles pour obtenir que

$$\Lambda \setminus \text{supp}(T_{\hat{f},a}) = \{\lambda_0 \in \Lambda : (a_n)_n \text{ est normale en } \lambda_0\},$$

où  $a_n(\lambda) := \hat{f}^n(a(\lambda)) = f_\lambda^n(a(\lambda))$  pour  $\lambda \in \Lambda$ .

**Définition 3.8** Une paire dynamique  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L}, a)$  de partie régulière est stable si la suite  $(a_n)$  est équicontinue sur  $\Lambda$ , ou de façon équivalente si  $T_{\hat{f},a} = 0$  sur  $\Lambda$ .

Soit  $\mathbf{K} := \mathbb{C}(\mathcal{B})$  le corps des fonctions rationnelles sur  $\mathcal{B}$ , soit  $X$  la fibre générique de  $\pi$  et soit  $L := \mathcal{L}|_X$ . La restriction  $f$  de  $\hat{f}$  sur  $X$  induit un endomorphisme polarisé  $(X, f, L)$  sur  $\mathbf{K}$ . On peut encore lui associer une fonction hauteur canonique  $\hat{h}_f$  comme suit : pour toute section rationnelle  $a : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{X}$  qui est bien définie sur  $\Lambda$ , on définit  $\hat{h}_f(a)$  comme la limite

$$\hat{h}_f(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \deg_{\mathcal{N}}(a_n^* \mathcal{L}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \left( \mathcal{A}_n \cdot c_1(\mathcal{L}) \cdot c_1(\pi^* \mathcal{N})^{\dim \mathcal{B} - 1} \right),$$

où  $\mathcal{A}_n$  est la clôture de Zariski de  $a_n(\Lambda)$ . De façon plus générale, pour toute sous-variété  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$  telle que  $\pi|_{\mathcal{Z}} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{B}$  est plat au-dessus de  $\Lambda$ , on note  $Z$  sa fibre générique et on définit  $\hat{h}_f(Z)$  comme la limite

$$\hat{h}_f(Z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^{n(\ell+1)}} \left( (\hat{f}^n)_* (\mathcal{Z}) \cdot c_1(\mathcal{L})^{\ell+1} \cdot c_1(\pi^* \mathcal{N})^{\dim \mathcal{B} - 1} \right).$$

où  $\ell = \dim Z$  (qui est également la dimension relative de  $\mathcal{Z}$ ).

Un des objectifs de ce travail est de relier la notion de stabilité d'une paire dynamique à la hauteur canonique du point sur  $X(\mathbf{K})$  associé. Dans cette direction, on montre :

**Théorème 3.7** ([GauV19b]) Si  $\ell$  est la dimension relative de  $\mathcal{Z}$ , on a

$$\hat{h}_f(Z) = \int_{\mathcal{X}_\Lambda} \widehat{T}^{\wedge(\ell+1)} \wedge [\mathcal{Z}] \wedge (\pi^* \omega_{\mathcal{B}})^{\wedge(\dim \mathcal{B} - 1)}.$$

La preuve du théorème 3.7 repose de façon cruciale sur deux idées assez simples que nous avons déjà utilisées :

- D'abord, le courant  $\hat{T}$  s'écrit  $\omega + dd^c \hat{g}$  et on montre que l'on contrôle bien, au voisinage de  $\mathcal{B} \setminus \Lambda$ , la dégénérescence de  $\hat{g}$  en utilisant le Nullstellensatz et le fait que tout endomorphisme polarisé se réalise comme restriction d'un endomorphisme d'un espace projectif,
- Ensuite, on utilise la même idée que dans [GauOkuV19] : pour évaluer la différence des masses, on teste  $\hat{T}^{\wedge(\ell+1)} \wedge [\mathcal{Z}] - d^{-n(\ell+1)} \omega^{\wedge(\ell+1)} \wedge (\hat{f}^n)_* [\mathcal{Z}]$  contre la bonne famille de fonctions test DSH continues pour pouvoir utiliser l'estimée de dégénérescence obtenue précédemment.

Revenons au cas d'une section rationnelle  $a : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{X}$  : on trouve donc

$$\hat{h}_f(a) = \int_{a(\Lambda)} \hat{T} \wedge (\pi^* \omega_{\mathcal{B}})^{\wedge(\dim \mathcal{B}-1)}.$$

En d'autres termes, on peut interpréter la stabilité d'une paire dynamique comme une propriété *arithmétique sur un corps de fonctions* d'un endomorphisme polarisé.

Dans le cas des familles d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^1$  paramétrées par une courbe, cela se réécrit  $\mu_{\hat{f},a}(\Lambda) = \hat{h}_f(a)$ , redonnant (et précisant) le lien établi entre hauteur canonique et mesure de bifurcation par DeMarco. L'utilisation que l'on fait d'une fonctions test bien choisie permet de remplacer l'argument délicat de DeMarco qui fait appel au fait que l'endomorphisme induit sur la fibre générique *admet une place de mauvaise réduction* dès que celui-ci n'est pas isotrivial. Il est également à noter que notre preuve n'utilise nulle par d'hypothèse de non-isotrivialité pour établir cette formule.

### 3.2.2 Les propriétés de Northcott et Bogomolov géométriques

L'objet principal de l'article [GauV19b] écrit en collaboration avec Gabriel Vigny est d'établir des résultats similaires à ceux de McMullen, Benedetto, Baker et DeMarco en dimension plus grande, dans les familles d'endomorphismes polarisés.

Soit  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L})$  une famille d'endomorphismes polarisés. Pour énoncer le résultat, on a besoin de définir ce que l'on entend par famille isotriviale. On dit que  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L})$  est *isotriviale* si pour tous  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ , il existe un isomorphisme  $\phi : \mathcal{X}_\lambda \rightarrow \mathcal{X}_{\lambda'}$  tel que

$$\phi^* \mathcal{L}_{\lambda'} \simeq \mathcal{L}_\lambda \quad \text{et} \quad f_{\lambda'} \circ \phi = \phi \circ f_\lambda.$$

Notre principal résultat est le suivant :

**Théorème 3.8** ([GauV19b]) *Soit  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L})$  une famille non-isotriviale d'endomorphismes polarisés paramétrée par une variété projective complexe lisse  $\mathcal{B}$ . Alors il existe  $N \geq 0$  et une sous-variété  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  tels que*

1.  $\pi|_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{B}$  est plat au-dessus de la partie régulière  $\Lambda$  de la famille,
2.  $\hat{f}(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$  et pour toute composante irréductible  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{Y}$ , si  $n$  est choisi tel que  $\hat{f}^n(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ , alors la famille  $(\mathcal{V}, \hat{f}^n|_{\mathcal{V}}, \mathcal{L}|_{\mathcal{V}})$  est isotriviale,

3. pour toute section rationnelle  $a : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{X}$  de la famille  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$  telle que la paire dynamique  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L}, a)$  est stable, la section rationnelle  $a_N$  définie par  $a_N(\lambda) := f_\lambda^n(a(\lambda))$ , là où elle est bien définie, satisfait  $a_N(\Lambda) \subset \mathcal{Y}$ .

En particulier, si  $\mathcal{X}$  ne contient aucune sous-variété isotriviale invariante par  $\hat{f}$  de dimension  $> \dim \mathcal{B}$ , alors toute section rationnelle stable de  $\pi$  est stablement prépériodique. De plus, il n'y en a qu'un nombre fini.

- Remarque 3.2** 1. Le cas où  $\mathcal{Y}$  est de dimension relative strictement positive ne peut pas être exclu : on considère, par exemple, la famille d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^2$  donnée par une famille non-isotriviale d'applications polynomiales de  $\mathbb{A}^2$ , dont la restriction à la droite à l'infini est triviale (par exemple  $(z_1^d, z_2^d + \lambda z_1)$  qui est une famille paramétrée par  $\mathbb{P}^1$  de partie régulière  $\mathbb{C}$ ). Alors tout point périodique  $z_0$  (indépendant du paramètre) qui est sur la droite à l'infini induit une section rationnelle stable  $\lambda \mapsto (\lambda, z_0)$ .
2. Dans le cas d'une famille non-isotriviale d'exemples de Lattès  $(\mathcal{B} \times \mathbb{P}^k, \hat{f}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1))$  paramétrée par une courbe projective lisse  $\mathcal{B}$ , on peut montrer qu'il n'y a pas de sous-variété  $\hat{f}$ -invariante isotriviale. On trouve donc qu'une section rationnelle est stable si et seulement si elle est stablement prépériodique.

Décrivons maintenant la stratégie de la preuve. Soit  $a : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{X}$  une section rationnelle et soit  $\mathcal{Z}_n$  la clôture de Zariski de  $a_n(\Lambda)$  dans  $\mathcal{X}$ . Une conséquence de la preuve du théorème 3.7 est que  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L}, a)$  est stable si et seulement si la suite des degrés  $\deg_{\mathcal{M}}(\mathcal{Z}_n)$  est bornée par une constante ne dépendant que de la famille et de  $\deg_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$  (on retrouve donc la même première étape de démonstration que DeMarco par des techniques totalement différentes).

Ensuite, on remarque que  $\hat{f}$  induit un endomorphisme sur la clôture de Zariski de  $\{\mathcal{Z}_n, n \geq 0\}$  dans le bon schéma de Hilbert relatif de  $\mathcal{X}$ . Prouver que ce schéma est de dimension nulle donne automatiquement que  $\mathcal{Z}$  est prépériodique. On pose alors  $\widehat{\mathcal{W}} := \{(\mathcal{C}, x) \in \mathcal{W} \times \mathcal{X} : x \in \mathcal{C}\}$ . En utilisant encore une adaptation du théorème de similarité de Tan Lei, on montre que, si l'image  $\mathcal{Y}$  de la projection  $\widehat{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{X}$  est de dimension positive, alors toutes les fibres de  $\pi|_{\mathcal{Y}}$  sont isomorphes à  $\mathcal{W}$  et que l'action de  $\hat{f}$  sur  $\mathcal{Y}$  est isotriviale, ce qui garantit que  $\dim \mathcal{Y} < \dim \mathcal{X}$ . Finalement, on prouve que  $\mathcal{Y}$  est indépendant de  $a$  en utilisant la traduction arithmétique ci-dessous, ainsi que les propriétés de functorialité des fonctions hauteurs.

Comme en dimension 1, lorsque  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L})$  est une famille d'endomorphismes polarisés paramétrés par  $\mathcal{B}$ , la restriction  $f$  de  $\hat{f}$  à la fibre générique  $X$  de  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$  et la restriction  $L := \mathcal{L}|_X$  induisent un endomorphisme polarisé  $(X, f, L)$  défini sur  $\mathbf{K} := \mathbb{C}(\mathcal{B})$ . Le résultat ci-dessus se traduit alors comme un résultat à la Northcott que l'on a appelé *Propriété de Northcott Dynamique Géométrique* :

**Corollaire 3.9 (Northcott Dynamique Géométrique [GauV19b])** *Soit  $X$  une variété projective normale et soit  $(X, f, L)$  un endomorphisme polarisé non-isotrivial tous*

deux définis sur  $\mathbf{K}$ . Alors il existe un entier  $N \geq 0$  et une sous-variété (possiblement réductible)  $Y \subset X_{\bar{\mathbf{K}}}$  telle que  $f(Y) = Y$  et

1. pour toute composante irréductible  $V$  de  $Y$  telle que  $f^n(V) = V$ , l'endomorphisme  $(V, f^n|_V, L|_V)$  est isotrivial,
2. pour tout point  $z \in X(\mathbf{K})$  de hauteur nulle  $\widehat{h}_f(z) = 0$ , on a  $f^N(z) \in Y$ .

En particulier, si  $X_{\bar{\mathbf{K}}}$  ne contient pas de sous-variété périodique isotriviale de dimension positive, alors  $\{z \in X(\mathbf{K}), \widehat{h}_f(z) = 0\}$  est fini et consiste uniquement en des points prépériodiques de  $f$ .

Une situation remarquable est le cas où  $X = A$  est une variété abélienne,  $\widehat{f} = [n]$  est la multiplication par l'entier  $n \geq 2$  sur  $A$  et  $L$  est un fibé en droites ample symétrique sur  $A$ . Dans ce cas-là, la hauteur  $\widehat{h}_f$  n'est autre que la hauteur de Néron-Tate de la variété abélienne et le Corollaire 3.9 est une reformulation dynamique d'un théorème de Lang et Néron [LanNer59] qui dit en substance que si  $z \in A(\mathbf{K})$  est un point de hauteur nulle, alors il existe  $N \geq 1$  tel que  $[N] \cdot z \in A_0$ , où  $A_0$  est la  $\mathbf{K}/\mathbf{C}$ -trace de  $A$  c'est-à-dire la plus grande sous-variété abélienne isotriviale de  $A$ .

Il existe un énoncé similaire à propos des sous-variétés d'une variété abélienne définie sur  $\mathbf{K}$  de hauteur de Néron-Tate nulle : il s'agit de la Conjecture de Bogomolov Géométrique proposée par Yamaki [Yam13, Conjecture 0.3]. Elle a été récemment prouvée par Cantat, Gao, Habegger et Xie [CanGao<sup>+</sup>18] et peut également s'interpréter dynamiquement.

Avec Gabriel Vigny, nous proposons la conjecture de Bogomolov Dynamique Géométrique dont le résultat de Cantat, Gao Habegger et Xie est un cas particulier.

**Conjecture 3.1 (Bogomolov Dynamique Géométrique, [GauV19b])** Soient  $\mathbf{K}$  le corps des fonctions rationnelles d'une variété projective complexe lisse et  $\mathcal{B}, (X, f, L)$  un endomorphisme polarisé non-isotrivial défini sur  $\mathbf{K}$ , où  $X$  est normale. Soit  $Z \subset X_{\bar{\mathbf{K}}}$  une sous-variété irréductible telle que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $Z_\varepsilon := \{x \in Z(\bar{\mathbf{K}}) : \widehat{h}_f(x) < \varepsilon\}$  est Zariski dense dans  $Z$ . Alors nous sommes dans l'un des cas suivants :

1. soit  $Z$  est prépériodique sous itération de  $f$ ,
2. soit il existe un entier  $k \geq 1$  et un endomorphisme polarisé isotrivial  $(Y, g, E)$ , une sous-variété  $V \subset X_{\bar{\mathbf{K}}}$  telle que  $f^k(V) = V$ , une transformation rationnelle dominante  $p : V \dashrightarrow Y$  telle que  $p \circ (f^k|_V) = g \circ p$ , et un entier  $N \geq 1$  une sous-variété isotriviale  $W_0 \subset Y$ , pour laquelle  $f^N(Z) = p^{-1}(W_0)$ .

Il est à noter que la deuxième situation se produit effectivement : si  $f$  préserve une fibration isotriviale dont  $Z$  est une préimage d'une fibre isotriviale, on peut facilement montrer que  $\widehat{h}_f(Z) = 0$ , bien que la plupart des fibres ne soient pas prépériodiques.

La conjecture est donc vraie dans le cas de la multiplication par un entier sur une variété abélienne, par [CanGao<sup>+</sup>18], et nous l'établissons un certain nombre d'autres cas :

1. si  $f : \mathbb{P}_{\mathbf{K}}^k \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{K}}^k$  est un exemple de Lattès non-isotrivial, nous montrons que toute sous-variété  $Z$  telle que  $\widehat{h}_f(Z) = 0$  est prépériodique, ce qui est une version renforcée de la conjecture. En fait, on le vérifie en même temps que la propriété de Northcott.
2. si  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  est un *produit fibré polynomial* non-isotrivial de degré  $d$  dont la première coordonnée est isotriviale, c'est-à-dire si  $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  est donnée par  $f(z, w) = (p(z), q(z, w))$  avec  $\deg p = d$ ,  $\deg_w(q) = d$  et où  $p : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$  est isotriviale. La preuve repose sur la propriété de l'application de composition  $([f], [g]) \in \mathcal{P}_d \times \mathcal{P}_e \mapsto [f \circ g] \in \mathcal{P}_{de}$  entre les espaces de modules des polynômes.
3. si  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  est un endomorphisme non-isotrivial de degré  $d$  tel que  $\deg(f|_Z) \geq Cd^n$  pour tout  $n \geq 1$ , où  $C > 0$  est une constante. La preuve repose sur la même stratégie que celle employée pour prouver le théorème 3.8.

Cela se résume ainsi

**Théorème 3.10 ([GauV19b])** *Soit  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  un endomorphisme de degré  $d$  défini sur  $\mathbf{K}$  tel que  $(\mathbb{P}^2, f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$  n'est pas isotrivial. Alors la Conjecture de Bogomolov Dynamique Géométrique est vérifiée dans les situations suivantes :*

1. si  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  est un produit fibré polynomial non-isotrivial de première coordonnée isotriviale,
2. si  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  est un endomorphisme non-isotrivial tel que  $\deg(f|_Z) \geq Cd^n$  pour tout  $n \geq 1$ , où  $C > 0$  est une constante,
3. si  $f$  est un exemple de Lattès non-isotrivial.

Revenons au résultat initial de McMullen qui classe les familles algébriques stables de fractions rationnelles. Une question tout-à-fait naturelle est de savoir si l'on peut prouver un résultat équivalent en dimension plus grande.

Il faut commencer par mentionner que la question est bien posée puisque Berteloot, Bianchi et Dupont [BerBDu14] ont établi un résultat équivalent à celui de Mañé, Sad et Sullivan et à celui de Lyubich pour les familles d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^k$ . Leur travail, qui constitue une avancée fondamentale dans l'étude des familles d'endomorphismes holomorphes, donne en particulier ce qui suit : Soit  $\mathcal{B}$  une variété projective complexe lisse et  $\Lambda$  un ouvert non-vide de Zariski de  $\mathcal{B}$  et soit  $\mathbf{K} := \mathbb{C}(\mathcal{B})$  le corps des fonctions rationnelles sur  $\mathcal{B}$ . Soit

$$\widehat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^2$$

une famille algébrique d'endomorphismes de degré  $d$  de  $\mathbb{P}^2$ . Soit  $f : \mathbb{P}_{\mathbf{K}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{K}}^2$  la restriction de  $\widehat{f}$  à la fibre générique de  $\mathcal{B} \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathcal{B}$ . Berteloot, Bianchi et Dupont montrent entre autres choses que la stabilité mesurable de  $\widehat{f}$  sur son ensemble de Julia (que l'on notera encore  $J$ -stable) est équivalente au fait que

$$\widehat{h}_f(\text{Crit}(f)) = 0.$$

Une application directe de notre théorème 3.10 donne

**Théorème 3.11** ([GauV19b]) 1. Une famille algébrique stable non-isotriviale de produits fibrés polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  n'est jamais stable.

2. Soit  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^2$  une famille algébrique non-isotriviale d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^2$  de degré  $d \geq 2$  qui est  $J$ -stable. Supposons que les deux hypothèses suivantes soient satisfaites :

(a) aucune itérée  $\hat{f}^n$  de  $\hat{f}$  ne préserve une fibration au-dessus d'une famille isotriviales de fractions rationnelles  $\hat{g} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$ ,

(b) pour un paramètre général  $\lambda \in \Lambda$  et pour toute composante irréductible  $C$  de  $\text{Crit}(f_\lambda)$ , il existe  $M > 0$  telle que  $\deg(f_\lambda^n|_C) \geq M \cdot d^n$  pour tout  $n \geq 1$ .

Alors la famille  $\hat{f}$  est postcritiquement finie.

### 3.3 Perspectives

#### 3.3.1 Régularité des lieux et mesures de bifurcation

La première question qu'on peut se poser à propos du théorème 3.1 est celle de sa validité (ou la validité d'un énoncé semblable) pour les familles de fractions rationnelles. Je n'ai pas beaucoup réfléchi à la question, mais une des difficultés qui apparaît immédiatement est que les fractions rationnelles dont l'ensemble de Julia est le cercle  $\mathbb{S}^1$  ne sont pas nécessairement  $z^{\pm d}$  : les produits de Blaschke  $f$  qui possèdent deux points fixes attractifs dont les bassins respectifs contiennent  $d - 1$  points critiques vérifient également  $J(f) = \mathbb{S}^1$ .

**Problème 3.2** Trouver le bon équivalent au théorème 3.1 pour les familles de fractions rationnelles.

Une autre question immédiate concerne l'énoncé du théorème 3.5 (dans le cas  $k > 1$  bien sûr) : j'y montre que le phénomène de rigidité qui est vrai en dimension 1 l'est également en dimension supérieure, à condition que les exposants de Lyapunov de  $f$  soient non-résonants et que les  $J$ -cycles répulsifs soient linéarisables.

**Question 3.3** Peut-on généraliser le théorème 3.5 aux cas où

1. il existe un paramètre auquel les exposants de Lyapunov sont résonants ?
2. Il existe un  $J$ -cycle répulsif non-linéarisable ?
3. La mesure  $T_{\hat{f},a}^k$  est simplement non-étrangère à la mesure de Lebesgue ?

Puisque le résultat de Zdunik [Zdu90] classe complètement les fractions rationnelles  $f$  dont la mesure d'entropie maximale  $\mu_f$  n'est pas étrangère par rapport à une mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^\alpha$  et stipule que : soit  $\alpha = 1$  and  $f$  est conjuguée à un monôme  $z^{\pm d}$  ou à un polynôme de Chebichev  $T_d$ , soit  $\alpha = 2$  et  $f$  est un exemple de Lattès, on peut s'attendre à un équivalent paramétrique de rigidité plus général.

**Problème 3.4** Soit  $(\hat{f}, a)$  une paire dynamique de  $\mathbb{P}^1$  de degré  $d \geq 2$  paramétrée par le disque unité  $\mathbb{D}$  de  $\mathbb{C}$  telle que  $\mu_{\hat{f}, a} \neq 0$ . Supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  et une fonction  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $\mu_{f, a} = h \cdot \mathcal{H}^\alpha$  sur  $\mathbb{D}$ . Montrer que

- soit  $\alpha = 2$  et  $\hat{f}$  est une famille d'exemple de Lattès,
- soit  $\alpha = 1$ , et  $\hat{f}$  est triviale et  $f_\lambda$  est conjuguée à  $z^{\pm d}$  ou  $T_d$  pour tout  $\lambda$ .

Comme dans le cas des familles d'exemples de Lattès, on peut s'attendre à trouver une preuve qui s'adapte (au moins partiellement) au cas  $k > 1$ . Il faut donc également savoir classifier les endomorphismes  $f$  de  $\mathbb{P}^k$ ,  $k > 1$ , pour lesquels la mesure  $\mu_f$  n'est pas étrangère à une mesure de Hausdorff :

**Problème 3.5** Classifier les endomorphismes de  $\mathbb{P}^k$  dont la mesure d'entropie maximale n'est pas étrangère à une mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^\alpha$  sur  $\mathbb{P}^k$  (et déterminer les valeurs possibles de  $\alpha$ ).

Comme on l'a vu, le cas  $\alpha = 2k$  a été résolu par Berteloot et Loeb [BerLo98] et Berteloot et Dupont [BerDu05]. Bien sûr, il y a également des exemples faciles à construire dans le cas  $\alpha = k$  : soit  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  dont la mesure d'entropie maximale est de dimension 1. Alors il est aisé de voir que l'endomorphisme  $F : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^1)^k & \xrightarrow{(f, \dots, f)} & (\mathbb{P}^1)^k \\ \eta_k \downarrow & & \downarrow \eta_k \\ \mathbb{P}^k & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^k \end{array}$$

où  $\eta_k$  est l'application quotient de l'action par permutation des coordonnées de  $(\mathbb{P}^1)^k$  du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_k$ , satisfait  $\dim(\mu_F) = k$ .

Un des résultats utilisés en cours de route est que, lorsqu'une famille  $\hat{f}$  est  $J$ -stable dans un ouvert  $\Omega \subset \Lambda$  de paramètre, et qu'un point marqué  $a$  bifurque dans cet ouvert, on a

$$\text{Bif}(\hat{f}, a) \cap \Omega = \{\lambda \in \Omega : a(\lambda) \in J(f_\lambda)\}.$$

Pour obtenir une généralisation plus complète des résultats obtenus en dimension 1 dans le cas des familles d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^k$ , il est utile de généraliser cette description du lieu de bifurcation de  $(\hat{f}, a)$  :

**Question 3.6** Soit  $(\hat{f}, a)$  une paire dynamique de  $\mathbb{P}^k$  de degré  $d$  paramétrée par la boule unité  $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^k$ . Supposons que  $\hat{f}$  est  $J$ -stable sur  $\mathbb{B}$ . A-t-on

$$\text{Supp}(T_{\hat{f}, a}^{\wedge k}) = \{\lambda \in \mathbb{B} ; a(\lambda) \in \text{supp}(\mu_{f_\lambda})\} ?$$

### 3.3.2 Familles et paires dynamiques stables

Un autre sujet très important que je souhaite étudier est le théorème de rigidité de McMullen qui stipule que seules les exemples de Lattès flexibles forment des familles algébriques stables non- triviales. Comme nous l'avons vu précédemment, j'ai commencé à m'intéresser à des généralisations de ce résultat fondamental en dimension plus grande. Résoudre ce problème dans un cas général est un des objectifs principaux de mes recherches à venir. On peut couper le problème en deux problèmes bien distincts : montrer que la  $J$ -stabilité entraîne le caractère PCF, puis classifier les familles PCF.

Le problème du caractère PCF des familles  $J$ -stable se pose ainsi.

**Problème 3.7** Soit  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L})$  une famille non-isotriviale d'endomorphismes polarisés de degré  $d$  en dimension  $k$  paramétrée par une variété projective complexe lisse  $\mathcal{B}$  et de partie régulière  $\Lambda$ . Supposons que  $\mathcal{X}$  est lisse et que  $(\mathcal{X}, \hat{f}, \mathcal{L})$  est  $J$ -stable au sens où

$$T_{\text{bif}} := (\pi_\Lambda)_* (\hat{T}^{\wedge k} \wedge [\text{Crit}(\hat{f})]) = 0 \quad \text{comme } (1, 1) - \text{courant positif fermé sur } \Lambda,$$

avec  $\text{Crit}(\hat{f}) = \{x \in \mathcal{X}_\Lambda : \det(D_x \hat{f}) = 0\}$ . Montrer que  $\hat{f}$  est postcritiquement finie, c'est-à-dire que  $\text{PC}(\hat{f}) = \bigcup_{n \geq 1} \hat{f}^n(\text{Crit}(\hat{f}))$  est une sous-variété algébrique stricte de  $\mathcal{X}_\Lambda$ .

Un énoncé de ce type est bien évidemment vérifié lorsque les fibres générales de  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$  sont de dimension 1 (c'est la première partie du théorème de McMullen), dans le cas des familles de produits fibré polynomiaux, ainsi que dans le cas des familles de variétés abéliennes munies de la multiplication par un entier  $n$ , puisque  $\text{Crit}([n]) = \emptyset$  dans ce cas-là.

On peut également se poser la question, une fois le courant  $T_{\text{Sbif}}$  bien défini dans une famille relativement générale  $\hat{f}$ , des phénomènes de rigidité entraînés par son annulation. On s'attend à ce que les points "super-critiques" soient stablement prépériodiques (on renvoie à la Section 2.3 pour cette question).

Le deuxième problème soulevé ci-dessus concerne la classification des familles PCF. Il ne peut a priori pas se formuler aussi simplement que le premier. La raison est simple : si  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^1$  est une famille d'exemples de Lattès flexibles, alors toute famille  $\hat{F} : \Lambda \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{P}^2$  définie par des relevés homogènes de  $\hat{f}$ , c'est-à-dire telle que  $f_\lambda([z : w]) = [F_{\lambda,1}(z, w) : F_{\lambda,2}(z, w)]$  pour tout  $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ , alors  $\hat{F}$  est stable puisque  $L(F_\lambda) = L(f_\lambda) + \log d$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .

La version la plus optimiste du problème est la suivante.

**Problème 3.8** Classifier les familles PCF. Plus précisément, montrer qu'une famille algébrique non-isotriviale d'endomorphismes postcritiquement finis de  $\mathbb{P}^k$  est

1. soit une famille d'exemples de Lattès de  $\mathbb{P}^k$ ,
2. soit le relevé polynomial homogène d'une famille algébrique non-isotriviale postcritiquement finie d'endomorphismes de  $\mathbb{P}^{k-1}$ .

Les outils utilisés par McMullen pour montrer cela en dimension 1 proviennent de la théorie de Teichmüller et apparaissent comme très difficiles à adapter en dimension plus grande. La première pierre importante que l'on peut apporter à la résolution de ce problème est de trouver une nouvelle preuve en dimension 1.

◇

Un autre problème qui m'intéresse est de savoir jusqu'à quel degré de généralité est-il possible de généraliser le théorème 3.8? Plus précisément, on peut commencer par le cas des familles d'automorphismes polynomiaux réguliers du plan affine : il s'agit d'application polynomiales  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  inversibles telles que  $f(z, w) = (p(z, w), q(z, w))$  avec  $p, q \in \mathbb{C}[z, w]$  de degré  $d \geq 2$ . Il se trouve que l'inverse  $f^{-1}$  a la même propriété. Par ailleurs, puisque  $f$  est de degré topologique 1, il existe nécessairement un ensemble d'indétermination  $I(f)$  (fini) sur la droite à l'infini de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{P}^2$ . On dira que  $f$  est régulier si  $I(f) \cap I(f^{-1}) = \emptyset$ . Les automorphismes de Hénon sont un exemple très important de tels automorphismes.

**Problème 3.9** Soit  $\hat{f} : \Lambda \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \Lambda \times \mathbb{C}^2$  une famille non-isotriviale d'automorphismes polynomiaux réguliers de  $\mathbb{C}^2$  et soit  $a : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^2$  un point marqué. On suppose que  $(\hat{f}, a)$  est stable, au sens où le courant positif fermé

$$T_{\hat{f}, a}^+ := (\pi_\Lambda)_* (\hat{T}^+ \wedge [\Gamma_a])$$

est nul sur  $\Lambda$ . Montrer qu'alors  $a$  est stablement périodique sous itération de  $\hat{f}$ . Montrer également que  $(\hat{f}, a)$  est stable si et seulement si  $(\hat{f}^{-1}, a)$  est stable.

Ici,  $\hat{T}^+$  est le courant de Green fibré en avant de  $\hat{f}$  qui se construit comme celui des familles d'endomorphismes polarisés. Ingram [Ing14] a donné une version arithmétique de ce résultat dans le cas des familles de Hénon conservatifs  $f(x, y) = (y + p(x), x)$ . Sa preuve est une adaptation de celle de Benedetto dans le cas des polynômes.

On peut espérer généraliser la preuve que l'on a mis en place dans ce contexte et également dans d'autres contextes, comme celui des familles d'automorphismes de surfaces K3. Il y aura alors des difficultés très importantes à surmonter pour arriver à un résultat comparable dans ce contexte.



# Chapitre 4

---

## Étude arithmétique des espaces de paramètres

### 4.1 Hauteurs sur les espaces de paramètres

L'utilisation d'outils arithmétiques pour étudier la dynamique holomorphe et les espaces de modules de systèmes dynamiques holomorphes s'avère être très fructueuse à plusieurs égards. L'un d'entre eux est l'apparition automatique de phénomènes de rigidité (comme la propriété de Northcott). Un autre est la possibilité d'utiliser des résultats d'équidistribution arithmétique comme vu à la section 2.1.2.

Dans une série de travaux avec Charles Favre, ainsi que dans un travail avec Yûsuke Okuyama et Gabriel Vigny, nous avons voulu explorer certains aspects arithmétiques des familles de polynômes et de fractions rationnelles.

#### 4.1.1 Corps globaux et fonctions hauteurs sur les espaces de modules

##### Corps globaux, hauteurs et dynamique

Faisons quelques rappels sur les fonctions hauteurs. On peut consulter [HiSil00] ou [BoGu06] pour plus de détails. Soit  $K$  un *corps global* de caractéristique nulle, c'est-à-dire que  $K$  est soit un corps de nombres, soit le corps des fonctions rationnelles d'une variété projective complexe normale  $X$  (on pourrait faire plus général en changeant le corps des constantes). On note  $M_K$  l'ensemble des *places* de  $K$ , c'est-à-dire un ensemble complet de normes non-triviales sur  $K$  qui sont deux-à-deux non-équivalentes.

- Pour un corps de nombre  $\mathbb{K}$ , les places  $v \in M_{\mathbb{K}}$  correspondent aux premiers de son anneau d'entier  $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$  et la norme correspondante est une norme  $p$ -adique, auxquels il faut rajouter un certain nombre (fini) de places réelles ou complexes (dite places à l'infini),
- Pour un corps de fonctions global  $\mathbf{K} = \mathbb{C}(X)$ , les places  $v \in M_{\mathbf{K}}$  correspondent aux diviseurs premiers  $Z$  de  $X$  et la norme correspondante est donnée par  $\exp(-\text{ord}_Z)$ .

Pour tout  $x \in K$  non-nul, il n'y a qu'un nombre fini de places  $v \in M_K$  pour lesquelles  $|x|_v \neq 1$  et  $K$  satisfait la *formule du produit*

$$\prod_{v \in M_K} |x|_v^{N_v} = 1,$$

où  $N_v > 0$  est donné par  $N_v = 1$  pour tout  $v \in M_K$  si  $K$  est un corps de fonction et  $N_v(K) = [K_v : \mathbb{Q}_v]/[K : \mathbb{Q}]$  si  $K$  est un corps de nombres (ici  $K_v$  est le complété par rapport à la norme  $|\cdot|_v$ ).

Soit  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ . La *fonction hauteur naïve*  $h : \mathbb{P}^N(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{P}^N$  est définie par

$$h_{\mathbb{P}^N}([z_0 : \cdots : z_N]) := \sum_{v \in M_L} N_v(L) \log \max\{|z_0|_v, \dots, |z_N|_v\},$$

où  $L$  est une extension de  $K$  telle que  $[z_0 : \cdots : z_N] \in \mathbb{P}^N(L)$ . Lorsque  $\mathbb{K}$  est un corps de nombre, on dispose de la *propriété de Northcott* :

**Théorème 4.1 (Northcott)** *Pour tous nombres réels  $A, B > 0$ , si  $\mathbb{K}$  est un corps de nombre, l'ensemble  $\{x \in \mathbb{P}^N(\bar{\mathbb{K}}) : h(x) \leq A \text{ et } [\mathbb{K}(x) : \mathbb{K}] \leq B\}$  est fini.*

Une fonction hauteur (de Weil) sur une variété projective  $X$  définie sur un corps global  $K$  est associée à un fibré en droite ample  $L$  sur  $X$  : celui-ci induit un plongement  $\iota_L : X \rightarrow \mathbb{P}^N$  de sorte que  $\iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) = L$  et on définit  $h_{X,L} : X(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

$$h_{X,L} := h_{\mathbb{P}^N} \circ \iota.$$

On peut alors étendre la définition à tout diviseurs et les fonctions hauteurs ainsi définies satisfont un certain nombre de propriétés fonctorielles comme, par exemple, le fait que si  $\varphi : X \rightarrow Y$  est un morphisme et  $L$  est un fibré en droite sur  $Y$ , on a  $h_{Y,L} \circ \varphi = h_{X,\varphi^*L} + O(1)$  (celle-ci sera particulièrement utile).

En utilisant ces propriétés, Call et Silverman [CaSil93] ont construit une fonction hauteur canonique pour tout endomorphisme  $f : X \rightarrow X$  polarisé par un fibré en droites ample  $L$  sur  $X$  :

**Théorème 4.2 (Call-Silverman)** *Soit  $(X, f, L)$  un endomorphisme polarisé défini sur un corps global  $K$ . Supposons que  $f^*L \simeq L^{\otimes d}$ , alors la limite  $\hat{h}_f := \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} h_{X,L} \circ f^n$  est bien définie sur  $X(\bar{K})$  et satisfait  $\hat{h}_f = h_{X,L} + O(1)$  et  $\hat{h}_f \circ f = d \cdot \hat{h}_f$ . De plus,  $\hat{h}_f : X(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R}$  est caractérisée par ces deux propriétés.*

*Enfin, si  $K$  est un corps de nombre, l'ensemble des points  $x \in X(\bar{K})$  de hauteur nulle  $\hat{h}_f(x) = 0$  sont exactement les points prépériodiques de  $f$ .*

Ce résultat est l'un des premiers au sein du vaste et très vivant champs de recherche qu'est la dynamique arithmétique. On pourra consulter [BenIng<sup>+</sup>19] pour un état de l'art actuel et une liste de problèmes encore ouverts.

### Retour aux espaces de modules de polynômes et fractions rationnelles

Revenons maintenant aux espaces de modules des fractions rationnelles et des polynômes. Ces deux espaces de modules sont des variété affines définies sur  $\mathbb{Q}$ . On peut donc définir des fonctions hauteurs sur ces espaces de modules. Une question est de savoir si on peut en construire qui soient dynamiquement pertinentes.

On peut faire le parallèle entre la géométrie des courbes elliptiques et la dynamique des fractions rationnelles sur  $\mathbb{P}^1$  comme suit (voir [Sil12] par exemple) :

Courbe modulaire	Espace des modules $\mathcal{M}_d$
Courbe elliptique	Fraction rationnelle sur $\mathbb{P}^1$
points de torsions	points prépériodiques
multiplication complexe	postcritiquement fini

Silverman a alors conjecturé que les paramètres PCF étaient les points de hauteur nulle pour une bonne hauteur de Weil. Autrement dit, si on définit pour  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  définie sur  $\bar{\mathbb{Q}}$ , la *hauteur critique*  $h_{\text{crit}} : \mathcal{M}_d(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$h_{\text{crit}}([f]) := \sum_{c \in \text{Crit}(f)} \hat{h}_f(c) ,$$

alors  $h_{\text{crit}}$  est une hauteur de Weil associée à un diviseur ample sur  $(\mathcal{M}_d \setminus \mathcal{L}_d)(\bar{\mathbb{Q}})$ , où  $\mathcal{L}_d$  est la courbe de  $\mathcal{M}_d$  des exemples de Lattès flexibles. Cela suit bien le parallèle présenté ci-dessus : les points de petite hauteur pour  $h_{\text{crit}}$  sont les classes de conjugaison  $[f]$  telles que  $\hat{h}_f(c) = 0$  pour tout  $c \in \text{Crit}(f)$ , ou encore telles que  $c$  est prépériodique pour  $f$  par la propriété de Northcott. On peut également remarquer que le fait d'exclure la courbe des Lattès flexibles  $\mathcal{L}_d$  n'est pas un choix fait au hasard : ces fractions rationnelles sont PCF donc on a  $h_{\text{crit}} \equiv 0$  sur  $\mathcal{L}_d(\bar{\mathbb{Q}})$ . Cette hauteur ne peut donc pas être associée à un diviseur ample sur  $\mathcal{L}_d$ .

Ingram a prouvé cette conjecture d'abord sur  $\mathcal{P}_d$  en montrant que  $h_{\text{crit}} : \mathcal{P}_d(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une hauteur de Weil associée à un diviseur ample [Ing12]. Remarquons que le résultat que l'on a prouvé avec Charles Favre dans [FavGau15] est un résultat plus fort : nous montrons que la hauteur définie en Section 2.1.2 définie par

$$h_{\text{bif}}(c, a) := \frac{1}{[\mathbb{Q}(c, a) : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_{\mathbb{Q}}(c, a)} N_v G_v(c, a),$$

sur la famille des polynômes  $P_{c,a}$  paramétrée par  $(\star)$ , où  $G_v(c, a) = \max_{0 \leq j \leq d-2} g_{P_{c,a},v}(c_j)$ , est induite par une *métrisation adélique semi-positive continue* sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-1}}(1)$  : cela signifie que la fonction  $G_v : \mathbb{A}_{\mathbb{C}_v}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  définit une métrique continue  $|\cdot|_{G_v} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-1}}(1) \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur l'espace analytifié de Berkovich de  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}_v}^{d-1}$  par

$$|\sigma|_{G_v} := |\sigma|_v e^{-G_v} , \quad \text{sur } \mathbb{A}_{\mathbb{C}_v}^{d-1, \text{an}}$$

pour toute section  $\sigma$  de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-1}}(1)$  définie sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}_v}^{d-1, \text{an}}$ , où l'on a vérifié que

1.  $G_v$  est continue et  $G_v(c, a) - \log^+ \max\{|c|_v, |a|_v\}$  s'étend continuellement à  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_v}^{d-1, \text{an}}$ ,
2.  $G_v(c, a) \equiv \log^+ \max\{|c|_v, |a|_v\}$  pour tout  $v \in M_{\mathbb{Q}} \setminus S$ , avec  $S$  fini,
3. la forme de courbure  $dd^c G_v$  est positive au sens faible à toute place (ce qui revient à dire que  $G_v$  est plurisousharmonique).

Il s'agit d'une information plus précise que celle demandée dans la conjecture de Silverman et la hauteur  $h_{\text{bif}}$  est ce qu'on appellera une *hauteur d'Arakelov* sur  $\mathbb{P}^{d-1}$ . On peut alors utiliser le théorème de Yuan [Yua08] qui donne ici :

**Théorème 4.3 (Yuan)** *Si  $(c_n, a_n) \in \bar{\mathbb{Q}}^{d-1}$  est une suite telle que la suite de hauteurs  $h_{\text{bif}}(c_n, a_n)$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , et telle que, si  $X_n$  est l'orbite de  $(c_n, a_n)$  par l'action de  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ , pour toute sous-variété  $V \subset \mathbb{A}^{d-1}$  définie sur  $\mathbb{Q}$ , on a  $\text{Card}(X_n \cap V(\bar{\mathbb{Q}})) = o(\text{Card}(X_n))$ .*

*Alors la suite de mesures  $\mu_n := \frac{1}{\text{Card}(X_n)} \sum_{(c,a) \in X_n} \delta_{c,a}$  converge au sens faible des mesures sur  $\mathbb{C}^{d-1}$  vers  $\mu_{\mathcal{C}_d}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .*

## 4.1.2 La hauteur critique est une hauteur de Weil

Ingram [Ing18] a ensuite montré la conjecture de Silverman dans le cas des fractions rationnelles :  $h_{\text{crit}}$  est bien une hauteur de Weil ample sur  $(\mathcal{M}_d \setminus \mathcal{L}_d)(\bar{\mathbb{Q}})$ . Avec Yûsuke Okuyama et Gabriel Vigny, nous donnons une version quantifiée de ce résultat. Afin d'énoncer un résultat précis, il faut introduire un certain nombre de notations.

Fixons  $d \geq 2$  et un plongement  $\iota : \mathcal{M}_d \hookrightarrow \mathbb{A}^N$  pour un certain  $N \geq 2d-2$ . On note  $\bar{\mathcal{M}}_d$  la clôture de Zariski de  $\iota(\mathcal{M}_d)$  dans  $\mathbb{P}^N$  et  $D := \iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ . Il s'agit d'un fibré en droites ample sur  $\bar{\mathcal{M}}_d$ . Soit  $\omega_{\mathcal{M}_d, D} := \iota^*(\omega_{\mathbb{P}^N})$ , où  $\omega_{\mathbb{P}^N}$  est la forme de Fubini-Study de  $\mathbb{P}^N$ . La forme  $\omega_{\mathcal{M}_d, D}$  est Kählerienne sur  $\mathcal{M}_{d, \text{reg}}$  (vu comme variété complexe) et on a

$$\int_{\mathcal{M}_d} \omega_{\mathcal{M}_d, D}^{\wedge(2d-2)} = \text{deg}_D(\mathcal{M}_d).$$

Lorsque  $T$  est un  $(\ell, \ell)$ -courant positif fermé sur la variété complexe  $\mathcal{M}_d$ , on appelle masse de  $T$  sur un borélien  $A \subset \mathcal{M}_d$  relativement à  $D$  la quantité

$$\|T\|_{A, D} := \int_A T \wedge \omega_{\mathcal{M}_d, D}^{\wedge(2d-2-\ell)}.$$

On définit alors deux constantes qui ne dépendent que de  $d$  et  $D$  :

$$C_1(d, D) := \frac{1}{8(d-1)} \left( \frac{\mu_{\text{bif}}(\mathcal{M}_d)}{\text{deg}_D(\mathcal{M}_d)} \right)^{1/(2d-2)} \quad \text{et} \quad C_2(d, D) := (2d-1) \frac{\|T_{\text{bif}}\|_{\mathcal{M}_d, D}}{\text{deg}_D(\mathcal{M}_d)}.$$

Notre version quantifiée de la conjecture de Silverman (et donc du théorème d'Ingram) peut se formuler comme cela :

**Théorème 4.4** ([GauOkuV20]) *Il existe une constante  $A \geq 0$  explicite telle que*

$$C_1(d, D)h_{\mathcal{M}_d, D} - A \leq h_{\text{crit}} \leq (C_1(d, D) + 2C_2(d, D))h_{\mathcal{M}_d, D} + A \quad \text{sur } (\mathcal{M}_d \setminus \mathcal{L}_d)(\bar{\mathbb{Q}}).$$

La stratégie de la preuve est une adaptation de celle d’Ingram. Dans sa preuve, Ingram établit un rapport entre la hauteur critique et la hauteur naïve d’un multiplicateur d’un cycle de très grande période. Au lieu de cela, nous établissons une formule d’approximation quantitative de l’exposant de Lyapunov  $L_v(f)$  de  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  définie sur un corps de nombre  $\mathbb{K}$  par la moyenne des log des multiplicateurs d’une période donnée à toute place  $v \in M_{\mathbb{K}}$  (nous donnerons la formule plus bas). En sommant à toutes les places, on trouve une relation quantitative entre la hauteur critique et la *hauteur des multiplicateurs*.

Ensuite, en suivant l’idée d’Ingram (qui travaille lui toujours avec un seul multiplicateur) nous établissons que la *hauteur des multiplicateurs* définit une hauteur de Weil ample sur  $(\mathcal{M}_d \setminus \mathcal{L}_d)(\bar{\mathbb{Q}})$  : l’application

$$\Lambda_n : [f] \in \mathcal{M}_d \longmapsto (\sigma_{1,n}(f), \dots, \sigma_{d_n,n}(f)) \in \mathbb{A}^{d_n}$$

qui à la classe de conjugaison de  $f$  associe les fonctions symétriques de tous les multiplicateurs de période formelle exacte  $n$  (ce sont les zéros de  $p_n(f, \cdot) : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$ ) est un morphisme défini sur  $\bar{\mathbb{Q}}$  et on peut définir la hauteur des multiplicateurs sur  $\mathcal{M}_d$  comme

$$h_{\text{Mult}_{n,d}} := \frac{1}{nd_n} h_{\mathbb{P}^{d_n}} \circ \Lambda_n : \mathcal{M}_d(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

En utilisant encore la même idée de tester les formules d’approximations quantitatives sur la variété complexe  $\mathcal{M}_d$  contre les bonnes formes DSH (comme dans [GauOkuV19] et [GauV19b]) et en utilisant le critère numérique de Siu qui garantit qu’un fibré en droites est gros et nef, on établit l’existence d’une constante  $C \geq 0$ , calculable explicitement et telle que

$$\frac{1}{2}C_1(d, D)h_{\mathcal{M}_d, D} - C \leq h_{\text{Mult}_{n,d}} \leq \left( C_2(d, D) + \frac{5}{2}C_1(d, D) \right) h_{\mathcal{M}_d, D} + C$$

sur  $(\mathcal{M}_d \setminus \mathcal{L}_d)(\bar{\mathbb{Q}})$ . En utilisant ensuite les propriétés de functorialité des fonctions hauteurs et encore une fois notre formule d’approximation quantitative, on obtient le résultat voulu.

Une conséquence facile de ces deux formules explicites est que l’on peut quantifier la propriété mise en lumière dans [McM87] par McMullen qui dit que *les multiplicateurs des points périodiques de période assez grande déterminent, à un choix fini près, la classe de conjugaison de la fractions rationnelle*.

**Théorème 4.5** ([GauOkuV20]) *Il existe un entier  $n_1 \geq 1$  que l’on peut calculer explicitement en fonction de  $d$ ,  $\mu_{\text{bif}}(\mathcal{M}_d)$ ,  $\|T_{\text{bif}}\|_{\mathcal{M}_d, D}$  et  $\deg_D(\mathcal{M}_d)$  et tel que pour tout  $n \geq n_1$ , l’application des multiplicateurs (sur  $\mathbb{C}$ )*

$$\Lambda_n : \mathcal{M}_d \longrightarrow \mathbb{C}^{d_n}$$

*est finie sur  $(\mathcal{M}_d \setminus \mathcal{L}_d)(\mathbb{C})$ .*

**Exemple 4.1** A titre d'illustration, lorsque  $d = 2$ , on peut choisir  $\iota : \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{A}^2$  d'après [Mil93, Sil98] et donc  $D = \iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ . On a alors  $\|T_{\text{bif}}\|_{\mathcal{M}_2, D} = 1/2$  et  $\mu_{\text{bif}}(\mathcal{M}_d)$  est donné au Corollaire 2.24. Un calcul simple donne  $\sigma_2(n)/2^n \leq \sqrt{0.1875}/6352$  et donc  $n \geq 27$ . Ce résultat n'est pas complètement satisfaisant, puisque l'on sait que l'isomorphisme  $\iota$  est donné par  $\Lambda_1$ . Cependant, il est à noter que  $\Lambda_2$  n'est pas une application finie puisqu'une fraction rationnelle quadratique a un unique 2-cycle donc il est faux que  $\Lambda_n$  est finie pour tout  $n \geq 1$  et on s'attend à ce que  $\Lambda_n$  soit finie pour tout  $n \neq 2$ .

Explicitons maintenant ce qu'est la formule d'approximation que l'on établit. Soit  $(K, |\cdot|)$  un corps de caractéristique nulle qui est algébriquement clos et complet par rapport à une norme non-archimédienne. Lorsque  $f : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$  est une fraction rationnelle définie sur  $K$ , elle s'étend en un morphisme de l'espace analytifié de Berkovich  $\mathbb{P}_K^{1, \text{an}}$  et on peut encore définir sa mesure de Green  $\mu_f$ . Son exposant de Lyapunov est alors donné, comme dans le cas complexe, par

$$L(f) := \int_{\mathbb{P}_K^{1, \text{an}}} \log(f^\#) d\mu_f \in \mathbb{R},$$

où  $f^\#$  étend à  $\mathbb{P}_K^{1, \text{an}}$  de la dérivée cordale sur  $\mathbb{P}_K^1$ . Pour  $n \geq 1$  et  $r \in ]0, 1]$ , on pose

$$L_n(f, r) := \frac{1}{nd_n} \sum_{z \in \text{Fix}^*(f^n)} \log \max\{r, |(f^n)'(z)|\},$$

où  $\text{Fix}^*(f^n)$  désigne l'ensemble des points de période exacte formelle  $n$ , i.e. les points de période exacte  $n$  et les points paraboliques de période divisant  $n$ . On pose également

$$\epsilon_{d^n} := \min \left\{ |m|^{d^n} : m \in \{1, \dots, d^n\} \right\}.$$

En utilisant les mêmes idées que dans le cas complexe, on peut établir le résultat d'approximation quantitative de l'exposant de Lyapunov suivant

**Théorème 4.6 ([GauOkuV20])** *Pour toute fraction rationnelle  $f : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$  de degré  $d$ , tout  $n \geq 1$  et tout  $0 < r \leq \epsilon_{d^n}$ , on a*

$$|L_n(f, r) - L(f)| \leq 2(2d - 2)^2 \left( |L(f)| - \frac{6d^2 - 4d - 1}{d(2d - 2)} \log |\text{Res}(F)| - \log r \right) \frac{\sigma_2(n)}{d^n},$$

où  $F : K^2 \rightarrow K^2$  est un relevé polynomial de  $f$  tel que  $\max\{|\alpha|, \alpha \text{ coefficient de } F\} = 1$ .

On donne également une version précise du théorème 2.19 où la constante  $C(f)$  est également rendue complètement explicite. La condition  $0 < r \leq \epsilon_{d^n}$  (qui est plus restrictive que dans le cas complexe) vient du fait que, lorsqu'un point fixe d'une fraction rationnelle sur  $K$  est attractif mais que son multiplicateur n'est *pas assez petit*, alors il n'attire pas nécessairement un point critique. Si celui-ci est plus petit que  $\epsilon_d$ , alors Benedetto, Ingram, Jones et Levy [BenIng<sup>+</sup>14] ont montré que ce point fixe attire un point critique de  $f$ .

Une application facile de ce théorème donne une estimation de la dégénérescence de l'exposant de Lyapunov dans une famille méromorphe de fractions rationnelles sur un corps non-archimédien (résultat établi par Favre [Fav18a] pour les familles méromorphes d'endomorphisme holomorphes de  $\mathbb{P}^k$ ) : soient  $\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$  le disque unité ouvert de  $K$  et  $\mathcal{O}(\mathbb{D})$  l'anneau des séries formelles  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in K[[t]]$  sur  $K$  convergeant sur le disque unité, et  $\mathcal{O}(\mathbb{D})[t^{-1}]$  l'anneau des fonction méromorphes sur  $\mathbb{D}$  à pôles au plus en 0. On peut identifier  $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D})[t^{-1}](z)$  à une famille analytique  $\hat{f} : \mathbb{D} \setminus \{0\} \times \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\} \times \mathbb{P}_K^1$  donnée par ses spécialisations. On l'appellera donc *famille méromorphe* de fractions rationnelles sur  $K$ . On établit :

**Théorème 4.7 ([GauOkuV20])** *Pour toute famille méromorphe  $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D})[t^{-1}](z)$  de fractions rationnelles de degré  $d$ , on a*

$$L(f_t) = L(f) \log |t|^{-1} + o(\log |t|^{-1}) \quad \text{quand } t \rightarrow 0.$$

De plus,  $L(f) \geq 0$  si  $K$  est de caractéristique résiduelle nulle.

On peut également utiliser l'approche de la preuve du théorème 4.4 pour donner quelques conséquences sur les fraction rationnelles définies sur le corps des fonctions d'une courbe projective complexe. Ce qu'on peut prouver est une caractérisation du fait d'être Lattès ou isotrivial par la croissance de la hauteur naïve de  $\Lambda_n(f)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  :

**Théorème 4.8 ([GauOkuV20])** *Soient  $\mathbf{K} = \mathbb{C}(X)$  le corps des fonctions rationnelles sur une courbe projective complexe lisse et  $f : \mathbb{P}_{\mathbf{K}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{K}}^1$  une fraction rationnelle définie sur  $\mathbf{K}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $f$  est isotriviale ou  $f$  est un exemple de Lattès non-isotrivial,
2.  $h_{\mathbb{P}^{d_n}}(\Lambda_n(f)) = \max_j \deg(\sigma_{j,n}(f)) = o(nd^n)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,
3.  $h_{\mathbb{P}^{d_n}}(\Lambda_n(f)) = \max_j \deg(\sigma_{j,n}(f)) = O(n\sigma_2(n))$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

### 4.1.3 La hauteur associée à une paire dynamique polynomiale

Toute la suite de ce chapitre est basée sur des travaux en collaboration avec Charles Favre. Une des clés de voûte de tous ces travaux est la construction, pour une famille algébrique  $\hat{P}$  de polynômes paramétrée par une courbe affine irréductible lisse  $C$  définie sur un corps de nombre  $\mathbb{K}$  et un point marqué  $a \in \mathbb{K}[C]$ , d'une hauteur

$$h_{\hat{P},a} : C(\bar{\mathbb{K}}) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

qui soit une hauteur d'Arakelov dont les points de hauteur nulle sont exactement les paramètres  $t \in C(\bar{\mathbb{K}})$  auxquels le point marqué  $a(t)$  est prépériodique pour  $P_t$ .

Rappelons que la donnée de  $(\hat{P}, a)$  est appelée une paire dynamique polynomiale paramétrée par  $C$ . On définit  $h_{\hat{P},a}$  par :

$$h_{\hat{P},a}(\lambda) := \hat{h}_{P_\lambda}(a(\lambda)), \quad \lambda \in C(\bar{\mathbb{K}}).$$

Pour toute la suite, on se donne une compactification projective lisse  $\bar{C}$  de  $C$ . On montre avec Charles Favre que  $h_{\hat{P},a}$  est toujours une hauteur d'Arakelov.

**Théorème 4.9 ([FavGau18b])** Soient  $C$  une courbe affine irréductible lisse définie sur un corps de nombre et  $(\hat{P}, a)$  une paire dynamique polynomiale non-isotriviale paramétrée par  $C$ . Supposons que  $(\hat{P}, a)$  n'est pas stablement prépériodique.

Alors il existe un entier  $q \geq 1$  tel que  $q \cdot h_{\hat{P},a}$  est induite par une métrisation adélique semi-positive continue sur un fibré en droites ample sur  $\bar{C}$ . De plus,

1. la hauteur de la courbe  $\bar{C}$  est nulle :  $h_{\hat{P},a}(\bar{C}) = 0$ ,
2.  $h_{\hat{P},a}(t) = 0$  si et seulement si  $a(t)$  est prépériodique sous itération de  $P_t$ ,
3. pour toute place  $v \in M_{\mathbb{K}}$ , la forme de courbure de la métrique sur  $\bar{C}_{\mathbb{C}_v}^{\text{an}}$  est la mesure positive  $dd^c g_{\hat{P},a,v}$ , où on a posé  $g_{\hat{P},a,v}(\lambda) := g_{P,\lambda,v}(a(\lambda))$ .

Remarquons que l'hypothèse “non-stablement prépériodique” revient, grâce au travail de DeMarco au fait que la mesure de bifurcation  $\mu_{\hat{P},a,v} = dd^c g_{\hat{P},a,v}$  est non-nulle à toute place archimédienne de  $\mathbb{K}$ . On peut être un peu plus précis : on peut en fait contruire le fibré ample et construire explicitement la métrisation adélique. Rappelons que lorsque  $P$  est un polynôme défini sur un corps global  $K$  et  $v \in M_K$ , on définit la fonction de Green de  $P$  à la place  $v$  par

$$g_{P,v} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |P^n|_v.$$

Il s'agit d'une fonction sousharmonique continue sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}_v}^{1,\text{an}}$ . Revenons au théorème 4.9 ci-dessus : la famille  $\hat{P}$  se restreint sur la fibre générique de  $C \times \mathbb{P}^1 \rightarrow C$  en un polynôme  $P$  de degré défini sur  $\mathbf{K} := \mathbb{C}(\bar{C})$  et au point marqué  $a$  correspond un point  $\mathbf{a} \in \mathbf{K}$ . Le diviseur  $D_{\hat{P},a}$  associé à la paire  $(\hat{P}, a)$  est défini par

$$D_{\hat{P},a} := \sum_{\mathfrak{v} \in M_{\mathbf{K}}} g_{P,\mathfrak{v}}(\mathbf{a})[\beta_{\mathfrak{v}}] = \sum_{\beta \in \bar{C} \setminus C} g_{P,\mathfrak{v}(\beta)}(\mathbf{a})[\beta],$$

où  $\beta_{\mathfrak{v}}$  est le point fermé de  $\bar{C}$  correspondant à la place  $\mathfrak{v}$  de  $\mathbf{K}$ . Il est facile de voir que  $D_{\hat{P},a}$  est un  $\mathbb{Q}$ -diviseur effectif de degré

$$\deg(D_{\hat{P},a}) = \int_{C_{\mathbb{C}_v}^{\text{an}}} dd^c g_{\hat{P},a,v} = \hat{h}_P(\mathbf{a}) > 0,$$

pour toute place  $v \in M_{\mathbb{K}}$  du corps de définition de  $C$ . Par ailleurs, à chaque place  $v$ , la fonction  $g_{\hat{P},a,v}$  induit une métrique semi-positive sur le  $\mathbb{Q}$ -diviseur ample  $\mathcal{O}(D_{\hat{P},a})$ . Le nombre entier  $q$  étant là pour s'assurer de bien avoir un diviseur et non un  $\mathbb{Q}$ -diviseur.

On peut maintenant dire quelques mots de la preuve. La difficulté importante de ce théorème réside dans la *continuité* de la métrique aux points  $\bar{C} \setminus C$  de la courbe  $C$ . Le cœur de la preuve consiste donc à prouver cette continuité aux pointes.

Voici le contexte dans lequel nous travaillons. Soit  $(K, |\cdot|)$  un corps algébriquement clos complet pour une norme non-triviale. Rappelons que  $\mathcal{O}(\mathbb{D})[t^{-1}]$  est l'anneau méromorphe sur  $\mathbb{D}$  avec un seul pôle (possible) en 0. Étant donnée une famille méromorphe  $\hat{P} : \mathbb{D} \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^1$  de polynômes de degré  $d \geq 2$  associé  $P \in \mathcal{O}(\mathbb{D})[t^{-1}][z]$  et un

point marqué  $a : \mathbb{D} \setminus \{0\}$  associé à  $\mathbf{a} \in \mathcal{O}(\mathbb{D})[t^{-1}]$ , il existe  $\alpha \geq 0$  tel que la fonction  $g_{P_t}(a(t)) - \alpha \log |t|^{-1}$  est bornée sur  $\mathbb{D}$ .

Nous montrons le résultat suivant

**Théorème 4.10 ([FavGau18b])** *Sous les conditions énoncées ci-dessus sur  $P$  et  $\mathbf{a}$ , on a  $g_P(\mathbf{a}) \in \mathbb{Q}_+$  et la fonction  $h$  définie par*

$$h(t) := g_{P_t}(a(t)) - g_P(\mathbf{a}) \log |t|^{-1}$$

sur  $\mathbb{D}^*$  s'étend par continuité à l'origine. De plus,

1. soit il existe un changement de coordonnées affine dépendant analytiquement du paramètre  $t$  conjugant  $P_t$  à  $Q_t$  tel que la famille  $Q$  est analytique  $\deg(Q_0) = d$ , et  $g_P(\mathbf{a}) = 0$  ;
2. soit  $g_P(\mathbf{a}) > 0$  et  $h$  est harmonique au voisinage de 0 ;
3. soit  $g_P(\mathbf{a}) = 0$  et  $h(0) = 0$ .

Ce résultat était précédemment connu dans le cas des polynômes cubiques pour les points *critiques* marqués, on renvoie à [GhiYe18, Theorem 3.3]. En effet, le cas  $g_P(\mathbf{a}) = 0$  constitue le cœur de la preuve de la continuité de  $h(t)$  et nous suivons la même idée que celle qu'ils utilisent pour cette étape cruciale.

Voici comment on procède. Un calcul simple faisant intervenir le Nullstellensatz implique l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que

$$\left| \frac{1}{d} \log \max\{1, |P_t(z)|\} - \log \max\{1, |z|\} \right| \leq C \log |t|^{-1} \quad (4.1.1)$$

pour tout  $0 < |t| < 1/2$  et pour tout  $z \in K$ . En utilisant (4.1.1), il n'est pas difficile de voir que  $g_{P_t}(a(t)) = \alpha \log |t|^{-1} + o(\log |t|^{-1})$  pour une certaine constante  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  (on peut consulter [DeM16, §3]). Pour aller plus loin, il faut interpréter la constante  $\alpha$  en termes de la dynamique du polynôme à coefficients dans  $K((t))$  qui est naturellement induit par la famille  $P_t$ .

On munit l'anneau  $\mathcal{O}(\mathbb{D})[t^{-1}]$  de la norme  $t$ -adique  $|\cdot|$ , (dont la restriction à  $K$  est triviale) normalisée pour que  $|t| = e^{-1}$ . Observons que la complétion de son corps des fractions est le corps des séries de Laurent  $(K((t)), |\cdot|)$ . On peut alors voir la famille  $P_t$  comme un polynôme  $P$  à coefficients dans le corps métrisé complet  $(K((t)), |\cdot|)$  et, comme ci-dessus on considère la fonction de Green  $g_P : K((t)) \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Le point marqué  $a$  correspondant à un point  $\mathbf{a} \in K((t))$ , on voit facilement en suivant [Fav18b] que  $\alpha = g_P(\mathbf{a})$ .

Abordons d'abord le cas  $g_P(\mathbf{a}) > 0$  : Le point  $\mathbf{a}$  appartient alors au bassin d'attraction de l'infini de  $P$ , ce qui implique que  $a(t)$  appartient également au bassin d'attraction de l'infini de  $P_t$  pour tout  $t$  suffisamment petit. Pour conclure, on utilise que  $g_{P_t} = \log |\varphi_t|$  proche de l'infini, où  $\varphi_t$  est la coordonnée de Böttcher de  $P_t$  et on développe cette fonction analytique en les deux variables  $z$  et  $t$ .

Lorsque  $g_P(\mathbf{a}) = 0$ , le point  $\mathbf{a}$  est dans l'ensemble de Julia rempli de  $P$ . Puisque  $K((t))$  est à valuation discrète, un résultat de Trucco [Tru14] impose de fortes restrictions

sur l'orbite de  $\mathbf{a}$ . On donne un argument direct montrant que soit  $\mathbf{a}$  est dans l'ensemble de Fatou de  $\mathbf{P}$  et appartient alors à une boule prépériodique sous itération de  $\mathbf{P}$ ; soit  $\mathbf{a}$  appartient à l'ensemble de Julia de  $\mathbf{P}$  et la clôture de son orbite sous itération de  $\mathbf{P}$  est compacte dans  $K((t))$ .

Dans le premier cas, on peut effectuer un changement de coordonnée affine (dependant du paramètre  $t$ ) et supposer que  $P_t(z) = Q(z) + tR_t(z)$  où  $\delta = \deg(Q) \leq d$ . Lorsque  $\delta = d$ , la famille de polynômes  $P_t$  dégénère vers un polynôme de degré  $d$  et la fonction de Green  $g_{P_t}(z)$  est continue conjointement en  $z$  et en  $t$ . Sinon  $\delta < d$ , et un calcul direct donne  $g_{P_t}(a(t)) = o(1)$  comme attendu. Dans le deuxième cas, les calculs sont plus délicats et nous suivons l'argument de Ghioca et Ye. L'observation clé est la suivante : Puisque la clôture de l'orbite de  $\mathbf{a}$  est compacte, pour tout entier  $\ell$  il existe une collection finie de polynômes  $Q_1, \dots, Q_N$  tels que pour tout  $n$ , on ait  $P_t^n(a(t)) = Q_{i_n}(t) + o(t^{\ell+1})$  pour un certain indice  $i_n \in \{1, \dots, N\}$ . La preuve de  $g_{P_t}(a(t)) = o(1)$  utilise cette propriété d'approximation conjointement à (4.1.1) de façon subtile.

Finalement, par la formule de Przytycky (obtenue dans [Oku10, §2] lors que  $(K, |\cdot|)$  est non-archimédien), l'exposant de Lyapunov de  $P_t$  satisfait la formule

$$L(P_t) = \log |d| + \sum_{i=1}^{d-1} g_{P_t}(c_i(t)) ,$$

où  $c_1(t), \dots, c_{d-1}(t)$  sont les points critiques de  $P_t$  dans  $K$ , comptés avec multiplicités.

**Corollaire 4.11 ([FavGau18b])** *Pour tout famille méromorphe  $\hat{P}$  de polynômes de degré  $d \geq 2$  associée à  $\mathbf{P} \in \mathcal{O}(\mathbb{D})[t^{-1}][z]$  défini sur un corps de caractéristique nulle, on a  $L(\mathbf{P}) \in \mathbb{Q}_+$  et la fonction  $t \mapsto L(P_t) - L(\mathbf{P}) \log |t|^{-1}$  s'étend continument en 0.*

*De plus, on a  $L(\mathbf{P}) > 0$  sauf s'il existe un changement de coordonnée affine dépendant de  $t$  conjugant  $P_t$  à une famille de polynômes analytique en 0.*

## 4.2 Intersections improbables pour les paires dynamiques polynomiales

Les travaux que je vais présenter maintenant sont tous axés autour de l'étude de problèmes d'intersections improbables dans les espaces de paramètres de polynômes. Mentionnons ici une version plus précise de la conjecture mentionnée dans le préambule, adaptée au contexte des courbes de polynômes :

**Conjecture 4.1 (Baker-DeMarco, DeMarco)** *Soit  $\hat{P} : \Lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \Lambda \times \mathbb{C}$  est une famille algébrique non-isotriviale de polynômes paramétrée par une courbe quasi-projective  $\Lambda$  et soient  $a, b : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  des points marqués non-stablement prépériodiques pour  $\hat{P}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'ensemble des paramètres  $\lambda \in \Lambda$  tels que  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  sont tous les deux prépériodiques pour  $P_\lambda$  est infini,*

2. les mesures  $\mu_{\hat{P},a}$  et  $\mu_{\hat{P},b}$  sont proportionnelles,
3. il existe une famille  $\hat{Q} : \Lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \Lambda \times \mathbb{C}$  de polynômes et des entiers  $k \geq 1$  et  $n, m \geq 0$  tels que pour tout  $\lambda \in \Lambda$  :

$$P_\lambda^k \circ Q_\lambda = Q_\lambda \circ P_\lambda^k \quad \text{et} \quad P_\lambda^n(a(\lambda)) = Q_\lambda(P_\lambda^m(b(\lambda))).$$

En particulier, si  $\Lambda$  contient une infinité de paramètres PCF, alors pour toute paire  $(a, b)$  de points critiques marqués non-stablement prépériodique l'assertion 3. est vérifiée.

La conjecture initiale de Baker et DeMarco [BakDeM13] porte sur les points critiques marqués et DeMarco [DeM16] a généralisé cette conjecture aux points marqués quelconques.

En collaboration avec Charles Favre, nous donnons une preuve de cette conjecture et nous essayons de donner une classification combinatoire des courbes spéciales. Dans la suite du chapitre, nous nous concentrons sur le développement de ces travaux.

### 4.2.1 Symétries dynamiques d'un polynôme

L'un des aspects peu abordés dans les travaux antérieurs à [FavGau20] sur le sujet, mais qui y jouent un rôle central, est l'étude du groupe des symétries dynamiques d'un polynôme.

Soit  $K$  un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Une *présentation réduite* d'un polynôme unitaire centré  $P \in K[z]$  est le choix de deux entiers  $\mu$  et  $m$  et d'un polynôme  $P_0$  tel que  $P_0(0) \neq 0$ ,  $P(z) = z^\mu P_0(z^m)$ , et  $P_0$  ne peut pas s'écrire sous la forme  $Q(z^l)$ , où  $Q$  est un polynôme et  $l \geq 2$  un entier. Une telle écriture est unique.

**Définition 4.1** *Le groupe  $\Sigma(P)$  des symétries dynamiques d'un polynôme unitaire centré  $P$  de présentation réduite  $P(z) = z^\mu P_0(z^m)$  est le groupe cyclique  $\mathbb{U}_m$  lorsque  $P_0 \neq 1$ ; et est le groupe de toutes les racines de l'unité si  $P$  est un monôme.*

Lorsque  $P \neq z^d$ , l'ordre de  $\Sigma(P)$  est au plus  $d$ , et il vaut  $d$  ssi  $P(z) = z^d + c$  pour un  $c \in K^*$ . Puisque deux polynômes unitaires centrés qui sont conjugués, ils le sont par multiplication par une racine de l'unité (qui forment un groupe abélien),  $\Sigma(P)$  est *canoniquement* isomorphe à  $\mathbb{U}_m$ .

**Définition 4.2** *Le groupe des symétries d'un polynôme  $P \in K[z]$  est défini par*

$$\Sigma(P) := \{A^{-1} \circ \sigma \circ A, \sigma \in \Sigma(A^{-1}PA)\}$$

*pour tout automorphisme affine  $A$  tel que  $A^{-1} \circ P \circ A$  est unitaire centré.*

Ce groupe contient évidemment le groupe des automorphismes de  $P$  :

$$\text{Aut}(P) = \{g \in \text{Aff}(K) : P \circ g = g \circ P\}.$$

En fait, on voit assez facilement que la groupe  $\Sigma(P)$  est la réunion de tous les groupes finis  $G \subset \text{Aff}(K)$  pour lesquels il existe un morphisme  $\rho : G \rightarrow G$  satisfaisant

$$P \circ g = \rho(g) \circ P.$$

Le groupe des automorphisme étant celui pour lequel  $\rho = \text{id}_G$ . On peut donc définir le *groupe  $\Sigma_0(P)$  des symétries réduites* de  $P$  comme

$$\Sigma_0(P) := \bigcup_{n \geq 1} \ker(\rho^n).$$

La première description que nous donnons de  $\Sigma(P)$  est particulière au cas complexe : on voit que si  $P$  n'est pas conjugué à  $z^d$ , ce groupe coïncide avec le groupe les automorphismes qui fixent  $J(P)$ , ou encore avec ceux qui satisfont  $g_P \circ g = g_P$ .

Lorsque  $P = z^d$ , le groupe  $\Sigma(z^d) = \mathbb{U}_\infty$  est l'ensemble des éléments de torsion du groupe des automorphismes qui fixent  $J(z^d) = \mathbb{S}^1$ .

La caractéristion la plus intéressante que nous donnons de ce groupe est valide sur tout corps de caractéristique nulle. Afin de l'énoncer, introduisons la notation  $\text{Preper}(P, K)$  pour décrire l'ensemble des points  $z \in K$  qui sont prépériodiques sous itération de  $P$ .

**Théorème 4.12 ([FavGau20])** *Pour tout corps  $K$  de caractéristique nulle et tout  $P \in K[z]$  de degré  $d \geq 2$ , le groupe  $\Sigma(P)$  coïncide avec l'ensemble des automorphismes  $g \in \text{Aff}(K)$  tels que  $g(\text{Preper}(P, \bar{K})) \cap \text{Preper}(P, \bar{K})$  est un sous-ensemble infini de  $\bar{K}$ .*

La preuve de ce résultat repose sur 2 étapes principales : d'abord on traite le cas où  $P$  est défini sur un corps de nombres  $\mathbb{K}$ . La décomposition de la hauteur canonique  $\hat{h}_P = \sum_{v \in M_{\mathbb{K}}} N_v g_{P,v}$  et le fait que les points de hauteur nulle soient exactement les points prépériodiques donnent le résultat.

L'étape suivante est plus délicate et plus importante pour la suite. Elle repose sur un argument de spécialisation : les coefficients du polynôme  $P$  dans  $K$  engendrent une  $\mathbb{Q}$ -algèbre de type fini  $\mathcal{R}$  dont le spectre  $X = \text{Spec}(\mathcal{R})$  est une variété affine de dimension  $> 0$  si  $P$  n'est pas défini sur un corps de nombre.  $P$  induit donc une famille

$$\hat{P} : X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow X \times \mathbb{A}^1$$

de polynômes et  $g \in \Sigma(P)$  une famille  $\hat{g} : X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow X \times \mathbb{A}^1$  d'automorphismes affines. On montre au passage la propriété suivante.

**Proposition 4.13 ([FavGau20])** *La fonction  $t \in X \mapsto \text{Card}(\Sigma(P_t)) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  est semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski. En particulier, il existe un ouvert de Zariski non-vide de  $X$  sur lequel tous les groupes  $\Sigma(P_t)$  sont isomorphes à  $\Sigma(P)$ .*

On conclut en utilisant des propriétés plus fines que la  $J$ -stabilité des familles de polynômes complexes démontrées par McMullen et Sullivan [McMSul98].

### 4.2.2 Paires dynamiques intriquées

L'objectif principal de la série de travaux faits en collaboration avec Charles Favre est de donner une preuve de la conjecture 4.1. On dit qu'une paire dynamique polynomiale  $(\hat{P}, a)$  est *intégrable* si  $(\hat{P}, a)$  est isotriviale et  $P_\lambda$  est intégrable pour tout paramètre  $\lambda$ . On dit également que la paire  $(\hat{P}, a)$  est *active* si  $(\hat{P}, a)$  n'est pas isotriviale et si  $a$  n'est pas stablement prépériodique. Si  $(\hat{P}, a)$  est paramétrée par une variété affine  $\Lambda$  définie sur un corps  $K$ , on note  $\text{Preper}(\hat{P}, a)$  l'ensemble des paramètres  $\lambda \in \Lambda(K)$  pour lesquels  $a(\lambda)$  est prépériodique sous itération de  $P_\lambda$ .

#### Le cas général : une version renforcée de la conjecture

Notre résultat principal est le suivant.

**Théorème 4.14 ([FavGau20])** *Soient  $(\hat{P}, a)$  et  $(\hat{Q}, b)$  deux paires dynamiques polynomiales actives non-intégrables paramétrées par une courbe affine irréductible  $C$  de degrés respectifs  $d, \delta \geq 2$ . Supposons que la courbe  $C$  et les deux paires sont paramétrées sur un corps de nombre  $\mathbb{K}$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $\text{Preper}(\hat{P}, a) \cap \text{Preper}(\hat{Q}, b)$  est un sous-ensemble infini de  $C(\overline{\mathbb{K}})$ ,
2. les deux fonctions hauteurs  $h_{\hat{P}, a}, h_{\hat{Q}, b} : C(\overline{\mathbb{K}}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  sont proportionnelles,
3. il existe des entiers  $N, M \geq 1$  et  $r, s \geq 0$  et des familles  $\hat{R}, \hat{\tau}$  et  $\hat{\pi}$  de polynômes de degré au moins 1 paramétrées par  $C$  et tels que

$$\hat{\tau} \circ \hat{P}^N = \hat{R} \circ \hat{\tau}, \quad \hat{\pi} \circ \hat{Q}^M = \hat{R} \circ \hat{\pi} \quad \text{et} \quad \hat{\tau} \hat{P}^r(\cdot, a) = \hat{\pi} \circ \hat{Q}^s(\cdot, b).$$

En particulier, on a  $d^N = \delta^M = \deg(\hat{R})$ .

Les implications 3.  $\Rightarrow$  2.  $\Rightarrow$  1. sont faciles à établir et le contenu principal de ce résultat est l'implication 1.  $\Rightarrow$  3. On applique la même stratégie que celle de Baker et DeMarco pour prouver cette implication. Cependant, toutes les étapes nécessitent une adaptation substantielle des arguments mis en place.

D'abord, pour prouver que 1.  $\Rightarrow$  2., nous nous appuyons sur le théorème d'équidistribution des points de petite hauteur de Yuan [Yua08] (prouvé par Thuillier [Thu05] dans le cas des courbes). Le point clé pour pouvoir appliquer ce résultat est le théorème 4.10 ci-dessus. Cela nous permet de montrer que les mesures de bifurcation

$$\mu_{\hat{P}, a, v} \quad \text{et} \quad \mu_{\hat{Q}, b, v} \quad \text{sur la courbe analytique } C_{\mathbb{C}_v}^{\text{an}}$$

sont proportionnelles à toutes les places  $v$  de  $\mathbb{K}$ , avec la même constante de proportionnalité. La proportionnalité des hauteurs découle facilement en utilisant le théorème de rigidité 3.1 des lieux de bifurcations : on prouve que  $g_{\hat{P}, a, v}$  et  $g_{\hat{Q}, b, v}$  sont proportionnelles et on utilise la formule de décomposition de ces hauteurs en contributions locales.

L'implication pour laquelle il reste le plus de travail est l'implication 2.  $\Rightarrow$  3. : on prouve d'abord que les degrés  $d$  et  $\delta$  sont multiplicativement dépendants, en utilisant encore une fois un argument de similarité qui permet, à une place complexe, de d'établir

que l'exposant Hölder de  $g_{\hat{P},a}$  en un paramètre transversalement prérépulsif est rationnellement proportionnel à  $\log d / \log |\rho|$ , où  $\rho$  est le multiplicateur du cycle capturant  $a$  (on adapte ici un argument de [DujFav17] mis en place dans le plan dynamique d'un automorphisme polynomial régulier). On obtient alors 3. en combinant de façon subtile plusieurs ingrédients incluant :

- une compréhension très précise du développement de la coordonnée de Böttcher à l'infini d'un polynôme,
- un résultat d'algébrisation des germes de courbes à l'infini du plan affine  $\mathbb{A}^2$  définies par des séries adéliques dû à Xie [Xie15],
- la classification des courbes affines planes invariantes par  $(R, R)$  où  $R$  est un polynôme non-intégrable. Elle est due à Medvedev et Scanlon [MedSca14] et leur argument repose sur la théorie de Ritt [Rit22] qui décrit toutes les décompositions possibles d'un polynôme comme composée de polynômes de plus bas degré.

Bien sûr, il serait plus satisfaisant d'avoir un énoncé semblable qui soit valable sur n'importe quel corps de caractéristique nulle. En utilisant un argument de spécialisation semblable à celui décrit ci-dessus pour prouver le théorème 4.12. Nous rencontrons ici une difficulté majeure lors de la mise en œuvre de cet argument classique, qui nous impose de faire une hypothèse supplémentaire.

**Théorème 4.15 ([FavGau20])** *Soient  $(\hat{P}, a)$  et  $(\hat{Q}, b)$  deux paires dynamiques polynomiales actives non-intégrables, paramétrées par une courbe affine irréductible  $C$ , de degrés respectifs  $d, \delta \geq 2$  sur un corps  $K$  de caractéristique nulle quelconque. Supposons que*

$$\text{Toute branche à l'infini } \mathfrak{c} \text{ de } C \text{ appartient au support de } D_{\hat{P},a}. \quad (\Delta)$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\text{Preper}(\hat{P}, a) \cap \text{Preper}(\hat{Q}, b)$  est un sous-ensemble infini de  $C(\bar{K})$ ,
2. il existe des entiers  $N, M \geq 1$  et  $r, s \geq 0$  et des familles  $\hat{R}, \hat{\tau}$  et  $\hat{\pi}$  de polynômes de degré au moins 1 paramétrées par  $C$  et tels que

$$\hat{\tau} \circ \hat{P}^N = \hat{R} \circ \hat{\tau}, \quad \hat{\pi} \circ \hat{Q}^M = \hat{R} \circ \hat{\pi} \quad \text{et} \quad \hat{\tau} \hat{P}^r(\cdot, a) = \hat{\pi} \circ \hat{Q}^s(\cdot, b).$$

En particulier, on a  $d^N = \delta^M = \deg(\hat{R})$ .

Bien que l'hypothèse  $(\Delta)$  puisse ne pas être vraie en général, elle est toujours satisfaite lorsque  $C$  n'a qu'une branche à l'infini, par exemple quand  $C = \mathbb{A}^1$  est la droite affine. En particulier, ce résultat est une généralisation de grande envergure du théorème principal de [BakDeM11].

**Définition 4.3** *On dira dans la suite que deux paires dynamiques  $(\hat{P}, a)$  et  $(\hat{Q}, b)$  sont intriquées si  $\text{Preper}(\hat{P}, a) \cap \text{Preper}(\hat{Q}, b)$  est infini.*

Cette terminologie inspirée de la physique quantique reflète le fait que les deux paires sont très fortement corrélées dynamiquement.

### Paires dynamiques intriquées à une paire donnée

Nous fixons maintenant une courbe affine  $C$  et une paire dynamique  $(\hat{P}, a)$  paramétrée par  $C$ , et on suppose que les théorèmes précédents s'appliquent, c'est-à-dire que soit  $C$  et  $(\hat{P}, a)$  sont définies sur un corps de nombre  $\mathbb{K}$ , soit l'hypothèse  $(\Delta)$  est vérifiée. On veut maintenant déterminer *toutes* les paires dynamiques qui sont intriquées avec  $(\hat{P}, a)$ . En principe, il s'agit d'un problème que l'on peut résoudre à l'aide de la théorie de Ritt. Cependant, étant donné un polynôme  $P$ , il est très délicat de décrire *tous* les polynômes  $Q$  pour lesquels on a une relation entre  $P$  et  $Q$  du type de celle qui apparaît dans 3, malgré les progrès récents faits par Pakovich [Pak17].

Nous allons donc nous concentrer sur le cas où  $P = Q$  et nous allons essayer de déterminer toutes les paires dynamiques  $(\hat{P}, b)$  qui sont intriquées avec  $(\hat{P}, a)$ . C'est ici que la notion de symétrie dynamique apparaît de manière cruciale. On se restreint à partir de maintenant au cas des familles *primitives* :

**Définition 4.4** *On dit qu'une famille algébrique  $\hat{P}$  de polynômes paramétrée par  $\Lambda$  est primitive s'il existe un ouvert de Zariski  $\Lambda' \subset \Lambda$  non-vide tel que pour tout  $\lambda \in \Lambda'$ , si on peut écrire  $P_\lambda = g_\lambda \circ Q_\lambda^n$  avec  $n \geq 1$  et  $g_\lambda \in \Sigma(P_\lambda)$ , alors  $n = 1$ .*

En français, cela signifie que pour un paramètre général, le polynôme n'est pas une itérée d'un polynôme de degré plus bas, même à symétrie près.

On obtient alors l'énoncé suivant :

**Théorème 4.16 ([FavGau20])** *Soit  $(\hat{P}, a)$  une paire dynamique polynomiale primitive active non-intégrable paramétrée par une courbe affine  $C$  définie sur un corps  $K$  de caractéristique nulle. Supposons que soit  $K$  est un corps de nombre, soit  $K$  vérifie  $(\Delta)$ . Alors pour toute autre paire dynamique  $(\hat{P}, b)$  active, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $\text{Preper}(\hat{P}, a) \cap \text{Preper}(\hat{Q}, b)$  est un sous-ensemble infini de  $C(\bar{K})$ ,
2. il existe une famille  $\hat{g} \in \Sigma(\hat{P})$  de symétries et  $r, s \geq 0$  entiers tels que,

$$P_\lambda^r(a(\lambda)) = g_\lambda \circ P_\lambda^s(b(\lambda)), \quad \text{pour tout } \lambda \in C.$$

Remarquons que cela donne une réponse à la Question 1.3 de [GhiHsTu13] pour les polynômes. Ce résultat ne décrit pas vraiment les paires  $(\hat{P}, b)$  intriquées avec  $(\hat{P}, a)$  : en effet, si  $r = 0$  et si  $s$  est assez grand, les solutions  $b$  de  $P_\lambda^s(b(\lambda)) = a(\lambda)$  ne définissent pas forcément des fonctions régulières sur  $C$ , mais  $b$  appartient à une extension de  $K(C)$  de degré au plus  $d^r$ .

Sur cette question, on prouve le résultat suivant :

**Théorème 4.17 ([FavGau20])** *Soit  $(\hat{P}, a)$  une paire dynamique polynomiale primitive active non-intégrable paramétrée par une courbe affine  $C$  définie sur  $\mathbb{Q}$ .*

*Alors tout point marqué  $b \in \mathbb{Q}[C]$  tel que la paire dynamique  $(\hat{P}, b)$  est intriquée à  $(\hat{P}, a)$  appartient à l'ensemble  $\{g \circ \hat{P}(a) : g \in \Sigma_0(\hat{P})\}$ , à l'exception possible d'un nombre fini d'entre eux.*

Ce résultat semble nouveau, même dans le cas des familles unicritiques. Evidemment, il serait plus naturel de faire l’hypothèse que la paire  $(\hat{P}, a)$  est définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, mais nous utilisons de façon cruciale que le corps  $\bar{\mathbb{Q}}$  est remplacé par un corps de nombre.

Chose intéressante, la preuve de ce résultat de finitude repose sur les mêmes ingrédients que celle du théorème 4.14, à savoir le développement de la coordonnée de Böttcher, le résultat d’algébrisation des germes de courbes adéliques de Xie, et la théorie de Ritt. La preuve nous montre également qu’il est suffisant de supposer que  $b \in \bar{\mathbb{Q}}(C)$ .

**Exemple 4.2** On peut se concentrer sur le cas de la famille unicritique de degré  $d$ , à savoir le cas de la famille  $\hat{P}_d$  paramétrée par  $\mathbb{A}^1$  et où  $P_{d,\lambda}(z) = z^d + \lambda$ . Dans ce cas-là, Baker et DeMarco [BakDeM11] montrent que si  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $\text{Preper}(\hat{P}_d, a) \cap \text{Preper}(\hat{P}_d, b)$  est infini, alors  $a^d = b^d$ . Ce résultat a été généralisé par Ghioca Hsia et Tucker [GhiHsTu13] à des familles plus générales.

De notre côté, en utilisant les résultats précédents, nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 4.18 ([FavGau20])** *Soient  $d, \delta \geq 2$ . Soient  $a, b \in \mathbb{C}[\lambda]$  deux polynômes de même degré. Si  $\text{Preper}(\hat{P}_d, a) \cap \text{Preper}(\hat{P}_\delta, b)$  est infini, alors  $d = \delta$  et  $a^d = b^d$ .*

On initie également l’exploration de la structure d’un ensemble de “Mandelbrot supérieur”  $\mathbb{M}_d$  : il s’agit de l’ensemble des nombres complexes  $\rho \in \mathbb{C}^*$  tels que le lieu de bifurcation de la paire dynamique  $(\hat{P}_d, a_\rho)$  est connexe, où  $a_\rho(\lambda) = \rho^{-1}\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Si on note  $M_\rho := \{\lambda \in \mathbb{C} : \rho^{-1}\lambda \in K(P_{d,\lambda})\}$ , on sait que  $\text{Bif}(\hat{P}_d, a_\rho) = \partial M_\rho$  et que  $\text{Bif}(\hat{P}_d, a_\rho)$  est connexe si et seulement si  $M_\rho$  l’est. On montre alors que  $\rho \in \mathbb{M}_d$  si et seulement si  $M_\rho$  est contenu dans l’ensemble de Multibrot  $\mathbb{M}_d$ , que  $\mathbb{M}_d$  est fermé dans  $\mathbb{C}^*$ , est contenu dans le disque unité fermé pointé et contient le disque pointé  $\mathbb{D}(0, 1/8) \setminus \{0\}$ .

## 4.3 Courbes spéciales de polynômes

Nous en venons finalement aux résultats que nous avons obtenu en collaboration avec Charles Favre sur la Conjecture dite d’André-Oort dynamique. Nous avons prouvé cette conjecture pour les courbes dans l’espace des modules  $\mathcal{P}_d$  des polynômes de degré  $d$  pour tout  $d \geq 3$ . Il faut noter que cette Conjecture n’est pas pertinente pour les polynômes de degré  $d = 2$ . En effet, il n’y a alors qu’un seul point critique actif et l’espace des modules  $\mathcal{P}_2 \simeq \mathbb{A}^1$  est une courbe (spéciale) donnée par une relation dynamique sur un point critique : la relation  $P(\infty) = \infty$ .

### 4.3.1 Le cas cubique

Bien qu’il soit essentiellement la même en tous degrés, nous avons initialement donné une preuve légèrement différente dans le cas  $d = 3$  des polynômes cubiques et donné un résultat plus précis, puisqu’il est ici possible de le faire.

On travaille de nouveau dans la paramétrisation orbifold  $(\star)$ , qui donne ici

$$P_{c,a}(z) = \frac{1}{3}z^3 - \frac{c}{2}z^2 + a^3, \quad (c, a) \in \mathbb{C}^2.$$

Les points critiques de  $P_{c,a}$  sont toujours  $\text{Crit}(P_{c,a}) = \{0, c\}$ . Dans le cas présent, nous montrons le théorème de classification suivant.

**Théorème 4.19 ([FavGau18a])** *Une courbe irréductible  $C \subset \mathbb{C}^2$  contient une infinité de paramètres  $(c, a)$  pour lesquels  $P_{c,a}$  est PCF si et seulement si on est dans une des situations suivantes :*

1. *L'un des deux points critiques est stable et préperiodique sur  $C$ , c'est-à-dire qu'il existe  $m > 0$  et  $k \geq 0$  tels que  $P_{c,a}^{m+k}(c_0) = P_{c,a}^k(c_0)$  ou  $P_{c,a}^{m+k}(c_1) = P_{c,a}^k(c_1)$  pour tout  $(c, a) \in C$ .*
2. *Il existe une collision persistante entre les deux orbites critiques sur  $C$ , c'est-à-dire qu'il existe  $(m, k) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 1)\}$  tels que  $P_{c,a}^m(c_1) = P_{c,a}^k(c_0)$  pour tout  $(c, a) \in C$ .*
3. *La courbe  $C$  est donnée par l'équation  $\{(c, a), 12a^3 - c^3 - 6c = 0\}$ , et coïncide avec la courbe des polynômes cubiques  $P_{c,a}$  possédant un groupe d'automorphismes non-trivial, c'est-à-dire avec l'ensemble des paramètres  $(c, a)$  pour lesquels  $g_c(z) := -z + c$  commute avec  $P_{c,a}$ .*

Ce résultat a été obtenu de façon indépendante par Ghioca et Ye [GhiYe18] avec une preuve légèrement différente, bien que reposant sur les mêmes ingrédients essentiels.

La différence notable entre la démonstration du théorème 4.14 et celle que nous donnons de ce théorème (qui est antérieure) se situe au niveau de l'application du théorème d'équidistribution arithmétique. D'abord, l'hypothèse faite qu'il y a une infinité de paramètres PCF garantit que  $C$  est définie sur un corps de nombres  $\mathbb{K}$ . Ensuite, au lieu de montrer directement que les métriques adéliques  $\{g_{\hat{P},0,v}\}_{v \in M_{\mathbb{K}}}$  et  $\{g_{\hat{P},c,v}\}_{v \in M_{\mathbb{K}}}$  sont continues en toute branche à l'infini de  $C$ , on utilise qu'*au moins* l'une des deux l'est et on construit une famille à deux paramètres réels de métriques en posant

$$g_{s,t} := \max\{s \cdot g_{\hat{P},0,v}, t \cdot g_{\hat{P},c,v}\}.$$

Fixons  $s, t \in \mathbb{R}_+^*$ , cette métrique est alors semipositive et continue sur un  $\mathbb{R}$ -fibré en droites ample  $\mathbf{D}_{s,t}$  sur  $C_{\mathbb{C}_v}^{\text{an}}$ . On rejoint alors le cours de la preuve du théorème 4.14 par un argument de continuité de la forme de courbure par rapport à  $(s, t)$ .

Dans cette famille, les sous-variétés  $\text{Per}_n(w)$  sont des courbes et il est naturel de se demander lesquelles peuvent contenir un ensemble infini de paramètres PCF. Dans l'espace des modules  $\mathcal{M}_2$  des fractions rationnelles quadratiques, DeMarco a conjecturé que pour tout  $n \geq 1$ , seule  $\text{Per}_n(0)$  contient une infinité de paramètres PCF.

Nous montrons cette conjecture dans l'espace des modules des polynômes cubiques.

**Théorème 4.20 ([FavGau18a])** *Pour tout  $n \geq 1$ , la courbe  $\text{Per}_n(w) \subset \mathcal{P}_3$  contient une infinité de classes de conjugaisons PCF si et seulement si  $w = 0$ .*

La preuve repose sur un résultat de classification démontré au théorème 4.19 : si aucun des deux points critique n'est stablement prépériodique sur une courbe  $C$  qui contient une infinité de paramètres PCF, alors les deux fonctions de Green complexes  $g_{\hat{P},0}$  et  $g_{\hat{P},c}$  sont proportionnelles sur cette courbe.

Supposons qu'il existe  $w \neq 0$  et une composante irréductible  $C$  de  $\text{Per}_n(w)$  qui contient une infinité de paramètres PCF. Il est connu que cela implique  $|w| > 1$ , puisqu'un cycle non-répulsif contraint la dynamique d'au moins un point critique. Chaque branche à l'infini de  $C$  induit un polynôme cubique défini sur  $\mathbb{C}((t))$  et les travaux de Kiwi [Kiw06] sur la dynamique des polynômes cubiques sur  $\mathbb{C}((t))$  impliquent alors que, sauf si l'un des points critiques est stablement prépériodique, tous les multiplicateurs des cycles répulsifs explosent le long de la branche. Ceci contredit le fait que  $C \subset \text{Per}_n(w)$ .

Puisque l'un des points critiques est stablement prépériodique, chaque branche à l'infini de  $C$  donne lieu à une limite renormalisée en cette branche (qui est unicritique de degré 2). En analysant la norme 3-adique des multiplicateurs des polynômes unicritiques PCF cubiques et quadratiques, on arrive à une contradiction.

### 4.3.2 Le cas général : vers une classification combinatoire

Rappelons qu'une famille algébrique  $\hat{P} : C \times \mathbb{C} \rightarrow C \times \mathbb{C}$  de polynômes de degré  $d$  est dite *critiquement marquée* s'il existe  $d - 1$  fonctions régulières  $c_1, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{C}[C]$  telles que pour tout  $\lambda \in C$ , on ait  $\text{Crit}(P_\lambda) = \{c_1(\lambda), \dots, c_{d-1}(\lambda)\}$ .

Dans le cas des courbes de polynômes de degré quelconque, nous obtenons le résultat suivant comme une application du théorème 4.14 au cas spécifique des points critiques marqués :

**Théorème 4.21 ([FavGau20])** *Soit  $\hat{P}$  une famille algébrique non-isotriviale critiquement marquée de polynômes complexes de degré  $d \geq 2$  paramétrée par une courbe algébrique complexe  $C$ . Supposons que  $C$  contient une infinité de paramètres  $\lambda \in C$  pour lesquels  $P_\lambda$  est PCF.*

*Alors nous sommes dans l'une des situations suivantes :*

1. *Il existe une famille de symétries  $\hat{g} \in \Sigma(\hat{P})$  et une famille de polynômes  $\hat{Q}$  paramétrée par un revêtement ramifié fini  $C' \rightarrow C$  tel que  $\hat{P} = \hat{g} \circ \hat{Q}^n$  pour un certain  $n \geq 2$ , et l'ensemble des paramètres  $\lambda' \in C'$  tel que  $Q_{\lambda'}$  est PCF est infini.*
2. *Il existe un ensemble non-vide  $A$  de points critiques marqués de  $\hat{P}$  tel que pour toute paire  $c_i, c_j \in A$ , il existe une symétrie  $\hat{g} \in \Sigma(\hat{P})$  et des entiers  $n, m \geq 0$  tels que pour tout  $\lambda \in C$*

$$P_\lambda^n(c_i(\lambda)) = g_\lambda \circ P_\lambda^m(c_j(\lambda)) ;$$

*et pour tout  $c_i \notin A$ , il existe des entiers  $n_i > m_i \geq 0$  tels que pour tout  $\lambda \in C$*

$$P_\lambda^{n_i}(c_i(\lambda)) = P_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda)) .$$

En suivant la terminologie de Baker et DeMarco inspirée de problèmes de géométrie arithmétique, on dit qu'une courbe de  $\mathcal{P}_d$  est *spéciale* si elle contient un ensemble infini de

paramètres PCF. Notre théorème dit qu'une courbe spéciale de l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$  des polynômes de degré  $d$  est soit l'image d'une courbe spéciale d'un espace de modules  $\mathcal{P}_k$  de degré  $k < d$  par une application d'itération  $[P] \mapsto [P^\ell]$  avec  $k^\ell = d$  (à symétrie près), soit est définie par des relations de collision persistante des orbites critiques actives (à symétrie près) et par des relations de stable préperiodicité des autres orbites critiques.

Ce résultat ouvre la possibilité de donner une classification combinatoire de toutes les courbes spéciales dans l'espace des modules  $\mathcal{P}_d$  des polynômes d'un degré  $d$  donné. Rappelons que la classification combinatoire des polynômes PCF, en termes d'arbre de Hubbard a été initiée par Douady et Hubbard [DouH84, DouH85], Bielefeld, Fisher et Hubbard [BiFisH92] et ensuite développée plus en profondeur par Poirier [Poi09], et Kiwi [Kiw05]. Nous faisons ici un premier pas vers l'objectif ambitieux d'une classification des courbes spéciales en introduisant un outils combinatoire : son *graphe dynamique critiquement marqué*.

Voici la définition que nous donnons de graphe dynamique critiquement marqué.

**Définition 4.5** *Un graphe fini ou infini  $\Gamma$  d'ensemble de sommets  $V(\Gamma)$  est un graphe dynamique critiquement marqué de degré  $d$  lorsqu'il est muni des données suivantes :*

- (G1) *une application  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \Gamma$  de marquage, où  $\mathcal{F} = \{0, \dots, d-2\}$  ;*
- (G2) *une fonction  $d_\pi: V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{N}^*$  telle que  $\sum_{\pi(w)=v} d_\pi(w) \leq d$  et  $d_\pi(v) = 1 + \text{Card}(\mu^{-1}(v))$ , pour tout  $v \in V(\Gamma)$  ;*
- (G3) *un flot  $\pi: \Gamma \rightarrow \Gamma$  ;*
- (G4) *une action de  $\mathbb{U}_k$  sur  $V(\Gamma)$  pour un certain  $k \leq d$  telle que :*
  - *l'action est libre sur le complémentaire d'au plus un point ;*
  - *$\pi(g \cdot v) = \rho(g) \cdot \pi(v)$  pour un morphisme  $\rho: \mathbb{U}_k \rightarrow \mathbb{U}_k$  ;*
  - *$d_\pi(g \cdot v) = d_\pi(v)$  ;*
- (G4') *l'action de  $\mathbb{U}_k$  sur  $V(\Gamma)$  satisfait également la condition supplémentaire :*
  - *soit elle est libre sur  $\mu(\mathcal{F})$  et  $\pi(g \cdot v) = g \cdot \pi(v)$  ;*
  - *soit il existe un sommet  $v_* \in \mu(\mathcal{F})$  qui est fixé à la fois par  $\mathbb{U}_k$  et par  $\pi$ , et  $\pi(g \cdot v) = g^{d_\pi(v_*)} \cdot \pi(v)$  pour tout  $v$  ;*
  - *soit il existe un sommet  $v_* \in \mu(\mathcal{F})$  qui est fixé par  $\mathbb{U}_k$ , mais pas par  $\pi$ , et on a  $k = d_\pi(v_*)$ , et  $\pi(g \cdot v) = \pi(v)$  pour tout  $v$ .*
- (G5) *une action de  $\mathbb{U}_k$  sur  $\mathcal{F}$  telle que  $\mu(g \cdot i) = g \cdot \mu(i)$ .*

*On impose également la condition de minimalité suivante :*

- (G6)  *$\Gamma$  est l'orbite par le flot  $\pi$  de l'ensemble  $\{g \cdot \mu(i), g \in \mathbb{U}_k, i \in \mathcal{F}\}$ .*

L'idée est qu'à un polynôme donné  $P$ , on peut associer un tel graphe dynamique  $\Gamma(P)$  qui encode très précisément les relations dynamiques entre ses orbites critiques (en prenant en compte les symétries). Nous prouvons qu'à toute courbe irréductible  $C$  de l'espace des modules  $\mathcal{P}_d^{\text{cm}}$  des polynômes critiquement marqués de degré  $d$ , on peut associer un graphe dynamique critiquement marqué  $\Gamma(C)$  tel que  $\Gamma(P) = \Gamma(C)$  pour tous  $[P] \in C$ , à l'exception possible d'un ensemble dénombrable de points de  $C$ .

On identifie alors les graphes dynamiques critiquement marqués spéciaux (qui doivent correspondre aux courbes spéciales) comme cela.

**Définition 4.6** *Un graphe dynamique critiquement marqué  $\Gamma$  est spécial s'il contient exactement une composante connexe infinie, à symétries près. En d'autres termes, pour toutes composantes connexes infinies distinctes  $T$  et  $T'$  de  $\Gamma$ , il existe une symétrie  $g$  (un élément de  $\mathbb{U}_k$  dans la définition précédente) tel que  $g(T) \cap T' \neq \emptyset$ .*

Il n'est pas difficile de voir que, lorsque  $C$  est une courbe irréductible de  $\mathcal{P}_d^{\text{cm}}$  telle que la famille induite par  $C$  est primitive, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- la courbe  $C$  est spéciale, c'est-à-dire qu'elle contient une infinité de paramètres PCF,
- le graphe dynamique critiquement marqué  $\Gamma(C)$  de  $C$  est spécial.

La question est maintenant de savoir si, étant donné un graphe dynamique critiquement marqué  $\Gamma$ , il existe une courbe  $C \subset \mathcal{P}_d^{\text{cm}}$  telle que  $\Gamma(C) = \Gamma$ .

Nous établissons le résultat suivant.

**Théorème 4.22** ([FavGau20]) *Soit  $\Gamma$  un graphe dynamique critiquement marqué spécial sans symétries ( $k = 1$  dans (G4 – 6)) et qui a les propriétés suivantes :*

- (R1) *deux points marqués ont des images différentes et*
- (R2) *le sous-graphe dynamique critiquement marqué fini  $\Gamma_{\text{fin}}$  maximal de  $\Gamma$  est réalisable par un polynôme PCF.*

*Alors la clôture de Zariski de l'ensemble des classes  $[P]$  d'équivalences de polynômes primitifs  $P$  tels que  $J(P)$  est disconnexe et  $\Gamma(P) = \Gamma$  est une courbe spéciale  $C(\Gamma)$  (possiblement réductible) ;*

*De plus, pour toute composante irréductible  $C_i$  de  $C(\Gamma)$ , on a  $\Gamma(C_i) = \Gamma$ .*

La preuve de ce théorème est longue et difficile. Elle repose sur des idées proche de celles DeMarco et McMullen [DeMMcM08] lors de leur réalisation des arbres dynamiques associés aux polynômes en dehors du lieu de connexité  $\mathcal{C}_d$  : en tronquant l'arbre au dessus d'un certain temps  $-n$  de parcours du flot, on fabrique par récurrence une suite de surfaces de Riemann  $S_n$  imbriquées (qui sont des ouverts du plan complexes) avec une dynamique  $S_n \rightarrow S_{n+1}$  de degré contrôlé qui est compatible avec la dynamique sur l'arbre tronqué, dont la construction est délicate. La réunion  $S_\infty$  de ces surfaces de Riemann s'avère être le complémentaire d'un ensemble d'aire absolue 0, et donc on peut étendre la dynamique construite à  $\mathbb{C}$  tout entier.

La question suivante est celle de la réalisabilité des graphes finis par des polynômes PCF. Pour énoncer notre résultat complet, il faut introduire un invariant numérique. On énumère les sommets marqués de  $\Gamma$ , de sorte que, parmi ces sommets, si  $v_j$  est dans l'orbite de  $v_i$ , alors  $j \geq i$ . Pour tout  $i$ , on note  $n_i$  le plus petit entier tel que  $\pi^{n_i}(v_i)$  est soit périodique, soit appartient à l'orbite de  $v_j$  avec  $j < i$ . On définit alors  $\delta(\Gamma)$  comme le plus petit nombre positif de la forme  $\max\{d^{-n_1}, \sum_{j \geq 2} d^{-n_j}\}$ , pour tout marquage possible satisfaisant les conditions précédentes.

Sur cette question, on montre le résultat suivant :

**Théorème 4.23** ([FavGau20]) *Soit  $\Gamma_{\text{fin}}$  un graphe dynamique critiquement marqué fini de degré  $d$ . Sous les conditions suivantes, il existe  $P \in \mathbb{C}[z]$  de degré  $d$  tel que  $\Gamma(P) = \Gamma_{\text{fin}}$  :*

- Si le graphe a un unique point marqué.  $P$  est alors unicritique.
- Si  $\Gamma_{\text{fin}}$  est l'union de  $(d - 1)$  cycles distincts de longueurs différentes.  $P$  est alors un centre de composante hyperbolique et a  $d - 1$  cycles super-attractifs.
- Si tous les cycles de  $\Gamma_{\text{fin}}$  ont une longueur différente et  $\delta(\Gamma_{\text{fin}}) \leq 1/(2d)$ .  $P$  est alors Misiurewicz.

Dans tous les cas, le polynôme  $P$  est PCF.

La preuve du cas unicritique repose sur [Buf18], le cas hyperbolique sur [FavGau15] et le cas Misiurewicz sur la construction de Bielefeld, Fisher et Hubbard des combinatoires strictement PCF.

## 4.4 Perspectives

Encore une fois, les perspectives sont nombreuses. Commençons par expliquer les raisons qui font qu'on se restreint au cas des courbes de polynômes. Tout d'abord, si  $\hat{f}$  est une famille de fractions rationnelles paramétrée par une courbe algébrique  $C$ , et si  $a : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  est une fonction rationnelle, on peut toujours associer à la paire  $(\hat{f}, a)$  un diviseur  $D_{\hat{f},a}$  comme dans le cas des polynômes. Il s'agit d'un  $\mathbb{R}$ -diviseur effectif qui satisfait encore

$$\deg(D_{\hat{f},a}) = \int_C \mu_{\hat{f},a}.$$

En revanche, il se peut qu'il ne s'agisse pas d'un  $\mathbb{Q}$ -diviseur (il se peut même que ce soit faux, voir [DeMGhi19]). On peut également définir une fonction hauteur  $h_{\hat{f},a}$  sur  $C(\bar{\mathbb{K}})$  en posant

$$h_{\hat{f},a}(\lambda) := \hat{h}_{f_\lambda}(a(\lambda)), \quad \lambda \in C(\bar{\mathbb{K}}).$$

Il n'est d'abord pas du tout clair que  $h_{\hat{f},a}$  soit une hauteur de Weil associée à  $D_{\hat{f},a}$  (au sens de Moriwaki [Mor16]). Et il y a des exemples de paires définies sur  $\mathbb{C}$  (mais pas sur  $\bar{\mathbb{Q}}$ ) pour lesquelles le candidat pour définir une métrique associé n'est pas continu par [DeMoku18]. Il s'agit de la première obstruction majeure à l'adaptation de la stratégie de preuve utilisée pour les polynômes aux fractions rationnelles, puisque la continuité de la métrique est un point essentiel de la preuve du théorème d'équidistribution arithmétique.

De plus, dans les courbes  $\text{Per}_1(w)$  de l'espace des modules  $\mathcal{M}_2$ , les métriques construites par [DeMWYe15] ne sont pas adéliques, mais "quasi-adéliques" au sens où il y a une infinité de places où elles diffèrent d'une métrique modèle, avec une somme de contributions convergentes.

Pour finir, il n'y a pas de candidat naturel pour remplacer l'utilisation de la coordonnée de Böttcher d'un polynôme et la théorie de Ritt est beaucoup moins précise dans le cas des fractions rationnelles, et il n'y a pas de classification aussi simple des courbes  $C \subset (\mathbb{P}^1)^2$  qui sont invariante par  $(f, f)$  si  $f$  est une fraction rationnelle que celle donnée par Medvedev et Scanlon.

Néanmoins, j'ai commencé à réfléchir à une stratégie pour contourner toutes ces difficultés dans le cas des fractions rationnelles de degré 2.

**Problème 4.2** Soit  $C \subset \mathcal{M}_2^{\text{cm}}$  une courbe irréductible de fractions rationnelles quadratiques critiquement marquées qui contient une infinité de classes  $[f]$  de fractions rationnelles PCF. Montrer que  $C$  est une composante irréductible d'une des courbes suivante :

1. les courbes où l'un des point critiques est stablement prépériodique : il existe  $i$  et  $n > m \geq 0$  tel que  $f^n(c_i) = f^m(c_i)$  sur  $C$ ,
2. la courbe des fractions rationnelles quadratiques possédant un automorphisme qui permute les deux points critiques,
3. les courbes de collisions persistantes : il existe  $n, m \geq 2$  tels que  $f^n(c_1) = f^m(c_2)$  sur  $C$ .

Il s'agit d'un problème extrêmement difficile et on a vu au-dessus les difficultés énormes qu'il faut surmonter pour parvenir à le résoudre, même dans ce cas a priori le plus simple.

Un autre problème qui semble très intéressant est de prouver la conjecture de Baker-DeMarco pour les familles de dimension  $> 1$  de polynômes : soit  $\hat{P} : \Lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \Lambda \times \mathbb{C}$  une famille algébrique de polynômes de dimension  $k \geq 2$  définie sur un corps de caractéristique nulle. Soient  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^k$  et  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k) : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^k$  deux  $k$ -uplets de fonctions régulières. On fait l'hypothèse que les  $(k+1)$ -uplets  $(\hat{P}, a_1, \dots, a_k)$  et  $(\hat{P}, b_1, \dots, b_k)$  sont *fortement actifs*, au sens où leurs mesures de bifurcations

$$\mu_{\hat{P}, \mathbf{a}} = \bigwedge_{j=1}^k T_{\hat{P}, a_j} \quad \text{et} \quad \mu_{\hat{P}, \mathbf{b}} = \bigwedge_{j=1}^k T_{\hat{P}, b_j}$$

sont non-nulles. En particuliers, on a montré dans [Gau18] que les ensembles

$$\text{Preper}(\hat{P}, \mathbf{a}) = \bigcap_{j=1}^k \text{Preper}(\hat{P}, a_j) \quad \text{et} \quad \text{Preper}(\hat{P}, \mathbf{b}) = \bigcap_{j=1}^k \text{Preper}(\hat{P}, b_j)$$

sont des sous-ensembles Zariski dense de  $\Lambda$ .

**Problème 4.3** On suppose que  $\hat{P}$  est primitive et non-isotriviale et que les  $(k+1)$ -uplets  $(\hat{P}, a_1, \dots, a_k)$  et  $(\hat{P}, b_1, \dots, b_k)$  sont *fortement actifs*. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\text{Preper}(\hat{P}, \mathbf{a}) \cap \text{Preper}(\hat{P}, \mathbf{b})$  est Zariski dense dans  $\Lambda$ ,
2. il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$  et  $k$  familles de symétries  $\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_k \in \Sigma(\hat{P})$  et des paires d'entiers  $(n_1, m_1), \dots, (n_k, m_k) \in \mathbb{N}^2$  tels que

$$P_\lambda^{n_i}(a_i(\lambda)) = g_{i,\lambda} \circ P_\lambda^{m_i}(b_i(\lambda)), \quad \text{pour tout } \lambda \in \Lambda \text{ et tout } 1 \leq i \leq k.$$

Encore une fois, les obstacles à surmonter sont immenses. La première difficulté est qu'il n'est pas du tout évident que l'on puisse montrer qu'il existe une bonne compactification de  $\Lambda$  sur laquelle on puisse construire un fibré en droites *ample* sur lequel la métrique induite par  $G_{\mathbf{a}} : \lambda \mapsto \max_j g_{P_\lambda}(a_j(\lambda))$  soit *continue*.

Ensuite, en dimension  $k \geq 2$ , la mesure de bifurcation est la mesure de Monge-Ampère complexe  $\mu_{\hat{P},a} = (dd^c G_a)^k$  et l'opérateur de Monge-Ampère complexe n'est pas un opérateur linéaire, ce qui rend le passage de l'égalité des mesures à celle des potentiels beaucoup plus délicat. Il est à noter qu'il existe quelques rares travaux [GhiHsTu16, GhiHsNg18] sur la question, qui se ramènent systématiquement au cas des courbes.

Une autre généralisation possible concerne, comme au chapitre 3, les systèmes dynamiques en dimension supérieure. On peut se poser des questions semblables à celles abordées ici en dimension 1 : pour commencer, on peut se concentrer sur les familles d'automorphismes réguliers du plan affine, puis sur les familles d'automorphismes des surfaces K3. Dans les familles d'automorphismes de Hénon (cas particuliers d'automorphismes réguliers du plan affine), Ingram [Ing14], ainsi que Hsai et Kawaguchi [HK18] ont posé les premières pierres pour attaquer ce genre de problèmes d'intersections improbables.

En étant un peu ambitieux, on peut espérer résoudre le problème suivant :

**Problème 4.4** *Etant donné une famille aglébrique  $\hat{f} : C \times \mathbb{C}^2 \rightarrow C \times \mathbb{C}^2$  d'automorphismes polynomiaux réguliers de degré  $d$  du plan affine paramétrée par une courbe affine  $C$  et deux points marqués  $a, b \in \mathbb{C}[C]$ . Supposons que les paires  $(\hat{f}, a)$  et  $(\hat{f}, b)$  sont actives.*

*Montrer que les deux assertions sont équivalentes :*

1. *l'ensemble  $\{\lambda \in C : a(\lambda) \text{ et } b(\lambda) \text{ sont préperiodiques pour } f_\lambda\}$  est infini,*
2. *il existe une relation dynamique persistante entre les orbites de  $a$  et de  $b$ .*

Le premier problème que l'on rencontre (comme soulevé par Hsia et Kawaguchi) est qu'il n'est même pas toujours vrai que l'ensemble  $\text{Preper}(\hat{f}, a)$  est lui-même infini ! Ils donnent des exemples où cela arrive, aussi bien que des exemples où il est vide. Se pose donc le domaine d'application des hypothèses que l'on fait.

Ensuite, il faut donner un sens plus concret à la notion de "relation dynamique persistante" des orbites de  $a$  et  $b$ . Il faut commencer par comprendre s'il y a, dans ce cas-ci aussi, des symétries qui interviennent dans ce type de problème. Ensuite, comme toujours en dimension complexe  $> 1$ , on ne détectera pas de phénomène lié à la mesure de Green de  $f_\lambda$  à l'aide du courant de bifurcation d'un point marqué.

On pourra aussi s'intéresser à une question semblable pour les familles d'endomorphismes polarisés de variétés projectives en dimension plus grande.

Pour finir, je voudrais revenir sur le problème de la classification combinatoire des courbes spéciales de l'espace des modules des polynômes. Nous avons proposé, avec Charles Favre, un objet combinatoire (un graphe marqué) correspondant à une courbe spéciale et nous avons montré que sous certaines conditions relativement raisonnables, un graphe du type introduit est réalisé comme le graphe d'une courbe spéciale (ui est a priori loin d'être unique). Le dernier problème que je souhaiterais proposer ici est le suivant.

**Problème 4.5** *1. Montrer que tout graphe dynamique critiquement marqué spécial  $\Gamma$  est celui d'une courbe spéciale  $C \subset \mathcal{P}_d^{\text{cm}}$ , c'est-à-dire que  $\Gamma(C) = \Gamma$ ,*

2. Raffiner la définition de graphe dynamique critiquelement marqué spécial (ou introduire un nouvel objet) de sorte que chaque objet soit toujours réalisé, et qu'il corresponde à une unique courbe spéciale irréductible de l'espace des modules  $\mathcal{P}_d^{\text{cm}}$ .

# Bibliographie

- [Asp13] Magnus Aspenberg. The Collet-Eckmann condition for rational functions on the Riemann sphere. *Math. Z.*, 273(3-4) :935–980, 2013.
- [AstB18] Matthieu Astorg and Fabrizio Bianchi. Hyperbolicity and bifurcations in holomorphic families of polynomial skew products. *arXiv e-prints*, January 2018.
- [AstGau<sup>+</sup>19] Matthieu Astorg, Thomas Gauthier, Nicolae Mihalache, and Gabriel Vigny. Collet, Eckmann and the bifurcation measure. *Invent. Math.*, 217(3) :749–797, 2019.
- [Ast16] Matthieu Astorg. Summability Condition and Rigidity for Finite Type Maps. *arXiv e-prints*, February 2016.
- [AviMor05] Artur Avila and Carlos Gustavo Moreira. Statistical properties of unimodal maps : the quadratic family. *Ann. of Math. (2)*, 161(2) :831–881, 2005.
- [Bak09] Matthew Baker. A finiteness theorem for canonical heights attached to rational maps over function fields. *J. Reine Angew. Math.*, 626 :205–233, 2009.
- [BakDeM11] Matthew Baker and Laura DeMarco. Preperiodic points and unlikely intersections. *Duke Math. J.*, 159(1) :1–29, 2011.
- [BakDeM13] Matthew Baker and Laura DeMarco. Special curves and postcritically finite polynomials. *Forum Math. Pi*, 1 :e3, 35, 2013.
- [BaBer07] Giovanni Bassanelli and François Berteloot. Bifurcation currents in holomorphic dynamics on  $\mathbb{P}^k$ . *J. Reine Angew. Math.*, 608 :201–235, 2007.
- [BaBer09] Giovanni Bassanelli and François Berteloot. Lyapunov exponents, bifurcation currents and laminations in bifurcation loci. *Math. Ann.*, 345(1) :1–23, 2009.
- [BaBer11] Giovanni Bassanelli and François Berteloot. Distribution of polynomials with cycles of a given multiplier. *Nagoya Math. J.*, 201 :23–43, 2011.
- [BedSm92] Eric Bedford and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbf{C}^2$ . III. Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure. *Math. Ann.*, 294(3) :395–420, 1992.
- [BedTa76] Eric Bedford and B. A. Taylor. The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation. *Invent. Math.*, 37(1) :1–44, 1976.
- [Ben05] Robert Benedetto. Heights and preperiodic points of polynomials over function fields. *Int. Math. Res. Not.*, (62) :3855–3866, 2005.

- [BenIng<sup>+</sup>14] Robert Benedetto, Patrick Ingram, Rafe Jones, and Alon Levy. Attracting cycles in  $p$ -adic dynamics and height bounds for postcritically finite maps. *Duke Math. J.*, 163(13) :2325–2356, 2014.
- [BenIng<sup>+</sup>19] Robert Benedetto, Patrick Ingram, Rafe Jones, Michelle Manes, Joseph H. Silverman, and Thomas J. Tucker. Current trends and open problems in arithmetic dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 56(4) :611–685, 2019.
- [BenC85] Michael Benedicks and Lennart Carleson. On iterations of  $1 - ax^2$  on  $(-1, 1)$ . *Ann. of Math. (2)*, 122(1) :1–25, 1985.
- [Ber13] François Berteloot. Bifurcation currents in holomorphic families of rational maps. In *Pluripotential Theory*, volume 2075 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–93. Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [BerBDu14] François Berteloot, Fabrizio Bianchi, and Christophe Dupont. Dynamical stability and lyapunov exponents for holomorphic endomorphisms of  $\mathbb{C}P(k)$ , 2014. preprint arXiv : math.DS/1403.7603.
- [BerDu05] François Berteloot and Christophe Dupont. Une caractérisation des endomorphismes de Lattès par leur mesure de Green. *Comment. Math. Helv.*, 80(2) :433–454, 2005.
- [BerLo98] François Berteloot and Jean-Jacques Loeb. Spherical hypersurfaces and Lattès rational maps. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 77(7) :655–666, 1998.
- [BrDuv99] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d’un endomorphisme de  $\mathbb{C}P^k$ . *Acta Math.*, 182(2) :143–157, 1999.
- [Bie19] Sébastien Biebler. Lattès maps and the interior of the bifurcation locus. *J. Mod. Dyn.*, 15 :95–130, 2019.
- [BiFisH92] Ben Bielefeld, Yuval Fisher, and John Hamal Hubbard. The classification of critically preperiodic polynomials as dynamical systems. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(4) :721–762, 1992.
- [BoGu06] Enrico Bombieri and Walter Gubler. *Heights in Diophantine geometry*, volume 4 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [BrDuv01] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Deux caractérisations de la mesure d’équilibre d’un endomorphisme de  $P^k(\mathbb{C})$ . *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (93) :145–159, 2001.
- [BriKat83] Michael Brin and Anatole Katok. On local entropy. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, volume 1007 of *Lecture Notes in Math.*, pages 30–38. Springer, Berlin, 1983.
- [Buf18] Xavier Buff. On postcritically finite unicritical polynomials. *New York J. Math.*, 24 :1111–1122, 2018.
- [BufE09] Xavier Buff and Adam L. Epstein. Bifurcation measure and postcritically finite rational maps. In *Complex dynamics : families and friends / edited by*

- Dierk Schleicher*, pages 491–512. A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 2009.
- [BufG13] Xavier Buff and Thomas Gauthier. Perturbations of flexible Lattès maps. *Bull. Soc. Math. France*, 141(4) :603–614, 2013.
- [BufG15] Xavier Buff and Thomas Gauthier. Quadratic polynomials, multipliers and equidistribution. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(7) :3011–3017, 2015.
- [Buz97] Gregory T. Buzzard. Infinitely many periodic attractors for holomorphic maps of 2 variables. *Ann. of Math. (2)*, 145(2) :389–417, 1997.
- [CanDu20] Serge Cantat and Christophe Dupont. Automorphisms of surfaces : Kummer rigidity and measure of maximal entropy. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 22(4) :1289–1351, 2020.
- [CanGao<sup>+</sup>18] Serge Cantat, Ziyang Gao, Philipp Habegger, and Junyi Xie. The geometric Bogomolov conjecture. *arXiv e-prints*, Sep 2018.
- [CarG93] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics*. Universitext : Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Ch-L06] Antoine Chambert-Loir. Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich. *J. Reine Angew. Math.*, 595 :215–235, 2006.
- [CaSil93] Gregory S. Call and Joseph H. Silverman. Canonical heights on varieties with morphisms. *Compositio Math.*, 89(2) :163–205, 1993.
- [DiDujSi05] Tien Cuong Dinh, Romain Dujardin, and Nessim Sibony. On the dynamics near infinity of some polynomial mappings in  $\mathbb{C}^2$ . *Math. Ann.*, 333(4) :703–739, 2005.
- [DeM01] Laura DeMarco. Dynamics of rational maps : a current on the bifurcation locus. *Math. Res. Lett.*, 8(1-2) :57–66, 2001.
- [DeM03] Laura DeMarco. Dynamics of rational maps : Lyapunov exponents, bifurcations, and capacity. *Math. Ann.*, 326(1) :43–73, 2003.
- [DeM16] Laura DeMarco. Bifurcations, intersections, and heights. *Algebra Number Theory*, 10(5) :1031–1056, 2016.
- [DujFav08] Romain Dujardin and Charles Favre. Distribution of rational maps with a preperiodic critical point. *Amer. J. Math.*, 130(4) :979–1032, 2008.
- [DujFav17] Romain Dujardin and Charles Favre. The dynamical manin-mumford problem for plane polynomial automorphisms. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 19(11) :3421–3465, 2017.
- [DeMGhi19] Laura DeMarco and Dragos Ghioca. Rationality of dynamical canonical height. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 39(9) :2507–2540, 2019.
- [DouH84] Adrien Douady and John Hamal Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie I*, volume 84 of *Publications Mathématiques d’Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1984.

- [DouH85] Adrien Douady and John Hamal Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie II*, volume 85 of *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985. With the collaboration of P. Lavaurs, Tan Lei and P. Sentenac.
- [DeMMav20] Laura DeMarco and Niki Myrto Mavraki. Variation of canonical height and equidistribution. *Amer. J. Math.*, 142(2) :443–473, 2020.
- [DeMMcM08] Laura DeMarco and Curtis T. McMullen. Trees and the dynamics of polynomials. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 41(3) :337–382, 2008.
- [DeMOku18] Laura DeMarco and Yûsuke Okuyama. Discontinuity of a degenerating escape rate. *Conform. Geom. Dyn.*, 22 :33–44, 2018.
- [DeMWYe15] Laura DeMarco, Xiaoguang Wang, and Hexi Ye. Bifurcation measures and quadratic rational maps. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 111(1) :149–180, 2015.
- [DiSib09] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Super-potentials of positive closed currents, intersection theory and dynamics. *Acta Math.*, 203(1) :1–82, 2009.
- [DiSib10] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Dynamics in several complex variables : endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings. In *Holomorphic dynamical systems*, volume 1998 of *Lecture Notes in Math.*, pages 165–294. Springer, Berlin, 2010.
- [DeT04] Henry De Thélin. Sur la laminarité de certains courants. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(2) :304–311, 2004.
- [DeTGauV20a] Henry De Thélin, Thomas Gauthier, and Gabriel Vigny. The bifurcation measure has maximal entropy. *Israel J. Math.*, 235(1) :213–243, 2020.
- [DeTGauV20b] Henry De Thélin, Thomas Gauthier, and Gabriel Vigny. Parametric Lyapunov exponents. *Bull. London Math. Soc.*, accepted for publication, 2020.
- [DeTV10] Henry De Thélin and Gabriel Vigny. Entropy of meromorphic maps and dynamics of birational maps. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, 122 :vi+98, 2010.
- [DTV18] Henry De Thélin and Gabriel Vigny. Entropy of meromorphic maps acting on analytic sets. *arXiv e-prints*, July 2018. To appear in *Indiana Math. J.*
- [Duj] Romain Dujardin. Bifurcation currents and equidistribution on parameter space. To appear in *Frontiers in Complex Dynamics : In Celebration of John Milnor's 80th Birthday* Edited by Araceli Bonifant, Misha Lyubich, & Scott Sutherland, Princeton Mathematical Series.
- [Duj04] Romain Dujardin. Sur l'intersection des courants laminaires. *Publ. Mat.*, 48(1) :107–125, 2004.
- [Duj09] Romain Dujardin. Cubic polynomials : a measurable view on parameter space. In *Complex dynamics : families and friends / edited by Dierk Schleicher*, pages 451–490. A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 2009.

- [Duj12] Romain Dujardin. Fatou directions along the Julia set for endomorphisms of  $\mathbb{CP}^k$ . *J. Math. Pures Appl. (9)*, 98(6) :591–615, 2012.
- [Duj13] Romain Dujardin. The supports of higher bifurcation currents. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 22(3) :445–464, 2013.
- [Duj17] Romain Dujardin. Non-density of stability for holomorphic mappings on  $\mathbb{P}^k$ . *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques*, 4 :813–843, 2017.
- [Dup02] Christophe Dupont. *Propriétés extrémales et caractéristiques des exemples de Lattès*. PhD Thesis under the direction of François Berteloot, Université Paul Sabatier - Toulouse III, November 2002.
- [Eps09] Adam Epstein. Transversality in holomorphic dynamics, 2009. preprint.
- [ErvS11] Alexandre Eremenko and Sebastian van Strien. Rational maps with real multipliers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(12) :6453–6463, 2011.
- [Fat20] Pierre Fatou. Sur les équations fonctionnelles. *Bull. Soc. Math. France*, 48 :208–314, 1920.
- [Fav18a] Charles Favre. Degeneration of endomorphisms of the complex projective space in the hybrid space. *J. Inst. Math. Jussieu*, page 1–43, 2018. Published online.
- [Fav18b] Charles Favre. Degeneration of endomorphisms of the complex projective space in the hybrid space. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, pages 1–43, 2018.
- [FavGau15] Charles Favre and Thomas Gauthier. Distribution of postcritically finite polynomials. *Israel Journal of Mathematics*, 209(1) :235–292, 2015.
- [FavGau18a] Charles Favre and Thomas Gauthier. Classification of special curves in the space of cubic polynomials. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (2) :362–411, 2018.
- [FavGau18b] Charles Favre and Thomas Gauthier. Continuity of the Green function in meromorphic families of polynomials. *Algebra Number Theory*, 12(6) :1471–1487, 2018.
- [FavGau20] Charles Favre and Thomas Gauthier. The arithmetic of polynomial dynamical pairs. *arXiv e-prints*, 246 pages, April 2020.
- [Fis89] Yuval Fisher. The classification of critically preperiodic polynomials, 1989. PhD Thesis, Cornell University.
- [FavRL06] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Equidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective. *Math. Ann.*, 335(2) :311–361, 2006.
- [GaoS14] Bing Gao and Weixiao Shen. Summability implies Collet-Eckmann almost surely. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 34(4) :1184–1209, 2014.
- [Gau12] Thomas Gauthier. Strong bifurcation loci of full Hausdorff dimension. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 45(6) :947–984, 2012.

- [Gau14] Thomas Gauthier. Higher bifurcation currents, neutral cycles, and the Mandelbrot set. *Indiana Univ. Math. J.*, 63(4) :917–937, 2014.
- [Gau16] Thomas Gauthier. Equidistribution towards the bifurcation current I : multipliers and degree  $d$  polynomials. *Math. Ann.*, 366(1-2) :1–30, 2016.
- [Gau18] Thomas Gauthier. Dynamical pairs with an absolutely continuous bifurcation measure. *ArXiv e-prints*, 2018.
- [GauOkuV19] Thomas Gauthier, Yūsuke Okuyama, and Gabriel Vigny. Hyperbolic components of rational maps : quantitative equidistribution and counting. *Comment. Math. Helv.*, 94(2) :347–398, 2019.
- [GauOkuV20] Thomas Gauthier, Yūsuke Okuyama, and Gabriel Vigny. Approximation of non-archimedean Lyapunov exponents and applications over global fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373 :8963–9011, 2020.
- [GauV17a] Thomas Gauthier and Gabriel Vigny. Distribution of points with prescribed derivative in polynomial dynamics. *Riv. Mat. Univ. Parma (N.S.)*, 8(2) :247–270, 2017.
- [GauV17b] Thomas Gauthier and Gabriel Vigny. Distribution of postcritically finite polynomials II : Speed of convergence. *J. Mod. Dyn.*, 11 :57–98, 2017.
- [GauV19a] Thomas Gauthier and Gabriel Vigny. Distribution of postcritically finite polynomials III : Combinatorial continuity. *Fund. Math.*, 244(1) :17–48, 2019.
- [GauV19b] Thomas Gauthier and Gabriel Vigny. The Geometric Dynamical Northcott and Bogomolov Properties. *arXiv e-prints*, December 2019.
- [GhiHsNg18] Dragos Ghioca, Liang-Chung Hsia, and Khoa Dang Nguyen. Simultaneously preperiodic points for families of polynomials in normal form. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(2) :733–741, 2018.
- [GhiHsTu13] Dragos Ghioca, Liang-Chung Hsia, and Thomas J. Tucker. Preperiodic points for families of polynomials. *Algebra & Number Theory*, 146(3) :701–732, 2013.
- [GhiHsTu16] Dragos Ghioca, Liang-Chung Hsia, and Thomas J. Tucker. Unlikely intersection for two-parameter families of polynomials. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (24) :7589–7618, 2016.
- [GhiYe18] Dragos Ghioca and Hexi Ye. A dynamical variant of the André-Oort conjecture. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (8) :2447–2480, 2018.
- [GraSw15] Jacek Graczyk and Grzegorz Świątek. Lyapunov exponent and harmonic measure on the boundary of the connectedness locus. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (16) :7357–7364, 2015.
- [Gro03] Mikhaïl Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :217–235, 2003.
- [HK18] Liang-Chung Hsia and Shu Kawaguchi. Heights and periodic points for one-parameter families of Hénon maps. *arXiv e-prints*, October 2018.

- [HiSil00] Marc Hindry and Joseph H. Silverman. *Diophantine geometry*, volume 201 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction.
- [HSch14] John Hamal Hubbard and Dierk Schleicher. Multicorns are not path connected. In *Frontiers in complex dynamics*, volume 51 of *Princeton Math. Ser.*, pages 73–102. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014.
- [Ing12] Patrick Ingram. A finiteness result for post-critically finite polynomials. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (3) :524–543, 2012.
- [Ing14] Patrick Ingram. Canonical heights for Hénon maps. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 108(3) :780–808, 2014.
- [Ing18] Patrick Ingram. The critical height is a moduli height. *Duke Math. J.*, 167(7) :1311–1346, 2018.
- [IMuk16] Hiroyuki Inou and Sabyasachi Mukherjee. Non-landing parameter rays of the multicorns. *Invent. Math.*, 204(3) :869–893, 2016.
- [Kat80] Anatole Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 51 :137–173, 1980.
- [Kiw04] Jan Kiwi. Real laminations and the topological dynamics of complex polynomials. *Adv. Math.*, 184(2) :207–267, 2004.
- [Kiw05] Jan Kiwi. Combinatorial continuity in complex polynomial dynamics. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 91(1) :215–248, 2005.
- [Kiw06] Jan Kiwi. Puiseux series polynomial dynamics and iteration of complex cubic polynomials. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(5) :1337–1404, 2006.
- [KiwRee13] Jan Kiwi and Mary Rees. Counting hyperbolic components. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 88(3) :669–698, 2013.
- [Lev90] Genadi M. Levin. On the theory of iterations of polynomial families in the complex plane. *J. Soviet Math.*, 52(6) :3512–3522, 1990.
- [LanNer59] Serge Lang and André Néron. Rational points of abelian varieties over function fields. *Amer. J. Math.*, 81 :95–118, 1959.
- [Lyu83] Mikhail Y. Lyubich. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(3) :351–385, 1983.
- [Lyu84] Mikhail Y. Lyubich. Investigation of the stability of the dynamics of rational functions. *Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 42 :72–91, 1984. Translated in *Selecta Math. Soviet.* **9** (1990), no. 1, 69–90.
- [Mak85] Nikolai G. Makarov. On the distortion of boundary sets under conformal mappings. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 51(2) :369–384, 1985.
- [MaSadSul83] Ricardo Mañé, Paulo Sad, and Dennis Sullivan. On the dynamics of rational maps. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(2) :193–217, 1983.
- [McM87] Curtis T. McMullen. Families of rational maps and iterative root-finding algorithms. *Annals of Mathematics*, 125(3) :467–493, 1987.

- [McM94] Curtis T. McMullen. *Complex dynamics and renormalization*, volume 135 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- [McM00] Curtis T. McMullen. The Mandelbrot set is universal. In *The Mandelbrot set, theme and variations*, volume 274 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–17. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [McMSul98] Curtis T. McMullen and Dennis P. Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. III. The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system. *Adv. Math.*, 135(2) :351–395, 1998.
- [MedSca14] Alice Medvedev and Thomas Scanlon. Invariant varieties for polynomial dynamical systems. *Ann. of Math. (2)*, 179(1) :81–177, 2014.
- [Mil93] John Milnor. Geometry and dynamics of quadratic rational maps. *Experiment. Math.*, 2(1) :37–83, 1993. With an appendix by the author and Lei Tan.
- [MisPrz77] Michał Misiurewicz and Feliks Przytycki. Topological entropy and degree of smooth mappings. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 25(6) :573–574, 1977.
- [Mor16] Atsushi Moriawaki. Adelic divisors on arithmetic varieties. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 242(1144) :v+122, 2016.
- [Nak93] Shizuo Nakane. Connectedness of the tricorn. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 13(2) :349–356, 1993.
- [Oku10] Yûzuke Okuyama. Lyapunov exponents in complex dynamics and potential theory, 2010. preprint arXiv math.CV/1008.1445v1.
- [Oku14] Yûsuke Okuyama. Equidistribution of rational functions having a super-attracting periodic point towards the activity current and the bifurcation current. *Conform. Geom. Dyn.*, 18 :217–228, 2014.
- [Oku15] Yûsuke Okuyama. Quantitative approximations of the Lyapunov exponent of a rational function over valued fields. *Math. Z.*, 280(3-4) :691–706, 2015.
- [Pak17] Fedor Pakovich. Polynomial semiconjugacies, decompositions of iterations, and invariant curves. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa*, XVII(5) :1417–1446, 2017.
- [Poi09] Alfredo Poirier. Critical portraits for postcritically finite polynomials. *Fund. Math.*, 203(2) :107–163, 2009.
- [Prz93] Feliks Przytycki. Lyapunov characteristic exponents are nonnegative. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 119(1) :309–317, 1993.
- [PrzRho99] Feliks Przytycki and Steffen Rohde. Rigidity of holomorphic Collet-Eckmann repellers. *Ark. Mat.*, 37(2) :357–371, 1999.
- [Ree86] Mary Rees. Positive measure sets of ergodic rational maps. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(3) :383–407, 1986.

- [Rit22] Joseph F. Ritt. Prime and composite polynomials. *Trans. Am. Math. Soc.*, 23 :51–66, 1922.
- [Shi98] Mitsuhiro Shishikura. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Ann. of Math. (2)*, 147(2) :225–267, 1998.
- [SibWon80] Nessim Sibony and Pit Mann Wong. Some results on global analytic sets. In *Séminaire Pierre Lelong-Henri Skoda (Analyse). Années 1978/79 (French)*, volume 822 of *Lecture Notes in Math.*, pages 221–237. Springer, Berlin, 1980.
- [Sil98] Joseph H. Silverman. The space of rational maps on  $\mathbf{P}^1$ . *Duke Math. J.*, 94(1) :41–77, 1998.
- [Sil07] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of dynamical systems*, volume 241 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007.
- [Sil12] Joseph H. Silverman. *Moduli spaces and arithmetic dynamics*, volume 30 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [Taf17] Johan Taflin. Blenders near polynomial product maps of  $\mathbb{C}^2$ . *arXiv e-prints*, February 2017. To appear in JEMS.
- [Tan90] Lei Tan. Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Comm. Math. Phys.*, 134(3) :587–617, 1990.
- [Thu05] Amaury Thuillier. Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. applications à la théorie d’arakevov, 2005. Thèse de l’Université de Rennes 1, viii + 184 p.
- [Tru14] Eugenio Trucco. Wandering Fatou components and algebraic Julia sets. *Bull. Soc. Math. France*, 142(3) :411–464, 2014.
- [Tsu93] Masato Tsujii. Positive Lyapunov exponents in families of one-dimensional dynamical systems. *Invent. Math.*, 111(1) :113–137, 1993.
- [Xie15] Junyi Xie. Intersections of valuation rings in  $k[x, y]$ . *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 111(1) :240–274, 2015.
- [Yam13] Kazuhiko Yamaki. Geometric Bogomolov conjecture for abelian varieties and some results for those with some degeneration (with an appendix by Walter Gubler : the minimal dimension of a canonical measure). *Manuscripta Math.*, 142(3-4) :273–306, 2013.
- [Yom87] Yosef Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3) :285–300, 1987.
- [Yua08] Xinyi Yuan. Big line bundles over arithmetic varieties. *Invent. Math.*, 173(3) :603–649, 2008.
- [Zdu90] Anna Zdunik. Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps. *Invent. Math.*, 99(3) :627–649, 1990.