

Géométrie des espaces homogènes rationnels, courbes rationnelles et combinatoire

Nicolas Perrin

Mémoire présenté pour obtenir le
DIPLOME D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Soutenu le 22 octobre 2010 devant le jury composé de

Michel BRION
Laurent GRUSON
Peter LITTELMANN
Christian PESKINE
Christoph SORGER
Claire VOISIN

au vu des rapports de Michel BRION, Peter LITTELMANN et Frank SOTTILE.

Je tiens ici tout d'abord à remercier Michel BRION, Peter LITTELMANN et Frank SOTTILE qui ont accepté de rapporter sur mes travaux, ainsi que Laurent GRUSON, Christian PESKINE, Christoph SORGER et Claire VOISIN qui ont accepté de faire partie du jury.

Je remercie toutes celles et tous ceux avec qui j'ai eu le plaisir de travailler : Jean D'ALMEIDA, Anders S. BUCH, Jorge CARAVANTES, Pierre-Emmanuel CHAPUT, Laurent GRUSON, Séverine LEIDWANGER, Laurent MANIVEL, Leonardo C. MIHALCEA, Boris PASQUIER et Evgeny SMIRNOV.

Je veux également remercier toutes celles et tous ceux qui ont été à l'origine des nombreuses activités scientifiques qui ont rythmé mon activité de recherche que ce soit à l'Institut de Mathématiques de Jussieu ou au Mathematisches Institut de l'Université de Bonn. Je pense en particulier aux membres de l'équipe de topologie et géométrie algébriques à Paris, aux membres de l'Arbeitsgruppe Algebra und Darstellungstheorie et de de l'Arbeitsgruppe Komplexe Geometrie à Bonn mais également aux membres du projet "Des Nouvelles Symétries pour la Théorie de Gromov-Witten" financé par l'ANR.

Je remercie tous les collègues de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, du Hausdorff Center for Mathematics et du Mathematisches Institut de l'université de Bonn qui rendent ces lieux très agréables ainsi que tous leurs personnels pour leur disponibilité et leur efficacité.

Je remercie enfin Stéphane DRUEL qui m'a beaucoup poussé à écrire ce texte et en a relu une première version ainsi que Daniel HUYBRECHTS qui m'a suivi (ou plutôt que j'ai suivi) à Cologne, à Paris et à Bonn et à qui mon adaptation à Bonn doit beaucoup.

À Yasmina, Younes, Lila et Elyas

PUBLICATIONS

Articles originaux présentés

- [Per04] Perrin N., *Rational curves on homogeneous cones*. Doc. Math. **9** (2004), 623–637.
- [Per05] Perrin N., *Rational curves on minuscule Schubert varieties*. J. Algebra **294** (2005), no. 2, 431–462.
- [Per07] Perrin N., *Small resolutions of minuscule Schubert varieties*. Compos. Math. **143** (2007), no. 5, 1255–1312.
- [ChMaPe07] Chaput P.-E., Manivel L., Perrin N., *Quantum cohomology of minuscule homogeneous spaces II : Hidden symmetries*. Int. Math. Res. Not. IMRN (2007), no. 22, 29 pages.
- [ChMaPe08] Chaput P.-E., Manivel L., Perrin N., *Quantum cohomology of minuscule homogeneous spaces*. Transform. Groups **13** (2008), no. 1, 47–89.
- [ChMaPe09] Chaput P.-E., Manivel L., Perrin N., *Affine symmetries of the equivariant quantum cohomology ring of rational homogeneous spaces*. Math. Res. Lett. **16** (2009), no. 1, 7–21.
- [Per09] Perrin N., *The Gorenstein locus of minuscule Schubert varieties*. Adv. Math. **220** (2009), no. 2, 505–522.
- [ChMaPe10] Chaput P.-E., Manivel L., Perrin N., *Quantum cohomology of minuscule homogeneous spaces III : semi-simplicity and consequences*. À paraître dans le Canadian J. of Math. (2010), DOI : 10.4153/CJM-2010-050-9, 18 pages.

Articles originaux non présentés

- [Per00] Perrin N., *Une composante du bord des instantons de degré 3*, CRAS t.330, Série I (2000), 217–220.
- [Per02a] Perrin N., *Lieu singulier des surfaces rationnelles réglées*, Math. Zeit., 241 (2002), no. 2, 375–396.
- [Per02b] Perrin N., *Courbes rationnelles sur les variétés homogènes*, Annales de l’Institut Fourier, 52 (2002), no. 1, 105–132.
- [Per02c] Perrin N., *Limites de fibrés vectoriels sur $\mathbf{M}_{\mathbb{Q}_3}(0, 2, 0)$* , CRAS, 334 (2002), no. 9, 779–782.
- [Per02d] Perrin N., *Deux composantes du bord des instantons de degré 3*, Bulletin de la SMF, 130 (2002), no. 4, 537–572.
- [Per05] Perrin N., *Déformation de fibrés vectoriels sur les variétés lisses de dimension trois*, Manuscripta Mathematica 116 (2005), no. 4, 449–474.
- [dAGrPe05] d’Almeida J., Gruson L., Perrin N., *Quelques remarques sur les courbes de genre 5*, Journal of the LMS (2) 72 (2005), no. 3, 545–570.
- [Per07] Perrin N., *Small codimension smooth subvarieties in even-dimensional homogeneous spaces with Picard group \mathbb{Z}* , CRAS, 345 (2007), no. 3, 155–160.
- [PaPe10] Pasquier B., Perrin N., *Local rigidity of quasi-regular varieties*, Mathematische Zeitschrift **265** (2010) no. 3, 589–600.
- [ChPe10] Chaput P.-E., Perrin N., *Rationality of some Gromov-Witten varieties and application to quantum K-theory*. À paraître dans Communications in Contemporary Mathematics (2010).

Note : les articles [Per00], [Per02a], [Per02b] et [Per02d] sont tirés de ma thèse.

GÉOMÉTRIE DES ESPACES HOMOGENES RATIONNELS, COURBES RATIONNELLES ET COMBINATOIRE

Introduction

Ce texte se situe entre géométrie algébrique et théorie des représentations. Les variétés auxquelles nous nous intéressons seront toujours des variétés algébriques définies sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes. Elles seront par ailleurs très souvent munies de l'action d'un groupe G qui sera un sous-groupe fermé du groupe linéaire. L'exemple fondamental est celui des espaces homogènes rationnels. Pour donner une définition précise, fixons un groupe algébrique semi-simple G et P un sous-groupe parabolique de G (c'est-à-dire tel que le quotient G/P est compact). Le quotient G/P est alors une variété algébrique projective. Les variétés obtenues de cette manière seront appelées dans ce texte *espaces homogènes rationnels*. Les espaces projectifs et les grassmanniennes sont les premiers exemples d'espaces homogènes rationnels.

La géométrie des espaces homogènes rationnels a été beaucoup étudiée et ce pour plusieurs raisons. La première étant certainement que l'action transitive du groupe G facilite cette étude. Il s'avère également que la géométrie de ces espaces est très riche (par exemple de nombreuses variétés de Fano sont obtenues à partir d'espaces homogènes rationnels à l'aide de constructions géométriques simples). Inversement, la géométrie de ces espaces fournit beaucoup d'informations sur le groupe G lui-même ainsi que sur ses représentations. De nombreux aspects de la géométrie de ces espaces sont cependant encore mal compris. Dans ce texte nous proposons d'en étudier certains. En particulier, nous discuterons de l'existence de résolutions dites *petites* pour les variétés de Schubert et des propriétés de semi-simplicité et de symétrie de l'anneau de cohomologie quantique. Nous verrons que dans les deux cas, deux outils s'imposent : les courbes rationnelles¹ et la combinatoire.

La compréhension du comportement des courbes rationnelles sur une variété algébrique est un outil important pour étudier la géométrie de la variété elle-même. Nous rencontrerons les courbes rationnelles à travers deux théories maintenant classiques pour lesquelles leur étude s'est révélée très fructueuse : *la théorie de Mori* qui prédit, partiellement de manière conjecturale, la géométrie birationnelle des variétés et *la cohomologie quantique* qui définit de nouveaux invariants, parfois énumératifs, d'une variété lisse.

Un autre aspect des résultats que nous décrivons ici, plus intimement lié aux espaces homogènes rationnels eux-mêmes, est l'aspect combinatoire. En particulier la combinatoire des systèmes de racines et des diagrammes de Dynkin associés joue un rôle important. Nous verrons ainsi que bon nombre de résultats géométriques ont une traduction combinatoire simple et que le va et vient entre combinatoire et géométrie se révèle alors fructueux.

Dans la suite de cette introduction nous allons rappeler quelques-unes des propriétés fondamentales de la géométrie des espaces homogènes rationnels ainsi que certains problèmes encore non résolus. Notre choix est bien sûr orienté par les résultats que nous présenterons par la suite. Nous discuterons notamment des singularités des variétés de Schubert et de leurs résolutions ainsi que de la cohomologie et de la cohomologie quantique des espaces homogènes rationnels.

J'ai pris dans ce texte le parti de ne présenter que les résultats publiés ou à paraître. Ainsi ce texte décrira les résultats des articles [ChMaPe07], [ChMaPe08], [ChMaPe10], [ChMaPe09],

1. Les courbes rationnelles seront vues sous différents aspects, parfois comme applications stables de genre 0, parfois comme courbes irréductibles de genre géométrique 0 sur la variété.

[Per04], [Per05], [Per07] et [Per09]. Les résultats plus récents et non encore publiés tels que [ChPe09a], [ChPe09b] et [ChPe10] seront seulement rapidement évoqués dans ce texte. Pour garder une certaine unité à ce texte, d'autres travaux tels que [Per05], [dAGrPe05], [Per07] ou [PaPe10] ne seront pas évoqués.

Singularités des variétés de Schubert. Fixons G un groupe algébrique semisimple et simplement connexe et fixons P un sous-groupe parabolique de G . Le quotient G/P est un espace homogène rationnel que nous noterons X . Fixons maintenant B un sous-groupe de Borel de G . Les orbites de B dans X sont appelées les *cellules de Schubert* de X . Ce sont des espaces affines. Ils sont indexés par un sous-ensemble que l'on notera W^P du groupe de Weyl W associé au groupe G . Leurs adhérences dans X sont les *variétés de Schubert*. Elles sont également indexées par W^P , ainsi pour $w \in W^P$, on note $X(w)$ la variété de Schubert associée. Ces dernières jouent un rôle très important dans la géométrie des espaces homogènes ainsi que dans la théorie des représentations du groupe G . Rappelons à titre d'exemple que les variétés de Schubert de l'espace projectif sont ses sous-espaces linéaires. Parmi leurs propriétés, notons qu'elles définissent une stratification de X et qu'elles sont en général singulières. On dispose de résultats généraux sur ces singularités, en particulier, les variétés de Schubert sont normales, à singularités rationnelles et donc de Cohen-Macaulay.

Cependant d'autres aspects, pour certains plus combinatoires, de ces singularités sont moins bien compris. Remarquons tout d'abord qu'une cellule de Schubert d'une variété de Schubert $X(w)$ étant homogène, soit elle ne rencontre pas le lieu singulier de $X(w)$, soit elle est contenue dans ce lieu singulier. Une question difficile est de décrire combinatoirement les cellules de Schubert d'une variété de Schubert $X(w)$ qui sont contenues dans le lieu singulier de $X(w)$ ainsi que de décrire le type de singularité qui apparaît. Ceci est un problème ouvert résolu récemment pour le groupe $SL_n(\mathbb{C})$ de manière quasi simultanée par L. Manivel [Man01a] et [Man01b], S. Billey et G. Warrington [BiWa01], A. Lascoux, C. Kassel et C. Reutenauer [KaLaRe03] et A. Cortez [Cor03]². Des questions analogues peuvent être posées pour le lieu où la variété de Schubert est de Gorenstein ou bien localement factorielle. Pour ces questions, on dispose d'encore moins de résultats. A. Woo et A. Yong [WoYo06] ont proposé une conjecture qui permettrait de décrire le lieu où une variété de Schubert est de Gorenstein. Nous montrerons cette conjecture dans le cas des variétés de Schubert minuscules (voir la définition 1.4).

À une paire de variétés de Schubert $(X(u), X(v))$ avec u et v dans W^P et telles que l'on a l'inclusion $X(u) \subset X(v)$, D. Kazhdan et G. Lusztig [KaLu79] ont associé un polynôme $P_{u,v}$, appelé *polynôme de Kazhdan-Lusztig* qui mesure la singularité d'un point général de $X(u)$ dans $X(v)$ ³. Ce polynôme est présent un peu partout dans la théorie des représentations du groupe G ainsi que d'autres domaines connexes. Il est défini par récurrence ce qui rend difficile la preuve de résultats concernant ses coefficients. Cependant, D. Kazhdan et G. Lusztig ont conjecturé que ce polynôme est à coefficients entiers positifs. Ils ont résolu cette conjecture dans le cas des groupe de Weyl dans [KaLu80]⁴ en exprimant ce polynôme à l'aide de la cohomologie d'intersection. Un corollaire de leurs résultats est que l'on peut alors calculer explicitement le polynôme de

2. Dans le cas général et même des groupes de Kac-Moody, des caractérisations indirectes du lieu singulier sont données par J. Carrell et J. Kuttler [CaKu03] et [CaKu06] et par S. Kumar [Kum96].

3. Notons que ce fait n'était pas la motivation initiale pour la définition de ces polynômes. La motivation était plutôt de comprendre des problèmes de théorie des représentations.

4. Cette conjecture reste ouverte lorsque W est un groupe de Coxeter général.

Kazhdan-Lusztig $P_{u,v}$ grâce à une résolution de $X(v)$ ayant des fibres pas trop grosses. De telles résolutions sont appelées *résolutions petites* (voir définition 3.1). Si $\pi : \tilde{X}(v) \rightarrow X(v)$ est une résolution petite d'une variété de Schubert $X(v)$, si $X(u)$ est une sous-variété de Schubert de $X(v)$ et x_u est un point général de $X(u)$, alors on obtient la formule

$$P_{u,v}(t^2) = \text{Poin}_{\pi^{-1}(x_u)}(t),$$

où $\text{Poin}_{\pi^{-1}(x_u)}$ désigne le polynôme de Poincaré de la fibre $\pi^{-1}(x_u)$. Cependant les variétés de Schubert n'admettent pas toujours de résolution petite, leur construction n'est pas aisée et on ne dispose pas de critère assurant leur existence. Nous répondrons complètement à la question de l'existence de résolutions petites pour une classe de variétés de Schubert appelés *variétés de Schubert minuscules* (voir définition 1.4).

Cohomologie quantique. Les variétés de Schubert jouent également un grand rôle dans la compréhension de la cohomologie de l'espace homogène rationnel X . En particulier, les classes des variétés de Schubert, appelées *classes de Schubert* forment une base de l'homologie et par dualité de Poincaré de la cohomologie de X à coefficients dans \mathbb{Z} , l'anneau des entiers. Un des problèmes combinatoires importants dans ce domaine est le calcul des coefficients de structure, dans la base formée des classes de Schubert, du produit dans l'anneau de cohomologie. Ces coefficients, appelés *coefficients de Littlewood-Richardson* et notés $c_{u,v}^w$ pour u, v et w dans W^P , sont définis par la formule :

$$\sigma^u \cup \sigma^v = \sum_{w \in W^P} c_{u,v}^w \sigma^w,$$

où, pour u dans W^P , on note σ^u la classe de Schubert associée au dual de Poincaré de la classe de la variété de Schubert $X(u)$. La difficulté est ici de donner une *formule combinatoire* pour $c_{u,v}^w$, c'est-à-dire de décrire $c_{u,v}^w$ comme le cardinal d'un ensemble d'objets. Ceci mettrait en lumière la positivité de ces coefficients, assurée par le fait que toutes les intersections entre variétés de Schubert peuvent être rendues transverses grâce à l'action du groupe⁵.

Il existe une autre approche, initiée par Borel [Bor53], pour étudier l'anneau $H^*(X, \mathbb{Q})$ de cohomologie de X à coefficients dans \mathbb{Q} cette fois-ci. Cette dernière permet de réaliser l'anneau $H^*(X, \mathbb{Q})$ comme un quotient d'un anneau de polynôme par un idéal déterminé par les invariants du groupe de Weyl. Pour décrire ce résultat, nous aurons besoin de quelques notations. Notons W le groupe de Weyl de G et W_P celui de P qui est un sous-groupe de W . Remarquons en passant que W^P , l'ensemble indexant les cellules de Schubert est contenu dans W et forme un système de représentants du quotient W/W_P . Il est formé des éléments de plus petite longueur (W étant considéré comme un groupe de Coxeter une fois un sous-groupe de Borel fixé). Notons \mathcal{P} le réseau des poids de G . Le groupe de Weyl W agit sur \mathcal{P} et on a un isomorphisme d'algèbres :

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[\mathcal{P}]^{W_P} / \mathbb{Q}[\mathcal{P}]_+^W,$$

où $\mathbb{Q}[\mathcal{P}]^{W_P}$ désigne l'anneau des polynômes, sur le réseau des poids, invariants sous l'action de W_P et $\mathbb{Q}[\mathcal{P}]_+^W$ est l'idéal de $\mathbb{Q}[\mathcal{P}]^W$ engendré par les polynômes invariants sous W de terme constant nul. Une des difficultés du calcul de Schubert est de relier la présentation ci-dessus, également appelée *présentation de Borel*, au calcul des coefficients de Littlewood-Richardson. En effet, cette présentation a l'avantage de rendre la multiplication facile à calculer (même si le calcul explicite des relations n'est pas chose aisée) mais les classes de nature géométrique sont les classes de Schubert et c'est leur produit qu'on cherche à calculer. Il faut donc exprimer

5. Théorème de Kleiman-Bertini, voir [Kle74].

les classes de Schubert en fonction des générateurs donnés dans la présentation de Borel. Une telle expression, nécessairement polynomiale est appelée *polynôme de Schubert*. Un procédé par récurrence, utilisant ce qu'on appelle les *différences divisées* et proposé par I. N. Bernšteïn, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand dans [BeGeGe73] et par M. Demazure dans [Dem74], permet de calculer ces polynômes. Ce procédé est cependant bien trop complexe pour espérer obtenir des formules combinatoires pour les coefficients de Littlewood-Richardson. Notons que le calcul de Schubert et la détermination de polynômes de Schubert est un domaine très actif et nous ne chercherons pas à recenser toute la littérature qui s'y réfère.

Il y a une quinzaine d'années, un autre aspect du calcul de Schubert et plus généralement de la géométrie énumérative a connu des progrès spectaculaires, notamment sous l'impulsion de M. Kontsevich et Y. Manin. Il s'agit de compter, sur une variété X , le nombre de courbes rationnelles⁶ de classes d'homologie fixée et satisfaisant des conditions géométriques (du type intersection prescrite) de telle sorte que ce nombre soit fini. Un tel nombre est appelé *invariant de Gromov-Witten*. L'exemple typique est le nombre N_d de courbes rationnelles de degré d dans le plan projectif passant par $3d-1$ points en position générale. Ce nombre n'était connu que pour d inférieur à 5. M. Kontsevich et Y. Manin donnent dans [KoMa94] (voir également [FuPa97]) la formule remarquable suivante :

$$N_d = \sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1} N_{d_2} \left(d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right). \quad (1)$$

Elle permet de calculer tous les nombres N_d à partir de N_1 , c'est-à-dire du nombre de droites passant par deux points ! Le même genre de résultats est valable pour toute variété lisse (suite aux travaux de K. Behrend et B. Fantechi [BeFa97]⁷). La nature récursive des invariants de Gromov-Witten vient de la structure de l'espace des modules paramétrant les courbes rationnelles. Cette structure permet de définir à partir des invariants de Gromov-Witten, une déformation de l'anneau de cohomologie de la variété qui est encore une algèbre commutative et surtout associative appelée *cohomologie quantique*. Les invariants de Gromov-Witten sont les constantes de structure de cette algèbre. L'associativité du produit dans cette algèbre induit des relations sur les invariants de Gromov-Witten et la formule ci-dessus en est l'un des exemples les plus simples.

En général, le calcul dans l'algèbre de cohomologie quantique est rendu difficile par le fait que les invariants de Gromov-Witten ne comptent pas toujours véritablement un nombre de courbes rationnelles satisfaisant des conditions géométriques : même si on impose des conditions sur les courbes de telle sorte que la dimension attendue de l'ensemble des courbes satisfaisant ces conditions soit nulle, dans les faits, il peut arriver que la dimension de cet ensemble ne soit pas nulle. L'invariant de Gromov-Witten est alors un nombre dit *virtuel* de courbes ce qui complique nettement les calculs. Pour un espace homogène rationnel X , cette situation ne se produit pas et tous les invariants de Gromov-Witten sont énumératifs. Plus précisément, soit u, v et w dans W^P et β une classe dans le groupe d'homologie $H_2(X, \mathbb{Z})$, l'invariant de Gromov-Witten $I_\beta(u, v, w)$ est soit nul, soit, lorsque celui-ci est fini, le nombre des courbes rationnelles dont la classe d'homologie est β et qui rencontrent trois variétés en position générale dont les classes de cohomologie (après application de la dualité de Poincaré) sont respectivement σ^u, σ^v et σ^w . Le fait surprenant est que si l'on définit sur le \mathbb{Z} -module $QH^*(X, \mathbb{Z}) := H^*(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[H_2(X, \mathbb{Z})]$ la

6. La théorie a été développée pour des courbes de genre quelconque, mais nous nous contenterons dans ce texte d'évoquer les courbes rationnelles.

7. Par souci de brièveté, nous avons pris le parti de ne pas évoquer les aspects liés à la géométrie symplectique et nous ne citons pas les résultats équivalents et parfois antérieurs obtenus sur ce sujet en géométrie symplectique.

multiplication

$$\sigma^u * \sigma^v = \sum_{w \in W^P, \beta \in H_2(X, \mathbb{Z})} I_\beta(u, v, w^\vee) q^\beta \sigma^w,$$

où l'élément w^\vee de W^P est caractérisé par le fait que σ^{w^\vee} est le dual de Poincaré de la classe de Schubert σ^w , alors on obtient une algèbre commutative et associative. C'est l'algèbre de cohomologie quantique. L'algèbre de cohomologie est obtenue par spécialisation en posant $q^\beta = 0$ pour tout élément β de $H_2(X, \mathbb{Z})$. Remarquons ici qu'il existe un *gros* et un *petit* anneau de cohomologie quantique. Celui que nous utiliserons, que nous avons noté $QH^*(X, \mathbb{Z})$ et introduit ci-dessus est le petit anneau de cohomologie quantique. Le gros anneau de cohomologie quantique est égal comme \mathbb{Z} -module au produit tensoriel $H^*(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[H_*(X, \mathbb{Z})]$. C'est l'associativité du produit de ce dernier pour le plan projectif qui conduit à la formule (1). Nous ne parlerons dans ce texte que du petit anneau de cohomologie quantique.

Les mêmes questions que pour l'anneau de cohomologie classique se posent pour l'anneau de cohomologie quantique. Cependant, une difficulté supplémentaire vient s'ajouter, due au fait que la cohomologie quantique n'est pas fonctorielle. Ainsi, même si l'on a toujours, pour B un sous-groupe de Borel de P , un morphisme $G/B \rightarrow G/P$, il n'existe plus de morphisme d'anneaux entre leurs cohomologies quantiques. Bien que l'on dispose d'une présentation, donnée par B. Kim [Kim99], de l'anneau de cohomologie quantique lorsque P est un sous-groupe de Borel B , on ne peut en déduire une présentation de l'anneau de cohomologie quantique pour G/P avec P un sous-groupe parabolique quelconque de G . De manière paradoxale, si la cohomologie quantique peut paraître plus difficile à calculer que la cohomologie classique, on verra qu'elle est parfois aussi plus simple : elle admet plus de symétries que la cohomologie classique. Ces symétries permettent d'obtenir des formules inattendues dans la cohomologie classique.

Organisation. Dans le premier paragraphe, nous rappelons quelques définitions et quelques résultats dont nous aurons besoin par la suite. Ces rappels portent principalement sur deux thèmes : tout d'abord, les groupes algébriques, les espaces homogènes et la combinatoire associée. Notamment nous définirons les variétés de Schubert minuscules et cominusculaires qui jouent un rôle important dans ce texte. Ensuite, nous ferons de rapides rappels sur les courbes rationnelles, la théorie de Mori et la cohomologie quantique.

Dans le deuxième paragraphe, nous nous intéressons au schéma des morphismes de \mathbb{P}^1 vers une variété de Schubert. Nous décrirons les composantes irréductibles de ce schéma lorsque la variété de Schubert est un espace homogène ou lorsque c'est une variété de Schubert minuscule. Cette partie reprend les résultats des articles [Per04] et [Per05].

Dans le troisième paragraphe, nous étudions la géométrie birationnelle relative au-dessus d'une variété de Schubert, notamment celle des résolutions de Bott-Samelson de la variété de Schubert. Nous obtenons, pour les variétés de Schubert minuscules, une description complète et explicite des modèles minimaux relatifs ainsi que des résolutions petites. On en déduit une preuve d'une conjecture de A. Woo et A. Yong sur le lieu de Gorenstein des variétés de Schubert. Cette partie décrit les résultats des articles [Per07] et [Per09].

Dans le quatrième et dernier paragraphe, nous décrivons certaines propriétés de la cohomologie quantique. La cohomologie quantique des espaces homogènes minuscules et cominusculaires tout d'abord où nous mettons en évidence un principe *quantique/classique* qui permet de calculer les invariants de Gromov-Witten comme des coefficients de Littlewood-Richardson classiques sur un espace homogène auxiliaire. Nous donnons ainsi une présentation unifiée des anneaux de cohomologie quantiques des espaces homogènes (co)minuscules. Nous mettons ensuite en

évidence l'existence d'une involution appelée *dualité étrange* dans l'anneau de cohomologie quantique des espaces homogènes (co)minuscules et expliquons qu'elle est intimement liée au fait que l'algèbre de cohomologie quantique de ces espaces est semi-simple. Enfin, nous décrivons d'autres symétries de la cohomologie quantique, d'un espace homogène quelconque cette fois-ci, et montrons que le groupe fondamental du groupe d'automorphismes de l'espace homogène peut être plongé dans les éléments inversibles de la cohomologie quantique. Nous donnons des formules explicites pour le produit par ces éléments inversibles. Cette partie présente des résultats obtenus en collaboration avec P. E. Chaput et L. Manivel dans les articles [ChMaPe07], [ChMaPe08], [ChMaPe09] et [ChMaPe10].

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Notations et rappels | 9 |
| 1.1 | Groupes algébriques affines et combinatoire | 9 |
| 1.2 | Espaces homogènes rationnels | 10 |
| 1.3 | Courbes rationnelles | 12 |
| 1.3.1 | Espaces de modules de courbes, définition de la cohomologie quantique | 12 |
| 1.3.2 | Théorie de Mori | 13 |
| 2 | Résultats sur l'espace de modules des courbes | 15 |
| 2.1 | Courbes rationnelles sur les espaces homogènes | 15 |
| 2.2 | Courbes rationnelles sur les variétés de Schubert minuscules | 16 |
| 2.3 | Courbes rationnelles sur les cônes au-dessus des espaces homogènes | 17 |
| 3 | Géométrie birationnelle | 18 |
| 3.1 | Résolutions petites | 19 |
| 3.1.1 | Carquois de Schubert | 19 |
| 3.1.2 | Variétés de configurations | 20 |
| 3.1.3 | Résolutions petites | 21 |
| 3.2 | Application au lieu de Gorenstein | 22 |
| 3.3 | Courbes rationnelles | 24 |
| 4 | Cohomologie quantique | 25 |
| 4.1 | Quelques résultats sur la cohomologie quantiques des espaces homogènes | 25 |
| 4.2 | Variétés minuscules | 26 |
| 4.2.1 | Géométrie des courbes rationnelles | 27 |
| 4.2.2 | Invariants de Gromov-Witten | 28 |
| 4.3 | Dualité étrange | 29 |
| 4.4 | Symétries affines | 31 |

1 Notations et rappels

1.1 Groupes algébriques affines et combinatoire

Soit G un groupe algébrique affine que nous supposons toujours semi-simple et le plus souvent simplement connexe (nous aurons parfois à considérer le groupe adjoint associé qui est semi-simple mais pas toujours simplement connexe). Nous noterons T un tore maximal de G , nous noterons B un sous-groupe de Borel de G contenant T et P un sous-groupe parabolique de G contenant B . Nous renvoyons au texte de A. Borel [Bor91] pour les bases de la théorie des groupes algébriques affines.

À ces objets est associée une combinatoire basée sur le système de racines R du groupe G . Nous noterons W le groupe de Weyl de G , obtenu une fois le tore maximal T fixé et nous noterons S l'ensemble des racines simples de G (déterminées par le choix du sous-groupe de Borel B contenant T). La paire (W, S) forme alors un groupe de Coxeter et on peut notamment associer à tout élément w de W sa longueur $l(w)$. Nous noterons s_α la réflexion par rapport à une racine α . Nous renvoyons à [Bou54] pour plus de détails.

Le groupe de Weyl W_P du sous-groupe parabolique P peut être considéré comme un sous-groupe du groupe de Weyl W de G . Les racines simples $\alpha \in S$ dont la réflexion s_α est dans W_P sont les *racines du sous-groupe de Levi de P* (ce groupe est défini comme le quotient de P par son radical unipotent mais comme il existe toujours une section de ce quotient, il peut donc être considéré comme un sous-groupe de P). On note $\Sigma(P)$ le sous-ensemble de S des racines qui ne sont pas des racines du sous-groupe de Levi de P . Par exemple, on a $\Sigma(B) = S$. On va souvent s'intéresser au quotient W/W_P . Il existe des représentants particuliers dans W de ce quotient. Ces représentants sont les éléments de plus petite longueur dans leur classe dans le quotient W/W_P . Leur ensemble W^P est décrit de la manière suivante :

$$W^P = \{w \in W \mid l(ws_\alpha) \geq l(w) \text{ pour tout } \alpha \notin \Sigma(P)\}.$$

Lorsque l'on a une variété homogène $X = G/P$, nous noterons notamment w_X l'élément de plus grande longueur de W^P . Si Y est une variété homogène L/Q où L est un sous-groupe de Levi d'un parabolique de G , alors le groupe de Weyl W_L de L est un sous-groupe de W et l'élément w_Y de $(W_L)^Q \subset W_L$ sera considéré comme un élément de W .

Rappelons que les racines peuvent être vues comme des éléments de \mathfrak{h}^* où \mathfrak{h} est l'algèbre de Lie du tore maximal T et \mathfrak{h}^* est l'espace vectoriel dual. Les poids sont également des éléments de \mathfrak{h}^* . Les racines simples (ainsi que les poids fondamentaux) forment une base de l'espace vectoriel \mathfrak{h}^* et le sous- \mathbb{Z} -module qu'elles engendrent est noté \mathcal{Q} et est appelé le *réseau des racines*. De même le sous- \mathbb{Z} -module engendré par les poids fondamentaux est appelé le *réseau des poids* et est noté \mathcal{P} . On a l'inclusion $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Si on considère le système de racines dual de R , noté R^\vee , alors on peut également définir son réseau des racines et des poids (qui vivent naturellement dans \mathfrak{h}) et qui sont respectivement le *réseau des coracines*, noté \mathcal{Q}^\vee et le *réseau des copoids*, noté \mathcal{P}^\vee . On a encore une inclusion de réseaux $\mathcal{Q}^\vee \subset \mathcal{P}^\vee$.

1.2 Espaces homogènes rationnels

Un espace homogène rationnel est par définition dans ce texte le quotient G/P d'un groupe algébrique affine semi-simple G par un sous-groupe parabolique P . Soit $X^*(T)$ le groupe des caractères, c'est-à-dire des morphismes algébriques de groupes $T \rightarrow \mathbb{C}^*$, du tore maximal T . Une base de ce groupe est donnée par les poids fondamentaux $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in S}$ qui forme la base duale de celle des coracines simples. Le groupe des caractères $X^*(B)$ du sous-groupe de Borel B s'identifie à $X^*(T)$ grâce au morphisme de restriction. Si λ est un caractère de T , il peut donc être étendu en un unique caractère de B et on peut définir le fibré en droite équivariant sous l'action de G

$$\mathcal{L}(\lambda) := G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda} \rightarrow G/B$$

où $\mathbb{C}_{-\lambda}$ est la représentation de B de dimension 1 et de poids $-\lambda$. Il se trouve que tout fibré en droite peut s'écrire de cette manière. On obtient ainsi un isomorphisme de groupes abéliens $X^*(T) \simeq \text{Pic}(G/B)$. Après identification de ces deux groupes, la flèche de G/B dans G/P induit une inclusion $\text{Pic}(G/P) \subset \text{Pic}(G/B)$ dont l'image est formée des caractères $\lambda \in X^*(T)$ qui vérifient $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0$ pour les racines simple α qui ne sont pas dans $\Sigma(P)$. Une base de ce

sous-groupe est formée des poids fondamentaux $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in \Sigma(P)}$. Le groupe de Picard de l'espace homogène G/P est donc isomorphe à $\mathbb{Z}^{\Sigma(P)}$.

Soit V une représentation irréductible de G de plus haut poids ϖ . L'orbite d'un vecteur de plus haut poids x_ϖ dans $\mathbb{P}(V)$ est un espace homogène G/P et lorsque ϖ est la somme des poids fondamentaux ϖ_α associés aux racines simples α de $\Sigma(P)$, on note ϖ_P le poids ainsi obtenu. On a alors que $\mathbb{P}(V)$ est le plus petit⁸ plongement de G/P . Ce plongement est appelé *plongement de Plücker de G/P* . Le plus souvent nous considérerons les espaces homogènes rationnels comme plongés par ce plongement de Plücker.

Rappelons la définition d'un poids minuscule (cf. par exemple [Bou54], VI,1, exercice 24).

Définition 1.1 Un poids ϖ est dit *minuscule* si on a $|\langle \varpi, \alpha^\vee \rangle| \leq 1$ pour toute racine α .

Un poids minuscule ϖ est également caractérisé par le fait que le groupe de Weyl agit transitivement sur les poids de la représentation de plus haut poids ϖ . Remarquons qu'un poids minuscule est toujours un poids fondamental. Avec cette remarque en tête, on peut donner la définition suivante.

Définition 1.2 Un poids ϖ est dit *cominuscule* s'il est fondamental et si le poids fondamental dual ϖ^\vee est minuscule.

On peut donner une autre définition des poids cominusculs par la propriété suivante : ϖ est cominuscule si et seulement si on a $\langle \varpi, \theta^\vee \rangle = 1$, avec θ la plus grande racine du système de racines R . On définit alors les espaces homogènes minuscules et cominusculs par

Définition 1.3 Un espace homogène G/P est dit *minuscule* (resp. *cominuscule*) si le poids ϖ_P est minuscule (resp. cominuscule).

On définit également les variétés de Schubert minuscules et cominusculs.

Définition 1.4 Les variétés de Schubert d'un espace homogène minuscule (resp. cominuscule) sont appelées *variétés de Schubert minuscules* (resp. *variétés de Schubert cominusculs*).

Ainsi un espace G/P homogène (co)minuscule (ceci signifie qu'il est soit minuscule soit cominuscule) est toujours de groupe de Picard \mathbb{Z} et le groupe parabolique P est maximal. Bien entendu, lorsque le groupe est simplement lacé, les notions de poids (ou d'espaces homogènes) minuscule et cominusculs coïncident. Remarquons également que les espaces homogènes cominusculs sont les espaces symétriques Hermitiens. Nous donnons dans le tableau suivant la liste des espaces homogènes cominusculs. Il y a diverses séries infinies et deux cas exceptionnels. Remarquons qu'il existe pour les groupes non simplement lacés des espaces homogènes minuscules non cominusculs mais ceux-ci peuvent également être obtenus comme espaces homogènes sous un groupe simplement lacé (plus gros) et sont cominusculs pour ce plus gros groupe. Ils apparaissent donc également dans la liste ci-dessous.

8. Le cône ample contient un unique élément minimal, qui est toujours très ample et qui définit le plongement minimal.

| Type | Variété | Diagramme | Dimension | Indice |
|-----------|----------------------------|-----------|--------------------|--------|
| A_{n-1} | $\mathbb{G}(k, n)$ | | $k(n-k)$ | n |
| B_n | \mathbb{Q}^{2n-1} | | $2n-1$ | $2n-1$ |
| C_n | $\mathbb{G}_\omega(n, 2n)$ | | $\frac{n(n+1)}{2}$ | $n+1$ |
| D_n | \mathbb{Q}^{2n-2} | | $2n-2$ | $2n-2$ |
| D_n | $\mathbb{G}_Q(n, 2n)$ | | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $2n-2$ |
| E_6 | $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ | | 16 | 12 |
| E_7 | E_7/P_7 | | 27 | 18 |

Rappelons que le diagramme de Dynkin du groupe G a pour sommets les racines simples. Dans le tableau précédent nous avons indiqué l'ensemble $\Sigma(P)$ de racines simples avec des noeuds pleins. La variété cominuscule G/P est décrite dans la seconde colonne où par convention, nous avons noté $\mathbb{G}(k, n)$ (resp. $\mathbb{G}_\omega(n, 2n), \mathbb{G}_Q(n, 2n)$) la Grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension k dans un espace vectoriel de dimension n (resp. des sous-espaces vectoriels de dimension n dans un espace vectoriel de dimension $2n$ isotropes pour une forme quadratique Q , pour une forme symplectique ω). Dans le cas $\mathbb{G}_Q(n, 2n)$, nous n'avons considéré qu'une des deux composantes connexes de la Grassmannienne évoquée ci-dessus. La notation \mathbb{Q}^m correspond à une quadrique de dimension m et $\mathbb{O}\mathbb{P}^2 = E_6/P_1$ et E_7/P_7 sont le plan de Cayley et la variété de Freudenthal. La dernière colonne donne l'indice de la variété c'est à dire l'entier $c_1(G/P)$ tel que $-K_X = c_1(G/P)H$ où H est un générateur ample du groupe de Picard.

1.3 Courbes rationnelles

Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition de quelques espaces de modules paramétrant les courbes rationnelles sur une variété X . Nous rappelons la définition des invariants de Gromov-Witten ainsi que la définition de l'anneau de cohomologie quantique. Nous rappelons également quelques définitions en théorie de Mori telles que les modèles minimaux et canoniques relatifs.

1.3.1 Espaces de modules de courbes, définition de la cohomologie quantique

Nous utiliserons principalement deux schémas paramétrant les courbes rationnelles (paramétrées) sur une variété projective X .

Définition 1.5 (i) Un morphisme $f : C \rightarrow X$ où C est une courbe projective est dit de classe $\alpha \in H_2(X, \mathbb{Z})$ si on a l'égalité $f_*[C] = \alpha$.

(ii) Une application stable d'une courbe projective de genre 0 avec n points marqués et de classe $\alpha \in H_2(X, \mathbb{Z})$ est la donnée

- d'un morphisme $f : C \rightarrow X$ de classe α avec C une courbe projective rationnelle nodale
- et de n points lisses $(p_i)_{i \in [1, n]}$ dans C

tels que si E est une composante irréductible de C contractée par f , alors elle contient au moins trois points singuliers ou marqués.

Fixons α dans $H_2(X, \mathbb{Z})$, nous nous intéresserons aux deux variétés suivantes : le schéma des morphismes $\text{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ qui paramètre les morphismes de classe α de \mathbb{P}^1 dans X et l'espace de modules $\overline{\mathbf{M}}_{n,0}(X, \alpha)$ qui paramètre les applications stables de classe α d'une courbe rationnelle avec n points marqués modulo isomorphisme⁹. Pour plus de détails sur le schéma des morphismes $\text{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$, nous renvoyons au texte de J. Kollár [Kol96]. Pour l'espace des applications stables, au moins à valeurs dans un espace homogène rationnel, nous renvoyons à [FuPa97].

L'espace de modules $\overline{\mathbf{M}}_{n,0}(X, \alpha)$ des applications stables dispose de morphismes d'évaluation $\text{ev}_i : \overline{\mathbf{M}}_{n,0}(X, \alpha) \rightarrow X$ pour tous les entiers i entre 1 et n . Si maintenant $(\gamma_i)_{i \in [1, n]}$ est une famille de classes de cohomologie, on peut définir, pour X un espace homogène rationnel¹⁰, les invariants de Gromov-Witten comme étant les nombres :

$$I_\alpha(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int_{\overline{\mathbf{M}}_{n,0}(X, \alpha)} \text{ev}_1^* \gamma_1 \cup \dots \cup \text{ev}_n^* \gamma_n$$

pour $\sum \deg(\gamma_i) = \dim \overline{\mathbf{M}}_{n,0}(X, \alpha)$. Rappelons ici que cette dimension est bien connue lorsque X est un espace homogène rationnel. On a la formule $\dim \overline{\mathbf{M}}_{n,0}(X, \alpha) = \dim X + \int_\alpha c_1(T_X) + n - 3$. Ces invariants permettent de définir le *gros* anneau de cohomologie quantique grâce auquel la formule (1) donnée en introduction peut être démontrée. Nous nous intéressons dans ce texte au *petit*¹¹ anneau de cohomologie quantique qui ne fait intervenir que les invariants ci-dessus avec $n = 3$. Nous le définissons maintenant pour les espaces homogènes rationnels.

Définition 1.6 (i) Soit X un espace homogène rationnel, on note $QH^*(X, \mathbb{Z})$ le \mathbb{Z} -module $H^*(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[H_2(X, \mathbb{Z})]$ où $\mathbb{Z}[H_2(X, \mathbb{Z})]$ est le \mathbb{Z} -module des polynômes sur $H_2(X, \mathbb{Z})$ à coefficients entiers. On a une \mathbb{Z} -base de ce module donné par les éléments $\alpha \in H_2(X, \mathbb{Z})$: l'élément correspondant est q^α et on a $q^\alpha q^\beta = q^{\alpha+\beta}$.

(ii) On définit une multiplication en étendant linéairement la formule suivante : pour u et v dans W^P , on a

$$\sigma^u * \sigma^v = \sum_{w \in W^P} \sum_{\alpha \in H_2(X, \mathbb{Z})} I_\alpha(\sigma^u, \sigma^v, \sigma^{w^\vee}) q^\alpha \sigma^w$$

où σ^{w^\vee} est déterminée par $\sigma^{w^\vee} \cup \sigma^v = \delta_{v,w} [\text{pt}]$ pour $\deg(\sigma^v) = \deg(\sigma^w)$.

Un des résultats fondamentaux de la théorie est le suivant.

Théorème 1.7 ([KoMa94]) *Le produit $*$ définit une structure d'algèbre commutative et associative qui se spécialise en le produit de cohomologie \cup lorsque les paramètres q^α pour α dans $H_2(X, \mathbb{Z})$ s'annulent.*

1.3.2 Théorie de Mori

Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un morphisme birationnel propre entre variétés normales. La théorie de Mori relative cherche à donner un modèle birationnel $\hat{\pi} : \hat{X} \rightarrow X$ pour la variété \tilde{X} relativement au-dessus de X tel que les singularités de \hat{X} ne soient pas trop mauvaises et ayant de propriétés de minimalité pour les courbes rationnelles contractées par le morphisme π .

9. Notons qu'il existe une notion d'application stable d'une courbe de genre g quelconque avec n points marqués et un espace de modules $\overline{\mathbf{M}}_{n,g}(X, \alpha)$ correspondant.

10. Dans le cas général d'une variété lisse X , on a besoin de considérer en plus la classe virtuelle $[\overline{\mathbf{M}}_{n,0}(X, \alpha)]^{\text{vir}}$ pour avoir une bonne définition des invariants de Gromov-Witten, voir [BeFa97].

11. On s'intéresse au petit anneau de cohomologie car dans bien des cas, par exemple lorsque le petit anneau est semi-simple, le gros anneau de cohomologie quantique peut être déduit du petit anneau de cohomologie quantique.

Les singularités que nous considèrerons sont les singularités terminales ou canoniques. Nous en donnons la définition, pour plus de détails, nous renvoyons exemple aux textes [KaMaMa87] ou [KoMo98].

Définition 1.8 Soit Y une variété normale telle que son diviseur canonique K_Y est \mathbb{Q} -Cartier (c'est-à-dire qu'un multiple de ce diviseur est de Cartier). Soit $f : X \rightarrow Y$ une résolution des singularités de Y (c'est-à-dire un morphisme propre et birationnel de source lisse). On peut alors écrire

$$K_X = f^*K_Y + \sum_i a_i E_i$$

où les E_i sont des diviseurs exceptionnels.

(i) La variété Y a des singularités *terminales* s'il existe une résolution f (ou de manière équivalente si toute résolution f) de Y vérifie l'inégalité $a_i > 0$ pour tout i .

(ii) La variété Y a des singularités *canoniques* s'il existe une résolution f (ou de manière équivalente si toute résolution f) de Y vérifie l'inégalité $a_i \geq 0$ pour tout i .

Définition 1.9 Un morphisme birationnel $\hat{\pi} : \hat{X} \rightarrow X$ est un modèle minimal relatif pour $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ s'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & \hat{X} \\ & \searrow \pi & \swarrow \hat{\pi} \\ & X & \end{array}$$

où φ est une application birationnelle définie sur un ouvert dense, où \hat{X} est à singularités terminales et où $K_{\hat{X}}$ est numériquement effectif sur les fibres de $\hat{\pi}$ (c'est-à-dire que pour toute courbe C contractée par $\hat{\pi}$, on a $K_{\hat{X}} \cdot C \geq 0$).

De manière semblable, on définit la notion de modèle canonique relatif.

Définition 1.10 Un morphisme birationnel $\hat{\pi} : \hat{X} \rightarrow X$ est un modèle canonique relatif pour $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ s'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & \hat{X} \\ & \searrow \pi & \swarrow \hat{\pi} \\ & X & \end{array}$$

où φ est une application birationnelle définie sur un ouvert dense, où \hat{X} est à singularités canoniques et où $K_{\hat{X}}$ est relativement ample (c'est-à-dire que pour toute courbe C contractée par $\hat{\pi}$, on a $K_{\hat{X}} \cdot C > 0$).

Dans notre situation, comme le morphisme $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est birationnel, pour tout autre morphisme birationnel $\pi' : \tilde{X}' \rightarrow X$, il existe un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & \tilde{X}' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & X & \end{array}$$

où φ est une application rationnelle et birationnelle. En particulier, tout modèle minimal pour $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est encore un modèle minimal pour le morphisme birationnel $\pi' : \tilde{X}' \rightarrow X$. Nous parlerons dans ce cas de modèle minimal relatif de X sans spécifier le morphisme birationnel π correspondant.

Nous évoquerons rapidement l'utilisation des flops dans ce texte, notamment pour montrer comment à partir d'un modèle minimal on peut obtenir tous les autres dans les situations que nous considérons. Nous renvoyons à [KoMo98] pour la définition des flops.

2 Résultats sur l'espace de modules des courbes

Dans ce paragraphe, nous décrivons les composantes irréductibles de l'espace de modules $\text{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ des morphismes de \mathbb{P}^1 dans X tels que $f_*[\mathbb{P}^1] = \alpha \in H_2(X, \mathbb{Z})$ où X est l'une des variétés suivantes :

- une variété de Schubert minuscule (voir la Définition 1.3) ;
- ou un cône au-dessus d'un espace homogène (voir la Définition 2.5).

Avant de traiter ces cas, nous rappelons le cas où X est un espace homogène rationnel.

2.1 Courbes rationnelles sur les espaces homogènes

Soit $X = G/P$ un espace homogène rationnel, J.F. Thomsen [Tho98] et plus tard B. Kim et R. Pandharipande [KiPa01] ont montré les résultats suivants, en utilisant des techniques de dégénérescence proches de celles utilisées par R. Hartshorne (voir [Har66]) pour montrer la connexité du schéma de Hilbert.

Théorème 2.1 ([Tho98]) *Soit α une classe numériquement effective dans $H_2(X, \mathbb{Z})$, alors le schéma des morphismes $\text{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ (ainsi que celui des applications stables $\overline{\mathbf{M}}_{n,0}(X, \alpha)$) sont irréductibles. De plus, si X n'est pas une surface, alors ces deux schémas contiennent un morphisme qui est une immersion fermée.*

Ce résultat peut se généraliser, notons $\overline{\mathbf{M}}_{n,g}(X, \alpha)$ l'espace de modules des applications stables de classe α d'une courbe de genre g vers X , alors on a le :

Théorème 2.2 ([KiPa01]) *Soit α une classe numériquement effective dans $H_2(X, \mathbb{Z})$, alors le schéma des applications stables $\overline{\mathbf{M}}_{n,g}(X, \alpha)$ est connexe.*

Nous avons donné une autre preuve du premier résultat dans [Per02] sans utiliser la technique de dégénérescence évoquée ci-dessus. Nous avons également montré l'existence de plongement (énoncée dans le Théorème 2.1) et qui n'était pas contenue dans le résultat initial de J.F. Thomsen. De manière schématique, la preuve repose sur l'étude d'un ouvert assez gros de X (dont le complémentaire est de codimension au moins 2). Nous montrons l'existence d'un tel ouvert muni d'un morphisme $p : U \rightarrow X'$ vers un espace $X' = G'/P'$ homogène sous un groupe G' de rang strictement inférieur à celui de G et tel que la flèche p est une tour de fibrés affines. On conclut alors par récurrence sur le rang du groupe en étudiant les relèvements des courbes rationnelles dans les tours de fibrés affines. Cette technique a l'avantage d'être plus facilement adaptable dans d'autres situations. Elle a notamment permis de montrer la rationalité de certaines variétés de Gromov-Witten ¹².

¹². La variété de Gromov-Witten associée à des sous-variétés X_1, \dots, X_n de X est le fermé $\text{ev}_1^{-1}(X_1) \cap \dots \cap \text{ev}_n^{-1}(X_n)$ de $\overline{\mathbf{M}}_{n,0}(X, \alpha)$.

2.2 Courbes rationnelles sur les variétés de Schubert minuscules

Soit X une variété de Schubert minuscule. Si on cherche à appliquer la méthode ci-dessus, on tombe rapidement sur la question suivante : une courbe rationnelle générale (c'est-à-dire générale dans une composante irréductible de l'espace de modules) rencontre-t-elle le lieu singulier de la variété de Schubert ? Le lieu singulier des variétés de Schubert étant en codimension au moins deux, on s'attend en première approximation à ce que ce ne soit pas le cas.

Il existe une raison évidente pour laquelle le schéma des morphismes $\mathrm{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ peut avoir plus d'une composante irréductible. En effet, la variété de Schubert X peut ne pas être localement factorielle. Son groupe des diviseurs de Weil noté $\mathrm{Weil}(X)$ est alors plus gros que son groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$. Comme on s'attend à ce qu'une courbe générale soit contenue dans le lieu lisse, l'intersection avec tous les diviseurs de Weil est bien définie alors que la classe α ne contient que l'information concernant l'intersection avec les diviseurs de Cartier.

Plus précisément, soit $\mathrm{Stab}(X)$ le stabilisateur de X dans G , soit U l'orbite dense de $\mathrm{Stab}(X)$ dans X et soit Y son complémentaire. La propriété minuscule impose que les diviseurs de Schubert rencontre l'orbite dense (voir par exemple [LaMuSe79]). Le fermé Y est donc de codimension au moins deux ce qui nous donne une application surjective

$$s : \mathrm{Pic}(U)^\vee \rightarrow H_2(X, \mathbb{Z}).$$

Pour toute classe $\alpha \in H_2(X, \mathbb{Z})$, on considère le morphisme :

$$i : \coprod_{s(\beta)=\alpha} \mathrm{Hom}_\beta(\mathbb{P}^1, U) \rightarrow \mathrm{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$$

où $\mathrm{Hom}_\beta(\mathbb{P}^1, U)$ est le schéma des morphismes $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow U$ tels que $[f] = \beta$ avec $[f]$ la forme linéaire sur $\mathrm{Pic}(U)$ définie par $L \mapsto \deg(f^*L)$. Comme $Y = X \setminus U$ est en codimension au moins deux, on s'attend à ce que l'image de ce morphisme soit dense ou encore que tout morphisme $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$ puisse être déformé en un morphisme dont l'image ne rencontre pas Y . Si c'est le cas, la technique du paragraphe précédent utilisant les tours de fibrés affines permet de conclure à l'irréductibilité du schéma $\mathrm{Hom}_\beta(\mathbb{P}^1, U)$ dès qu'il est non vide. Les images de ces schémas lorsque β varie décrivent alors les composantes irréductibles de $\mathrm{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$.

Notons $\mathfrak{nc}(\alpha)$ l'ensemble des éléments β de $\mathrm{Pic}(U)^\vee$ tels que $s(\beta) = \alpha$ et que le schéma $\mathrm{Hom}_\beta(\mathbb{P}^1, U)$ est non vide. On obtient alors :

Théorème 2.3 ([Per05]) *Si X est une variété de Schubert minuscule, les composantes irréductibles du schéma des morphismes $\mathrm{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ sont indexées par $\mathfrak{nc}(\alpha)$.*

Remarque 2.4 Nous donnerons une description plus intrinsèque de l'ensemble $\mathfrak{nc}(\alpha)$ en termes de modèles minimaux relatifs au paragraphe 3.3.

Comme nous l'avons déjà signalé, le point clé de la preuve est la démonstration du fait que l'application i ci-dessus est bien dominante. Ceci se montre en relevant les morphismes de \mathbb{P}^1 dans X à une résolution de Bott-Samelson $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ de X . En utilisant des résultats de positivité pour les variétés de Schubert minuscules et un résultat de lissage des courbes dû à R. Hartshorne et A. Hirschowitz [HaHi85], nous montrons que, quitte à ajouter une courbe à l'image du relèvement puis à régulariser la réunion ainsi obtenue, on obtient une déformation du relèvement qui ne rencontre plus le lieu exceptionnel et donc par projection une déformation du morphisme initial qui ne rencontre plus le lieu singulier.

2.3 Courbes rationnelles sur les cônes au-dessus des espaces homogènes

La discussion du précédent paragraphe n'explique pas toujours toutes les composantes du schéma des morphismes. En effet, il peut arriver que l'application i ci-dessus ne soit pas dominante. En particulier, on obtient des composantes irréductibles dont la courbe générique passe par le lieu singulier de la variété de Schubert. Pour illustrer ce fait, on s'intéresse dans ce paragraphe à des variétés plus simples que les variétés de Schubert mais dont les singularités sont proches : les cônes au-dessus des espaces homogènes. En effet, dans de nombreux cas les singularités des variétés de Schubert sont localement des cônes de base un espace homogène rationnel (voir par exemple [BrPo99]).

Commençons par donner une définition de ce que nous appellerons cône au-dessus d'un espace homogène, ou encore *cône de base un espace homogène*. Soit donc G/P un espace homogène et soit λ un poids dominant vérifiant $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0$ pour $\alpha \in S \setminus \Sigma(P)$ et $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$ pour $\alpha \in \Sigma(P)$. Ce poids définit un faisceau ample inversible $\mathcal{L}(\lambda)$ sur G/P . On peut plonger G/P dans l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0\mathcal{L}(\lambda)^\vee)$. Par ailleurs, pour V un espace vectoriel de dimension n , le sous-espace linéaire $\mathbb{P}(V)$ est contenu dans l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0\mathcal{L}(\lambda)^\vee \oplus V)$. On donne la définition suivante.

Définition 2.5 Le cône $X = \mathfrak{C}_{\lambda,n}(G/P)$ au-dessus de G/P dont le sommet est $\mathbb{P}(V)$ est l'ensemble des points $[v, x]$ de $\mathbb{P}(H^0\mathcal{L}(\lambda)^\vee \oplus V)$ associés aux vecteurs (v, x) avec $v \in V$ et $[x] \in X$ ¹³.

Il existe un sous-groupe unipotent du groupe des automorphismes du cône $\mathfrak{C}_{\lambda,n}(G/P)$ qui agit avec un nombre fini d'orbites. Les résultats de [FMcPSS95] permettent d'affirmer que les groupes de Chow du cône sont libres et on peut alors facilement vérifier que le groupe de Picard de $\mathfrak{C}_{\lambda,n}(G/P)$ ainsi que le groupe des classes de cycles, modulo équivalence rationnelle, de dimension 1 sur X sont isomorphes à \mathbb{Z} . Bien sûr le cône $\mathfrak{C}_{\lambda,n}(G/P)$ est lisse en dehors du sommet $\mathbb{P}(V)$ où il est singulier (sauf si l'espace homogène G/P est un espace projectif plongé linéairement).

Soit donc $X = \mathfrak{C}_{\lambda,n}(G/P)$ un tel cône associé à un poids dominant λ , soit Y le sommet du cône et U son complémentaire. Nous conservons les notations du paragraphe précédent et définissons notamment l'ensemble $\mathfrak{ne}(\alpha)$ pour $\alpha \in H_2(X, \mathbb{Z})$.

Théorème 2.6 ([Per04]) Notons \mathcal{Q}^\vee le réseau des coracines et considérons $c_1(G/P)$ comme un poids dominant.

- (i) Si $\langle \lambda, \mathcal{Q}^\vee \rangle = \mathbb{Z}$, les composantes irréductibles de $\text{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ sont indexées par $\mathfrak{ne}(\alpha)$.
- (ii) Si $\lambda > c_1(G/P)$, les composantes irréductibles de $\text{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ sont indexées par

$$\coprod_{\alpha' \leq \alpha} \mathfrak{ne}(\alpha').$$

Dans le second cas, l'existence de "nouvelles" composantes vient de l'existence de courbes passant par le sommet du cône qui ne peuvent être déformées en des courbes évitant ce sommet. L'entier $\alpha - \alpha'$ est alors la multiplicité de la courbe au sommet du cône.

Pour conclure ce paragraphe, nous énonçons quelques questions naturelles suite aux résultats précédents.

Question 2.7 Quelles sont les composantes irréductibles du schéma $\text{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ pour une variété de Schubert X quelconque ? Pour quelles variétés de Schubert ces composantes sont elles indexées par l'ensemble $\mathfrak{ne}(\alpha)$?

13. Dans cette définition, le symbole $[x]$ désigne la classe du vecteur x modulo homothéties.

Une meilleure compréhension des singularités de variétés de Schubert et en particulier l'existence de résolutions des singularités plus "petites" que la résolution de Bott-Samelson pourraient être utiles. Ceci est déjà le cas pour les variétés de Schubert minuscules comme le montre la discussion du paragraphe 3.3.

On peut ensuite poser la question plus précise suivante :

Question 2.8 *Les composantes irréductibles du schéma $\mathrm{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ sont-elles rationnellement connexes, unirationnelles ou même rationnelles ?*

Cette question, intéressante en elle-même joue un rôle dans l'étude de la K -théorie quantique des espaces homogènes rationnels (voir par exemple [BuMi08] et [ChPe10]).

Une autre question naturelle est d'étendre les résultats précédents au cas des courbes de genre supérieur. Le cas des espaces homogènes est déjà non trivial¹⁴. Pour obtenir l'irréductibilité, une condition sur la classes d'homologie α sera alors nécessaire. Pour C une courbe lisse de genre g , on peut alors poser la

Question 2.9 *Le Schéma $\mathrm{Hom}_\alpha(C, X)$ est-il irréductible pour α assez grand¹⁵ ? Quelle est la borne optimale sur α ?*

Des réponses partielles pour les courbes elliptiques sont contenues dans le travail de A. Bruguières [Bru87] et dans [Per03] pour les Grassmanniennes ainsi que dans [Per06] pour les variétés spinorielles.

3 Géométrie birationnelle

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la géométrie birationnelle, relative au-dessus d'une variété de Schubert minuscule $X(w)$, de la variété de Bott-Samelson $\tilde{X}(w)$. Il y a diverses raisons pour cela. La première vient du problème, décrit au paragraphe précédent, de la description des composantes irréductibles du schéma des morphismes. On a vu que la résolution de Bott-Samelson est utile pour résoudre ce problème mais la présence de nombreux diviseurs contractés impose de construire des déformations compliquées du morphisme de départ. Une résolution intermédiaire dont aucun diviseur ne serait contracté aurait une plus grande utilité.

Une autre raison pour cette étude est la recherche de résolutions petites de variétés de Schubert déjà évoquée en introduction. Rappelons la définition d'une résolution petite.

Définition 3.1 Un morphisme propre et birationnel $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est dit petit si pour tout $i > 0$, on a l'inégalité $\mathrm{codim}_X(\{x \in X / \dim \pi^{-1}(x) = i\}) > 2i$. Si par ailleurs \tilde{X} est lisse, alors on dit que π est une résolution petite.

Come on l'a déjà évoqué, l'importance de ces résolutions est lié au calcul des polynômes de Kazhdan-Lusztig. A. Zelevinsky dans [Zel83] a donné le premier exemple de résolution petite et ce pour toutes les variétés de Schubert dans une Grassmannienne. Ensuite P. Sankaran et P. Vanchinathan [SaVa94] on donné des exemples de variétés de Schubert dans des Grassmanniennes orthogonales et Lagrangiennes admettant et parfois n'admettant pas de résolution petite. Il est cependant difficile de décider si une variété de Schubert admet ou non une résolution petite.

14. Il suffit pour s'en convaincre de regarder le schéma de Hilbert des courbes de l'espace projectif de dimension 3.

15. Ceci signifie que α est une combinaison linéaire à coefficients positifs assez grands des générateurs effectifs de $H_2(X, \mathbb{Z})$.

Nous verrons que dans le cas des variétés de Schubert minuscules, les résolutions petites coïncident (presque) avec un objet naturel de la géométrie birationnelle : les modèles minimaux relatifs de la résolution de Bott-Samelson. En particulier, nous déterminons quelles sont les variétés de Schubert admettant une résolution petite et décrivons toutes ces dernières. Nous obtenons également une interprétation plus intrinsèque de l'ensemble $\mathfrak{nc}(\alpha)$ des composantes irréductibles du schéma des morphismes décrit au Théorème 2.3.

Un des points importants de cette section est aussi la (ré)introduction d'un objet combinatoire lié aux variétés de Schubert : le *carquois de Schubert* également appelé *heap* par R. Proctor dans [Pro84]. Ce carquois ou *heap* a été introduit par X.G. Viennot dans [Vie86] et réutilisé par J. Stembridge dans [Ste96], dans les deux cas à des fins purement combinatoire. Nous utilisons ce carquois pour décrire les propriétés géométriques des variétés de Bott-Samelson et des variétés de Schubert minuscules et en particulier leurs modèles minimaux relatifs ainsi que le lieu où leurs singularités sont Gorenstein.

3.1 Résolutions petites

3.1.1 Carquois de Schubert

Soit P_ϖ un sous-groupe parabolique de G associé à un poids minuscule ϖ . Considérons un élément $\bar{w} \in W/W_{P_\varpi}$ et soit w l'élément de longueur minimale dans la classe \bar{w} . Pour toute écriture réduite :

$$w = s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r} \quad (2)$$

de w comme produit de réflexions simples, on définit un carquois dont les sommets sont colorés par les racines simples. Nous noterons \tilde{w} la donnée de w et de son écriture réduite.

Définition 3.2 (i) Étant donnée l'écriture réduite \tilde{w} de w , on définit le successeur $s(i)$ (resp. le prédécesseur $p(i)$) de l'entier $i \in [1, r]$ par $s(i) = \min\{j \in [1, r] / j > i \text{ et } \beta_j = \beta_i\}$ (resp. par $p(i) = \max\{j \in [1, r] / j < i \text{ et } \beta_j = \beta_i\}$).

(ii) On définit un carquois $Q_{\tilde{w}}$ en prenant l'ensemble $[1, r]$ comme ensemble de sommets et en traçant une flèche de i vers j lorsque l'on a les conditions $\langle \beta_j^\vee, \beta_i \rangle \neq 0$ et $i < j < s(i)$.

Le carquois ainsi défini a une coloration naturelle de ses sommets par des racines simples. Cette coloration est définie par l'application $\beta : [1, r] \rightarrow S$ avec $\beta(i) = \beta_i$.

Dans le cas des variétés de Schubert minuscules, l'écriture réduite \tilde{w} est unique à relations de commutation près. Ces relations ne changent pas le carquois qui est donc indépendant de l'écriture réduite choisie. Il ne dépend ainsi que de l'élément w du groupe de Weyl et nous le noterons Q_w .

Définition 3.3 On définit l'ordre partiel \preceq sur les sommets du carquois de la manière suivante : on a $i \preceq j$ s'il existe une suite de flèches de j vers i .

Proposition 3.4 La dimension de la variété de Schubert $X(w)$ est égale au nombre de sommets du carquois Q_w . Par ailleurs, $X(u)$ est une sous-variété de Schubert de $X(v)$ si et seulement si Q_u est un idéal pour l'ordre \preceq de Q_v (ceci signifie que si l'on a $x \preceq y$ et $y \in Q_u$ alors $x \in Q_u$).

Définition 3.5 (i) On appelle pic tout sommet de Q_w maximal pour l'ordre \preceq . On note $\text{Pics}(Q_w)$ l'ensemble des pics de Q_w .

(ii) On note Q_ϖ le carquois de l'espace homogène $X = G/P$.

(iii) On appelle creux du carquois Q_w tout sommet i de Q_ϖ tel que l'une des propriétés suivantes soit satisfaite :

- le sommet i est un sommet de Q_w , le sommet $p(i)$ dans Q_ϖ n'est pas dans Q_w et il y a exactement deux sommets $j_1 \preccurlyeq i$ et $j_2 \preccurlyeq i$ dans Q_w tels que $\langle \beta_i^\vee, \beta_{j_k} \rangle \neq 0$ pour $k = 1, 2$.
- Le sommet i n'est pas dans Q_w , le sommet $s(i)$ n'existe pas dans Q_ϖ et β_i est dans le bord du support de w (*i.e.* dans le bord de l'image de Q_w par β).

Les sommets vérifiant la seconde condition n'étant pas des sommets de Q_w , on dira qu'un tel creux est virtuel. On note $\text{Creux}(Q_w)$ l'ensemble des creux de Q_w .

(iv) La hauteur $h(i)$ d'un sommet i est le plus grand entier n tel qu'il existe une suite $(i_k)_{k \in [1, n]}$ de sommets telle que $i_1 = 1$, $i_n = r$ et qu'il existe une flèche de i_k vers i_{k+1} pour tout $k \in [1, n - 1]$.

On donne alors les premiers exemples de propriétés géométriques de la variété de Schubert $X(w)$ aisément déductibles du carquois Q_w :

Proposition 3.6 (i) *La variété de Schubert $X(w)$ est de Gorenstein si et seulement si tous les pics du carquois Q_w ont la même hauteur $h(w)$. Dans ce cas, on a la formule :*

$$-K_{X(w)} = (h(w) + 1)\mathcal{L}(w)$$

où $\mathcal{L}(w)$ est le générateur ample de $\text{Pic}(X(w))$.

(ii) *La variété de Schubert $X(w)$ est localement factorielle si et seulement si le carquois Q_w a un unique pic.*

(iii) *La variété de Schubert $X(w)$ est lisse si et seulement si tous les creux de Q_w sont virtuels.*

3.1.2 Variétés de configurations

Dans ce paragraphe, on associe à un carquois de Schubert $Q_{\tilde{w}}$ des *variétés de configurations* munies de morphismes birationnels vers $X(w)$. Une d'entre elles $\tilde{X}(\tilde{w})$ est simplement la résolution de Bott-Samelson de $X(w)$ et l'application birationnelle est la résolution de Bott-Samelson $\pi : \tilde{X}(w) \rightarrow X(w)$. En utilisant ces variétés, nous définissons des résolutions intermédiaires $\hat{\pi} : \tilde{X}(w) \rightarrow X(w)$ qui factorisent π .

Soit x un point de G/B et β_i une racine simple. On note P^{β_i} le sous-groupe parabolique *minimal* de G engendré par B et $U_{-\beta_i}$. On a une projection $\pi_{\beta_i} : G/B \rightarrow G/P^{\beta_i}$ dont les fibres sont des droites projectives. On note $\mathbb{P}(x, \beta_i)$ la droite projective $\pi_{\beta_i}^{-1}(\pi_{\beta_i}(x))$.

Définition 3.7 Soit $Q_{\tilde{w}}$ un carquois de Schubert associé à une écriture réduite \tilde{w} d'un élément w . On définit la variété de configurations $\tilde{X}(\tilde{w})$ par

$$\tilde{X}(\tilde{w}) = \left\{ (x_1, \dots, x_r) \in \prod_{i=1}^r G/B \mid x_0 = 1 \text{ et } x_i \in \mathbb{P}(x_{i-1}, \beta_i) \text{ pour tout } i \in [1, r] \right\}.$$

Remarque 3.8 Si P_{β_i} est le parabolique maximal ne contenant pas $U_{-\beta_i}$, la restriction du morphisme $G/B \rightarrow G/P_{\beta_i}$ à $\mathbb{P}(x, \beta_i)$ est un isomorphisme de telle sorte que la variété $\tilde{X}(\tilde{w})$ est isomorphe à la variété

$$\left\{ (x_1, \dots, x_r) \in \prod_{i=1}^r G/P_{\beta_i} \mid x_0 = 1 \text{ et } x_i \in \mathbb{P}(x_{i-1}, \beta_i) \text{ pour tout } i \in [1, r] \right\}.$$

Cette dernière est la résolution de Bott-Samelson et le morphisme π est donné par projection sur le dernier facteur. Si \tilde{w} est une écriture réduite de w , alors π est birationnel d'image $X(w)$.

On définit maintenant deux partitions du carquois de Schubert Q_w :

Construction élémentaire 3.9 On définit par récurrence la partition $(Q_i^{\text{can}})_i$ de Q_w par :

- $Q_1^{\text{can}} = \{k \in Q_w \mid \text{les seuls pics de } Q_w \text{ plus grands que } k \text{ pour } \preceq \text{ sont des pics de hauteur minimale}\}$.
- Soit $Q = Q_w \setminus \cup_{j < i} Q_j^{\text{can}}$, on pose $Q_i^{\text{can}} = \{k \in Q \mid \text{les seuls pics de } Q \text{ plus grands que } k \text{ pour } \preceq \text{ sont des pics de hauteur minimale}\}$.

Pour la seconde partition, nous aurons besoin de fixer ord un ordre sur les pics de Q_w . On obtient alors $\text{Pics}(Q_w) = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Construction élémentaire 3.10 On définit par récurrence la partition $(Q_i^{\text{ord}})_i$ de Q_w par :

- $Q_1^{\text{ord}} = \{k \in Q_w \mid \text{le seul pic plus grand que } k \text{ est } p_1\}$
- Soit $Q = Q_w \setminus \cup_{j < i} Q_j^{\text{ord}}$, on pose $Q_i^{\text{ord}} = \{k \in Q \mid \text{le seul pic plus grand que } k \text{ est } p_i\}$.

On a alors

Proposition 3.11 Les carquois Q_i^{can} et Q_i^{ord} sont des carquois de Schubert associés à des variétés de Schubert minuscules. En particulier, ces carquois ont un élément minimal pour l'ordre \preceq que l'on note m_i^{can} et m_i^{ord} respectivement.

Nous pouvons maintenant donner la définition suivante.

Définition 3.12 (i) La variété $\widehat{X}^{\text{can}}(w)$ est l'image de $\widetilde{X}(w)$ par la projection sur le produit $\prod_i G/P_{\beta_{m_i^{\text{can}}}}$.

(ii) Pour un ordre ord de l'ensemble $\text{Pics}(Q_w)$, on définit la variété $\widehat{X}^{\text{ord}}(w)$ comme l'image de $\widetilde{X}(w)$ par la projection du produit $\prod_i G/P_{\beta_{m_i^{\text{ord}}}}$.

Le morphisme π se factorise donc à travers $\widehat{X}^{\text{can}}(w)$ et $\widehat{X}^{\text{ord}}(w)$. On note π^{can} et π^{ord} les morphismes $\widehat{X}^{\text{can}}(w) \rightarrow X(w)$ et $\widehat{X}^{\text{ord}}(w) \rightarrow X(w)$ correspondants.

3.1.3 Résolutions petites

On peut maintenant énoncer le premier résultat de géométrie birationnelle pour les variétés de Schubert minuscules.

Théorème 3.13 ([Per07]) *Le modèle canonique relatif de $X(w)$ est la variété $\widehat{X}^{\text{can}}(w)$ munie du morphisme π^{can} .*

Pour décrire les modèles minimaux relatifs, nous aurons besoin de la notion d'ordre net suivante.

Définition 3.14 Un ordre ord sur l'ensemble des pics de Q_w donné par $\text{Pics}(Q_w) = \{p_1, \dots, p_n\}$ est net si $h(p_i) \leq h(p_j)$ pour toute paire (p_i, p_j) de pics adjacents¹⁶ tels que $i < j$ pour ord.

Théorème 3.15 ([Per07]) *Les modèles minimaux relatifs de $X(w)$ sont les variétés $\widehat{X}^{\text{ord}}(w)$ munies des morphismes π^{ord} avec ord un ordre net de $\text{Pics}(Q_w)$.*

16. Deux pics p_i et p_j sont dits adjacents s'il n'existe pas de pic q tel que $\beta(q)$ est dans l'intervalle $[\beta(p_i), \beta(p_j)]$ du diagramme de Dynkin.

Pour montrer ce résultat, on montre que $\widehat{X}^{\text{ord}}(w)$ muni du morphisme π^{ord} avec ord un ordre net de $\text{Pics}(Q_w)$ est un modèle minimal. Ensuite, grâce à une bonne connaissance de la variété, on montre que tous les flops possibles à partir de $\widehat{X}^{\text{ord}}(w)$ sont des variétés $\widehat{X}^{\text{ord}'}(w)$ avec ord' un autre ordre net de $\text{Pics}(Q_w)$. On conclue en utilisant le fait que tous les modèles minimaux sont reliés par des flops (voir par exemple [Mat02, Theorem 12.1.8], dans notre situation, on a l'existence et la terminaison des flops).

Nous allons maintenant décrire les résolutions petites des variétés de Schubert minuscules. Pour les Grassmanniennes, on connaît de telles résolutions grâce au travail de A. Zelevinsky [Zel83]. P. Sankaran et P. Vanchinathan [SaVa94] ont donné des exemples de variétés de Schubert n'admettant pas de résolution petite. Nous allons décrire exactement quelles variétés de Schubert minuscules admettent des résolutions petites. On a tout d'abord le

Théorème 3.16 ([Per07]) *Le morphisme $\pi^{\text{ord}} : \widehat{X}^{\text{ord}}(w) \rightarrow X(w)$ d'un modèle minimal relatif vers une variété de Schubert minuscule $X(w)$ est petit.*

Ainsi si on s'autorise des singularités terminales, le résultat de A. Zelevinsky s'étend aux variétés de Schubert minuscules. Réciproquement, le résultat suivant de B. Totaro [Tot00] qui utilise un résultat clé de J. Wisniewski [Wis91] nous permet de chercher les résolutions petites parmi les modèles minimaux relatifs.

Théorème 3.17 ([Tot00]) *Toute petite résolution d'une variété normale X est un modèle minimal relatif de X .*

Dans notre situation, les résolutions petites de $X(w)$ sont exactement données par les modèles minimaux relatifs lisses de $X(w)$. En appliquant le critère de lissité décrit à la proposition 3.6, nous donnons un critère combinatoire sur le carquois Q_w et l'ordre ord pour que le modèle minimal relatif $\widehat{X}^{\text{ord}}(w)$ soit lisse.

Théorème 3.18 ([Per07]) *La variété $\widehat{X}^{\text{ord}}(w)$ est une résolution petite si et seulement si l'ordre ord est net et si pour tout i , le carquois Q_i^{ord} n'a que des creux virtuels.*

3.2 Application au lieu de Gorenstein

La description explicite du modèle canonique relatif des variétés de Schubert minuscules permet de résoudre une conjecture de A. Yong et A. Woo [WoYo06].

Conjecture 3.19 *Soit X une variété de Schubert, un point x de X est dans le lieu de Gorenstein de X si et seulement si le point générique de toute composante irréductible du lieu singulier de X contenant x est dans le lieu de Gorenstein.*

Ainsi, si cette conjecture est vraie, il suffit de déterminer les composantes irréductibles du lieu singulier et leurs singularités pour déterminer le lieu où la variété est de Gorenstein. Pour le groupe $\text{SL}_n(\mathbb{C})$, le lieu singulier ainsi que les singularités génériques sont connus, avec cette conjecture on pourrait donc en déduire le lieu où la variété est de Gorenstein.

Nous montrons cette conjecture pour les variétés de Schubert minuscules en utilisant la combinatoire des carquois. Nous commençons par traduire en termes de carquois des résultats de M. Brion et P. Polo [BrPo99] concernant les singularités de variétés de Schubert minuscules. Pour ceci nous introduisons la notion de creux essentiel.

Définition 3.20 (1) Soit i un sommet de Q_w , on définit le sous-carquois Q_w^i (resp $Q_{w,i}$) de Q_w comme le sous-carquois complet contenant l'ensemble de sommets suivant : $\{j \in Q_w / j \succ i\}$ (resp. $Q_w \setminus Q_w^i$). On note w^i (resp. w_i) l'élément de W associé au carquois Q_w^i (resp. $Q_{w,i}$).

(ii) Un creux i de Q_w est dit essentiel s'il n'est pas virtuel et si Q_w^i n'a pas d'autre creux que i .

On a alors en utilisant les résultats de M. Brion et P. Polo [BrPo99].

Théorème 3.21 ([BrPo99],[Per09]) *Les composantes irréductibles du lieu singulier d'une variété de Schubert minuscule sont indexées par les creux essentiels. En particulier, si i est un creux essentiel de Q_w , alors la composante irréductible correspondante est la sous-variété de Schubert $X(w_i)$ de $X(w)$ dont le carquois est $Q_{w,i}$.*

De plus, la singularité de $X(w)$ en un point générique de $X(w_i)$ est la même que la singularité au point B -fixe de la variété de Schubert $X(w^i)$ dont le carquois est Q_w^i .

Avec ce résultat, il est facile, en utilisant le critère de la proposition 3.6, de dire si la singularité en un point générique d'une composante irréductible du lieu singulier est de Gorenstein. Les creux essentiels tels que la composante irréductible du lieu singulier associée a un point générique de Gorenstein sont appelés *creux de Gorenstein*. On a alors le résultat suivant.

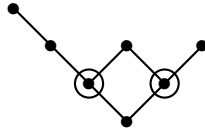
Théorème 3.22 ([Per09]) *Le point générique d'une sous-variété de Schubert $X(w')$ contenue dans une variété de Schubert minuscule $X(w)$ est dans le lieu de Gorenstein si et seulement si le carquois de $X(w')$ contient tous les creux du carquois de $X(w)$ qui ne sont pas de Gorenstein.*

Corollaire 3.23 ([Per09]) *La conjecture 3.19 est vraie pour les variétés de Schubert minuscules.*

Exemple 3.24 Notons $\mathbb{G}(4, 7)$ la Grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension 4 dans un espace vectoriel de dimension 7. Considérons la variété de Schubert

$$X(w) = \{V_4 \in \mathbb{G}(4, 7) \mid \dim(V_4 \cap W_3) \geq 2 \text{ et } \dim(V_4 \cap W_5) \geq 3\}$$

où W_3 et W_5 sont des sous-espaces vectoriels de dimension 3 et 5 fixés inclus l'un dans l'autre. L'élément de plus petite longueur associé est la permutation (2357146). Son carquois est le suivant (toutes les flèches descendant) :



Nous avons entouré les creux du carquois. Le creux de gauche n'est pas de Gorenstein (les deux pics le dominant n'ont pas la même hauteur) tandis que celui de droite l'est. Le lieu singulier de $X(w)$ a deux composantes et les sous-variétés de Schubert correspondantes ont les carquois suivants (obtenus à partir d'un creux essentiel en retirant les sommets le dominant) :



Ces variétés de Schubert correspondent aux permutations : (1237456) et (2341567). Soit $X(w')$ une sous-variété de Schubert dont le point générique n'est pas de Gorenstein, alors $X(w')$ doit être contenue dans $X(1237456)$.

La preuve du théorème précédent utilise de manière cruciale la description donnée au paragraphe précédent des modèles canoniques relatifs $\pi^{\text{can}} : \widehat{X}^{\text{can}}(w) \rightarrow X(w)$. En effet, on a facilement une inclusion du lieu prédit par la conjecture dans le lieu de Gorenstein. Pour la réciproque, on montre que le lieu donné par la conjecture est le lieu où le morphisme π^{can} est un isomorphisme. On conclue alors en utilisant le fait que le modèle canonique relatif est toujours de Gorenstein.

3.3 Courbes rationnelles

Une autre motivation pour l'étude birationnelle des variétés de Schubert, en fait notre motivation initiale, est la réinterprétation suivante du théorème 2.3. Soit $X(w)$ une variété de Schubert minuscule et soit $\pi^{\text{ord}} : \widehat{X}^{\text{ord}}(w) \rightarrow X(w)$ un modèle minimal relatif. Pour toute classe $\alpha \in H_2(X(w), \mathbb{Z})$ on définit l'ensemble

$$\mathbf{nc}(\alpha) = \{\beta \in NE(\widehat{X}^{\text{ord}}(w)) / \pi_*^{\text{ord}}\beta = \alpha\}$$

où $NE(\widehat{X}^{\text{ord}}(w))$ est le cône des classes effectives de $\widehat{X}^{\text{ord}}(w)$.

Théorème 3.25 ([Per05]) *Les composantes irréductibles du schéma $\text{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ sont indexées par $\mathbf{nc}(\alpha)$.*

Il y a diverses questions naturelles qui se posent à la suite des résultats précédents. La première, très générale, est la suivante.

Question 3.26 *Quelles variétés de Schubert $X(w)$ admettent des résolutions petites ? Décrire toutes les résolutions petites de $X(w)$.*

Il y a des réponses partielles pour cette question. Par exemple, lorsque X est une variété de drapeaux complets de la forme G/B , alors V. Deodhar [Deo90] a décrit des éléments spéciaux w du groupe de Weyl pour lesquels $X(w)$ admet une résolution petite. Ces éléments sont décrits en termes combinatoires (par *pattern avoidance*) dans [BiJo07]. Un sous-ensemble du groupe de Weyl où chercher des éléments w pour lesquels $X(w)$ admet une résolution petite est l'ensemble des éléments pleinement commutatifs (ceux dont le carquois de Schubert est unique). Pour ces éléments, on pourrait encore utiliser le carquois de Schubert et espérer étendre les résultats précédents.

On a vu que toutes les variétés de Schubert minuscules n'ont pas de résolution petite mais un modèle minimal petit. On peut donc calculer certains polynômes de Kazhdan-Lusztig grâce à ces résolutions. Rappelons qu'une formule combinatoire (au cas par cas) a été donnée par B. Boe [Boe88].

Question 3.27 *Donner une formule liée à la géométrie des modèles minimaux des variétés de Schubert minuscules pour les polynômes de Kazhdan-Lusztig.*

Une autre question naturelle est la suivante.

Question 3.28 *Donner une description du lieu où une variété de Schubert minuscule est localement factorielle.*

On peut aussi espérer construire des résolutions partielles des variétés de Schubert qui permettraient de décrire combinatoirement les composantes irréductibles du lieu singulier.

4 Cohomologie quantique

4.1 Quelques résultats sur la cohomologie quantiques des espaces homogènes

La cohomologie quantique est définie pour toute variété lisse projective. Dans le cas des espaces homogènes, les calculs dans cet anneau sont simplifiés par le fait que les invariants de Gromov-Witten sont énumératifs. Ainsi le premier exemple de calcul explicite d'anneau de cohomologie quantique (non complètement trivial) est celui de la Grassmannienne réalisé par B. Siebert et G. Tian [SiTi97]. Ils montrent en particulier que la cohomologie quantique de la Grassmannienne admet une présentation identique à celle de la cohomologie classique à ceci près qu'elle a un générateur supplémentaire : le paramètre quantique q et que son équation de plus grand degré est déformée en ajoutant $\pm q$ (le signe dépend du choix de l'équation de plus grand degré).

À la suite de ces travaux de nombreux autres résultats pour certains espaces homogènes ont été obtenus. Ainsi A. Bertram [Ber97] a montré que les formules de Giambelli quantiques (expression des classes de Schubert en fonction des générateurs) pour la Grassmannienne sont identiques aux formules de Giambelli classiques. Il donne également des formules de Pieri quantique permettant de multiplier toute classe de Schubert par un générateur. D'autres résultats de ce type ont été démontrés pour les variétés de drapeaux (espaces homogènes sous $SL_n(\mathbb{C})$) par [Cio99] et [FoGePo97], on peut également consulter les articles de S. Fomin [Fom99] ou de L. Chen [Che03].

On connaît également une présentation de la cohomologie quantique pour les quotients G/B en termes de réseau de Toda décrite par B. Kim [Kim99]. Cependant la non fonctorialité de la cohomologie quantique fait qu'on ne peut en déduire des présentations pour les quotients G/P avec P un parabolique quelconque (citons tout de même les résultats de C. Woodward permettant de comparer les invariants de Gromov-Witten de G/P et ceux de G/B mais sans que les structures d'algèbres soit véritablement comparables). Notons tout de même que comme dans le cas classique, il existe une formule de multiplication par les classes correspondant aux hyperplans, appelée formule de Chevalley quantique et démontrée dans [FuWo04]. Deux des résultats évoqués ici : la formule de comparaison entre G/B et G/P et la formule de Chevalley font partie de résultats généraux annoncés par D. Peterson [Pet97] mais jamais publiés. Citons enfin brièvement, nous y reviendrons plus tard, un dernier résultat issu de [Pet97] et récemment démontré par T. Lam et M. Shimozono [LaSh09] qui compare un quotient de l'homologie de la Grassmannienne affine pour le groupe G à la cohomologie quantique de G/P .

Outre les espaces homogènes sous $SL_n(\mathbb{C})$, il existe cependant quelques autres espaces homogènes pour lesquels on connaît une présentation. C'est le cas des espaces homogènes minuscules et cominuscules pour les groupes classiques : les Grassmanniennes orthogonales $G_Q(n, 2n)$ et Lagrangiennes $G_\omega(n, 2n)$. Ces résultats ont été obtenus par A. Kresch et H. Tamvakis dans [KrTa03] et [KrTa04].

Dans [Buc03], A. Buch a utilisé le caractère énumératif des invariants de Gromov-Witten pour donner une preuve simple, en particulier n'utilisant aucun espace de modules, des formules de B. Siebert et G. Tian et de A. Bertram donnant la présentation de la cohomologie quantique des

Grassmanniennes ainsi que des formules de Giambelli quantiques. Ces résultats ont été étendus aux espaces homogènes minuscules et cominusculs pour les groupes classiques dans [BuKrTa03] où un principe quantique/classique est mis en lumière : les invariants de Gromov-Witten peuvent être calculés comme des coefficients de Littlewood-Richardson (c'est-à-dire des intersections) dans l'anneau de cohomologie classique pour une variété auxiliaire homogène sous le même groupe. A. Buch, A. Kresch et H. Tamvakis ont partiellement généralisé ce principe aux espaces de groupe de Picard \mathbb{Z} homogènes sous un groupe classique et donnent des présentations de la cohomologie quantique de ces espaces. C'est ce type de résultats (principe quantique/classique et présentation de la cohomologie quantique) que nous avons systématisés pour les variétés homogènes minuscules et cominusculs. Ces résultats ont révélé des symétries inattendues dans la cohomologie quantique pour les espaces homogènes minuscules et cominusculs mais également pour tous les espaces homogènes rationnels.

4.2 Variétés minuscules

Dans ce paragraphe, nous généralisons les idées de A. Buch, A. Kresch et H. Tamvakis [BuKrTa03] et montrons que le principe quantique classique peut s'appliquer dans tous les espaces homogènes minuscules et cominusculs. Nous obtenons de cette manière une présentation uniforme de la cohomologie quantique de ces espaces homogènes.

Rappelons tout d'abord la présentation de Borel de la cohomologie à coefficients rationnels des espaces homogènes rationnels. Le groupe de Weyl W agit sur le réseau des poids \mathcal{P} et on a un isomorphisme

$$H^*(G/P, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[\mathcal{P}]^{W_P} / \mathbb{Q}[\mathcal{P}]_+^W$$

où $\mathbb{Q}[\mathcal{P}]^{W_P}$ désigne l'anneau des polynômes sur le réseau des poids invariants sous l'action de W_P et $\mathbb{Q}[\mathcal{P}]_+^W$ est l'idéal engendré par les invariants sous W sans terme constant (voir par exemple [Bor53] Proposition 27.3). Rappelons aussi que l'algèbre des invariants $\mathbb{Q}[\mathcal{P}]^W$ est une algèbre de polynômes $\mathbb{Q}[I_{d_1}, \dots, I_{d_m}]$ où les I_{d_i} sont homogènes de degré d_i et les $d_i - 1$ sont les exposants du groupe (pris dans l'ordre croissant).

Théorème 4.1 ([ChMaPe08]) *Soit $X = G/P$ un espace homogène minuscule. Il existe une présentation de son anneau de cohomologie classique de la forme :*

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[\mathcal{P}]^{W_P} / (I_{d_1}, \dots, I_{d_m}),$$

et on peut choisir la relation de plus grand degré I_{d_m} de telle sorte que l'anneau de cohomologie quantique de X soit

$$QH^*(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[\mathcal{P}]^{W_P}[q] / (I_{d_1}, \dots, I_{d_m} - q).$$

Remarquons que l'équation de plus grand degré I_{d_m} n'est bien définie que modulo les équations de plus petit degré mais que ceci ne pose pas de problème car seule cette dernière équation est déformée. On peut également obtenir une présentation sur \mathbb{Z} de ces anneaux de cohomologie quantique.

Dans le cas cominusculaire non minuscule, qui n'apparaît que pour des espaces homogènes sous un groupe classique, on obtient également une présentation mais un peu plus compliquée que dans le cas minuscule. Il faut en particulier déformer plusieurs équations.

Comme on l'a évoqué, ce résultat était déjà connu pour les espaces homogènes sous un groupe classique (voir [Ful04, KrTa03, KrTa04, SiTi97]) notre contribution concerne donc seulement les deux espaces Hermitiens symétriques exceptionnels. Cependant un des points importants de la preuve est une interprétation des invariants de Gromov-Witten de degré d de ces variétés

comme invariants classiques pour une variété G -homogène auxiliaire F_d , généralisant le principe quantique/classique de [BuKrTa03]. Avant de décrire F_d nous aurons besoin de quelques résultats sur la géométrie des courbes rationnelles dans X un espace homogène (co)minuscule.

4.2.1 Géométrie des courbes rationnelles

Soit X une variété homogène (co)minuscule, commençons par quelques définitions.

Définition 4.2 Soient x et y deux points de X .

- On note $d(x, y)$ le plus petit entier δ tel qu'il existe une courbe rationnelle de degré δ passant par x et y . Ceci définit une distance sur X .
- On note $Y(x, y)$ la réunion des courbes rationnelles de degré $d(x, y)$ passant par x et y . On note Y_d la variété¹⁷ abstraite $Y(x, y)$ pour tout couple (x, y) tel que $d(x, y) = d$.
- Soit α la racine simple associée à P , on note $d_{max}(X)$ ou simplement d_{max} le nombre d'occurrences de s_α dans une écriture réduite de w_X .
- Pour $d \in [0, d_{max}]$, on note F_d la famille des variétés $Y(x, y)$ pour $x, y \in X$ avec $d(x, y) = d$.

Le fait que les variétés Y_d et F_d sont bien définies est assuré par la proposition suivante.

Proposition 4.3 *Le groupe G agit transitivement sur les couples (x, y) avec $d(x, y) = d$. Par ailleurs, l'entier $d(x, y)$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et d_{max} .*

Si $\omega \in F_d$, alors le stabilisateur de ω est un sous-groupe parabolique de G et F_d est donc un espace homogène rationnel. Les variétés Y_d et F_d sont décrites dans le tableau suivant :

| X | d_{max} | d | F_d | Y_d |
|----------------------------|------------------|---------|--------------------------------|----------------------------|
| $\mathbb{G}(p, n)$ | $\min(p, n - p)$ | | $\mathbb{F}(p - d, p + d; n)$ | $\mathbb{G}(d, 2d)$ |
| $\mathbb{G}_\omega(n, 2n)$ | n | | $\mathbb{G}_\omega(n - d, 2n)$ | $\mathbb{G}_\omega(d, 2d)$ |
| $\mathbb{G}_Q(n, 2n)$ | $\frac{n}{2}$ | | $\mathbb{G}_Q(n - 2d, 2n)$ | $\mathbb{G}_Q(2d, 4d)$ |
| \mathbb{Q}^n | 2 | $d = 2$ | {pt} | \mathbb{Q}^n |
| E_6/P_1 | 2 | $d = 2$ | E_6/P_6 | \mathbb{Q}^8 |
| E_7/P_7 | 3 | $d = 2$ | E_7/P_1 | \mathbb{Q}^{10} |
| E_7/P_7 | 3 | $d = 3$ | {pt} | E_7/P_7 |

Idée de la preuve. Notons F'_d et Y'_d les variétés de la définition 4.2 et soient F_d et Y_d les espaces homogènes du tableau ci-dessus. On veut montrer les égalités $F_d = F'_d$ et $Y_d = Y'_d$.

La variété F_d est de la forme G/Q pour un sous-groupe parabolique Q . On a donc une variété d'incidence I_d et un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} I_d & \xrightarrow{p_d} & X \\ & \downarrow q_d & \\ & & F_d \end{array}$$

Pour $\omega \in F_d$, on note $Y_\omega = p_d(q_d^{-1}(\omega))$. On note Z_d la fibre de p_d . On a la proposition et le fait suivants.

Proposition 4.4 *Pour toute courbe rationnelle C de degré d , il existe au moins un élément $\omega \in F_d$ tel que $C \subset Y_\omega \simeq Y_d$. Pour une courbe générale, l'élément ω est unique.*

17. La variété Y_d est bien définie grâce à la Proposition 4.3.

Fait 4.5 *Il existe un unique morphisme $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow Y_d$ de degré d passant par trois points en position générale de Y_d .*

Ces résultats permettent de montrer que $d(x, y)$ classe les orbites de G dans $X \times X$. On complète la preuve de la proposition 4.3 : on vérifie que pour $x \neq y \in X$ et $d = d(x, y)$, il existe unique $\omega \in F_d$ avec $x, y \in Y_\omega$. De plus, (x, y) est un couple générique de $Y_\omega \times Y_\omega$. Si z est un point générique de Y_ω , le fait 4.5, impose que z est dans $Y(x, y)$, donc $Y(x, y) \supset Y_\omega$. Par ailleurs, si C est une courbe rationnelle de degré d alors la proposition 4.4 nous donne un élément β de F_d tel que $Y_\beta \supset C$. Comme on a $x, y \in Y_\beta$, on en déduit $\beta = \omega$ et donc $Y(x, y) \subset Y_\omega$. \square

Les résultats précédents impliquent les égalités de dimensions suivantes. Le fait 4.5 impose que la dimension du schéma des courbes rationnelles de degré d sur Y_d est $3 \dim(Y_d) - 3$. Comme cette dimension peut être calculée grâce à l'indice de Y_d on obtient :

$$d \cdot c_1(Y_d) = 2 \dim(Y_d). \quad (3)$$

La proposition 4.4 impose que la dimension du schéma des courbes rationnelles de degré d sur X est égale à la somme de la dimension de F_d et de la dimension du schéma des courbes rationnelles de degré d sur Y_d . En utilisant la relation (3), on a

$$\dim(X) + d \cdot c_1(X) = \dim(F_d) + 3 \dim(Y_d). \quad (4)$$

4.2.2 Invariants de Gromov-Witten

Les variétés Z_d et Y_d sont homogènes (co)minuscules. Elles ont donc un carquois de Schubert bien défini noté Q_{Z_d} et Q_{Y_d} . Par ailleurs Y_d est une sous-variété de Schubert de X et peut être écrite sous la forme $X(w_{Y_d})$ pour $w_{Y_d} \in W^P$. De même Z_d est une sous-variété de Schubert de F_d et peut être écrite sous la forme $F_d(w_{Z_d})$ pour $w_{Z_d} \in W^Q$. La variété de Schubert duale pour Poincaré de Y_d dans X sera notée $X(w_{Y_d}^*)$ ou Y_d^* .

On définit les carquois Q_{I_d} et Q_{F_d} de I_d et F_d grâce à la formule

$$w_{I_d} = w_X w_{Z_d} = w_{Y_d} w_{F_d}$$

qui permet à partir d'écritures réduites de w_X , de w_{Y_d} et de w_{Z_d} d'obtenir des écritures réduites de w_{I_d} et de w_{F_d} . En termes de carquois, on obtient Q_{I_d} (resp. Q_{F_d}) en ajoutant Q_{Z_d} au-dessous de Q_X (resp. en ajoutant Q_{Z_d} au-dessous de $Q_{Y_d^*}$, le carquois de Y_d^*).

Soit $X(w)$ une variété de Schubert de X . Considérons $F_d(\hat{w}) = q_d(p_d^{-1}(X(w)))$ qui est une variété de Schubert de F_d . Le carquois de $F_d(\hat{w})$ dans Q_{F_d} est obtenu en ajoutant le carquois Q_{Z_d} au-dessous du carquois $Q_w \cap Q_{Y_d^*}$. On en déduit l'inégalité :

$$\text{Codim}_{F_d}(F_d(\hat{w})) \geq \text{Codim}_X(X(w)) - \dim(Y_d), \quad (5)$$

avec égalité si et seulement si $X(w) \subset X(w_{Y_d}^*)$. Soit $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ un morphisme de degré d tel que $f(\mathbb{P}^1)$ rencontre $X(w)$. Alors il existe $y \in F_d$ tel que $p_d(q_d^{-1}(y))$ rencontre $X(w)$ ou encore tel que $y \in q(p^{-1}(X(w))) = F_d(\hat{w})$.

Lemme 4.6 *Soient $X(u)$, $X(v)$ et $X(w)$ trois variétés de Schubert de X . Supposons que l'on a*

$$\text{Codim}(X(u)) + \text{Codim}(X(v)) + \text{Codim}(X(w)) = \dim(X) + d \cdot c_1(X).$$

Alors pour g, g' et g'' des éléments généraux de G , l'intersection $g \cdot F(\hat{u}) \cap g' \cdot F(\hat{v}) \cap g'' \cdot F(\hat{w})$ est une réunion finie de points réduits. De plus cet ensemble est vide dès que l'une des trois variétés de Schubert n'est pas contenue dans Y_d^ .*

Soit y un point de l'intersection, la variété $p_d(q_d^{-1}(y))$ rencontre chacune des variétés $g \cdot X(u)$, $g' \cdot X(v)$ et $g'' \cdot X(w)$ en un unique point et ces points sont en position générale dans $p_d(q_d^{-1}(y))$.

On en déduit le

Théorème 4.7 ([ChMaPe08]) *Soient $X(u)$, $X(v)$ et $X(w)$ trois variétés de Schubert de X . Supposons que la somme de leur codimension vaut $\dim(X) + d \cdot c_1(X)$, alors on a*

$$I_d([X(u)], [X(v)], [X(w)]) = I_0([F_d(\hat{u})], [F_d(\hat{v})], [F_d(\hat{w})]).$$

En particulier ce nombre est nul dès que l'une des trois variétés de Schubert n'est pas contenue dans Y_d^ .*

On obtient également, en utilisant ces techniques, une caractérisation en termes de carquois de la plus petite puissance de q apparaissant dans un produit quantique de deux classes de Schubert. Ce résultat généralise celui de A. Buch [Buc03] pour les Grassmanniennes et donne une expression combinatoire explicite aux résultats de W. Fulton et C. Woodward [FuWo04].

4.3 Dualité étrange

Nos calculs explicites dans les anneaux de cohomologie quantiques des espaces homogènes (co)minuscules X , nous ont permis de découvrir des symétries inattendues dans ces anneaux : il existe une *dualité étrange* qui relie les invariants de Gromov-Witten en grand degré à d'autres en petit degré. Rappelons que l'on a une base sur \mathbb{Z} de la cohomologie ordinaire $H^*(X, \mathbb{Z})$ donnée par les classes de Schubert σ^w avec $w \in W^P$. Si w_X est l'élément de plus grande longueur dans W^P et w_0 celui de plus grande longueur dans W , l'application $w \mapsto p(w) = w_0 w w_0 w_X$ est la dualité de Poincaré. L'application $w \mapsto \iota(w) = w_X w$ correspondra à la dualité étrange.

Pour une écriture réduite $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{\ell(w)}}$, on définit

$$y(w) = \prod_{i=1}^{\ell(w)} n_{\alpha_i}(\alpha_0)^{\epsilon(\alpha_i)},$$

où θ est la plus grande racine de G et $n_{\alpha_i}(\theta)$ est le coefficient de α_i dans l'écriture de θ comme combinaison linéaire de racines simples. On pose également $\epsilon(\alpha) = 1$ si α est longue et $\epsilon(\alpha) = -1$ si α est courte (dans le cas simplement lacé toutes les racines sont longues). Le nombre rationnel $y(w)$ est bien défini car dans le cas (co)minuscule il n'existe qu'une écriture réduite modulo relations de commutation. On note enfin $\delta(w)$ le nombre d'apparitions, dans une écriture réduite de w , de la réflexion par rapport à la racine simple α qui définit P .

Définissons le localisé de l'anneau de cohomologie quantique par

$$QH^*(X, \mathbb{Z})_{loc} = QH^*(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[q]} \mathbb{Z}[q, q^{-1}].$$

La dualité étrange peut être formulée de la façon suivante.

Théorème 4.8 (Dualité étrange [ChMaPe07]) *Soit X un espace homogène minuscule ou cominuscule. L'endomorphisme ι de $QH^*(X, \mathbb{Z})_{loc}$, défini par*

$$\iota(q) = y(s_{\alpha_0})q^{-1} \quad \text{et} \quad \iota(\sigma(w)) = q^{-\delta(w)}y(w)\sigma(\iota(w)),$$

est une involution d'algèbre.

Remarque 4.9 Dans le cas des Grassmanniennes, ce résultat a été obtenu par A. Postnikov [Pos05]. Dans ce cas, on a $y(w) = 1$ pour tout w .

Nous déduisons de ce résultat et de la formule combinatoire donnant la plus petite puissance de q apparaissant dans un produit quantique de deux classes de Schubert évoquée plus haut (voir [FuWo04]), une formule donnant la plus grande puissance de q apparaissant dans un produit quantique de deux classes de Schubert. Si on reprend les notations de [FuWo04] et que, pour u et v dans W^P , on note $\delta(u, v)$ le degré minimal d'une courbe rationnelle rencontrant deux représentants généraux des classes σ^u et σ^v , on a alors

Théorème 4.10 ([ChMaPe07]) *La plus grande puissance de q apparaissant dans le produit quantique $\sigma^u * \sigma^v$ est donnée par*

$$d_{max}(u, v) = \delta(u) - \delta(\iota(u), p(v)) = \delta(v) - \delta(\iota(v), p(u)).$$

Nous donnons une explication naturelle de l'existence de cette involution qui est directement liée à la semi-simplicité de l'algèbre de cohomologie quantique localisée (lorsque le paramètre q est inversé). Dans les cas classiques, cette semi-simplicité était déjà connue comme on peut le déduire de la présentation donnée au Théorème 4.1. Nous complétons ce résultat en traitant les cas exceptionnels.

Rappelons la présentation donnée au Théorème 4.1 :

$$QH^*(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[\mathcal{P}]^{W^P}[q]/(I_{d_1}, \dots, I_{d_m} - q),$$

où I_{d_1}, \dots, I_{d_m} sont les générateurs des invariants pour l'action du groupe de Weyl W . Le degré maximal d_m est le nombre de Coxeter de \mathfrak{g} .

Soit $Z(\mathfrak{t})$ le sous-schéma fermé de $\mathfrak{t} := \mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ défini par les équations $I_{d_1} = \dots = I_{d_{m-1}} = I_{d_m} - 1 = 0$. Ce fermé ne dépend pas du choix des invariants à homothéties près. De plus, c'est un schéma fini de longueur $\#W$. En effet, si on remplace $I_{d_m} - 1$ par I_{d_m} on obtient le spectre de l'anneau de cohomologie de la variété G/B qui est un schéma ponctuel de longueur $\#W$ supporté à l'origine. Nous montrons le résultat suivant qui permet de mettre en évidence une différence fondamentale entre les cas classique et quantique.

Proposition 4.11 *Pour toute algèbre de Lie simple \mathfrak{g} et \mathfrak{t} une sous-algèbre de Cartan, le schéma $Z(\mathfrak{t})$ est réduit et est une W -orbite libre.*

Nous avons montré ce résultat *à la main* dans [ChMaPe10] pour les algèbres de Lie simples de type différent de \mathfrak{f}_4 et \mathfrak{e}_8 . Nous ne nous sommes pas intéressés à ces deux derniers cas car il n'y a pas de variété homogène (co)minuscule pour les groupes associés à ces algèbres de Lie. Nous avons cependant récemment découvert que ce résultat est *classique* et a été démontré pour toutes les algèbres de Lie simple par Kostant dans [Kos59], voir le Theorem 6.2 et le Corollary 9.2 de cet article.

On peut déduire du résultat précédent la partie “minuscule” du résultat suivant.

Corollaire 4.12 *Pour tout espace homogène rationnel minuscule ou cominuscule X , l'algèbre $QH^*(X, \mathbb{Z})_{q=1} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}[W/W_P]$ obtenue en spécialisant le paramètre quantique q à la valeur 1 est semi-simple.*

De manière plus intrinsèque, le schéma affine $Z(G/P)$, dont l'anneau est $QH^*(X, \mathbb{Z})_{q=1}$, est isomorphe à $Z(\mathfrak{t})/W_P$ dans le cas minuscule.

Par ailleurs, toute algèbre commutative, semi-simple et de dimension finie H est un produit de corps et donc sur \mathbb{R} elle se décompose de la manière suivante : $H = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{C}^p$. La conjugaison complexe nous donne un automorphisme involutif canonique d'algèbre.

Nous obtenons ainsi une involution d'algèbre de $QH^*(X, \mathbb{R})_{q=1}$. Parce que $Z(G/P)$ est réduit, cette involution s'étend en une involution de $QH^*(X, \mathbb{Z})_{loc}$ qui envoie q sur q^{-1} et une classe de degré d sur une classe de degré $-d$. En effet, soit X une variété projective lisse de groupe de Picard \mathbb{Z} , soit $QH^*(X, \mathbb{C}) = H^*(X, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[q]$ son anneau de cohomologie quantique et soit $QH^*(X, \mathbb{C})_{loc}$ l'algèbre obtenue en inversant le paramètre quantique q . On a alors

Théorème 4.13 ([ChMaPe10]) *Si le spectre de l'algèbre de dimension finie $QH^*(X, \mathbb{C})_{q=1}$ est un schéma réduit et de longueur finie, alors il existe un automorphisme d'algèbre du localisé de la cohomologie quantique $QH^*(X, \mathbb{C})_{loc}$ envoyant q sur q^{-1} .*

Preuve. On peut ici donner une preuve rapide. L'inclusion $\mathbb{C}[q, q^{-1}] \hookrightarrow QH^*(X, \mathbb{C})_{loc}$ définit un morphisme fini étale $\pi : C \rightarrow \mathbb{C}^\times$ de courbes sur \mathbb{C} . Le groupe fondamental algébrique de \mathbb{C}^\times est particulièrement simple et en particulier, la courbe C doit être une union disjointe de \mathbb{C}^\times et le morphisme sur chacune des composantes connexes est donné par $z \mapsto z^d$ (le degré d dépendant bien sûr de la composante). On est alors clair que l'involution i de \mathbb{C}^\times donnée par $q \mapsto q^{-1}$ se relève à la courbe C et le théorème en découle. \square

Nous déduisons de ce résultat une interprétation de la dualité étrange en terme de conjugaison complexe.

Théorème 4.14 ([ChMaPe10]) *Pour toute variété homogène minuscule ou cominuscule la conjugaison complexe et la dualité étrange définissent la même involution sur la cohomologie quantique.*

La preuve se fait au cas par cas. Ce résultat a été observé par H. Hengelbrock pour les Grassmanniennes [Hen02] en utilisant des techniques différentes. Nous montrons que la dualité étrange et la conjugaison complexe coïncident sur un ensemble de générateurs de l'anneau de cohomologie quantique.

L'avantage de cette approche est que la dualité étrange apparaît immédiatement comme un morphisme d'algèbre. Un point moins évident avec cette méthode est le fait que cette involution envoie toute classe de Schubert sur un multiple d'une classe de Schubert par un scalaire et une puissance de q . Elle permet donc de calculer des invariants de Gromov-Witten en grand degré grâce à ceux en bas degré.

Enfin, nous avons utilisé le schéma $Z(G/P)$ pour obtenir des formules à la Vafa-Intriligator pour les invariants de Gromov-Witten. Ces formules peuvent être obtenues de manière uniforme en utilisant la *classe d'Euler quantique* $e(X)$ introduite dans [Abr00] pour toute variété X . Cette classe est inversible si et seulement si l'anneau de cohomologie quantique spécialisé en $q = 1$ (dans la cas où $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$) est semi-simple. Nos formules sont équivalentes aux formules obtenues dans [SiTi97] et [Rie01] pour les Grassmanniennes et plus simples que les formules obtenues dans [Cheo09] pour les autres groupes classiques.

4.4 Symétries affines

Dans ce paragraphe, nous décrivons une autre sorte de symétrie de la cohomologie quantique d'un espace homogène rationnel. Notons que les symétries en question ici existent pour tous les espaces homogènes rationnels et plus seulement pour les espaces homogènes minuscules et cominuscules. Ces symétries sont obtenues par multiplication par des éléments inversibles très spéciaux de l'anneau de cohomologie quantique localisé aux paramètres quantiques *i.e.* où les paramètres quantiques sont inversés. Elles permettent de donner une nouvelle réalisation

du centre Z d'un groupe semi-simple et simplement connexe dans les automorphismes de la cohomologie quantique.

Soit G un groupe semi-simple et simplement connexe, rappelons quelques réalisations du centre Z de G . Il peut tout d'abord être identifié au groupe fondamental $\pi_1(G^{\text{ad}})$ du groupe adjoint $G^{\text{ad}} = G/Z$ de G et également au groupe fondamental $\pi_1(K^{\text{ad}})$ d'un sous-groupe compact maximal du groupe adjoint G^{ad} . Une autre description du centre est donnée par le quotient suivant :

$$Z \simeq \mathcal{P}^\vee / \mathcal{Q}^\vee$$

où \mathcal{P}^\vee et \mathcal{Q}^\vee sont les réseaux des copoids et des coracines respectivement (voir par exemple [Bou54]). Des représentants privilégiés dans \mathcal{P}^\vee de ce quotient sont donnés par les opposés des poids cominusculs $(-\varpi_i^\vee)_{i \in I_m}$ où I_m est le sous-ensemble de l'ensemble I des sommets du diagramme de Dynkin paramétrant les poids cominusculs.

Le groupe Z peut encore être vu comme le stabilisateur de l'alcôve fondamentale dans le groupe de Weyl affine W_{aff} . Par composition avec l'application naturelle $W_{\text{aff}} \rightarrow W$ vers le groupe de Weyl W de G , on peut réaliser Z comme un sous-groupe de W . Ce sous-groupe est formé des éléments $(v_i)_{i \in I_m}$, où v_i est le plus petit élément de W tel que $v_i \varpi_i^\vee = w_0 \varpi_i^\vee$, où w_0 est l'élément de plus grande longueur de W .

Enfin, dans un contexte différent, P. Seidel a montré dans [Sei97] que le groupe fondamental du groupe des symplectomorphismes Hamiltoniens d'une variété symplectique X s'envoie dans le groupe $QH^*(X)_{loc}^\times$ des éléments inversibles de l'anneau de cohomologie quantique localisé aux paramètres quantiques. Lorsque X est homogène de la forme G/P , la structure projective naturelle induit une structure symplectique préservée par un sous-groupe compact maximal K^{ad} du groupe G^{ad} (rappelons que le centre Z du groupe G agit trivialement sur X). On obtient alors une application

$$Z = \pi_1(G^{\text{ad}}) = \pi_1(K^{\text{ad}}) \longrightarrow QH^*(G/P)_{loc}^\times,$$

que nous appellerons représentation de Seidel. Cette représentation est en générale difficile à décrire explicitement (voir par exemple [McSa04]). Ceci a été réalisé par A. Postnikov pour les Grassmanniennes et les variétés de drapeaux complets en type A dans [Pos05] et [Pos01]. Nous généralisons ce résultat en montrant que pour X un espace homogène rationnel, cette représentation est fidèle. Nous décrivons explicitement cette représentation ainsi qu'une formule pour la multiplication par un élément de cette image. Par ailleurs, nous donnons pour ces résultats une formulation dans un cadre légèrement plus général que celui de Seidel puisque nos formules seront valables dans la cohomologie quantique équivariante notée $QH_T^*(X, \mathbb{Z})$ et même dans le localisé $QH_T^*(X)_{loc}$ de cet anneau obtenu en inversant les paramètres quantiques.

Pour w dans W , nous noterons σ^w la classe de Schubert associée dans la cohomologie $H^*(G/P, \mathbb{Z})$ (cette classe ne dépend que de l'image \bar{w} de w dans le quotient W/W_P). Nous noterons η_P la projection naturelle $\mathcal{Q}^\vee \rightarrow \mathcal{Q}^\vee / \mathcal{Q}_P^\vee$ du réseau des coracines de G vers celui des coracines de P . Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 4.15 ([ChMaPe09]) *Pour tout sommet cominuscule $i \in I_m$ et pour tout élément w de W , on a la formule suivante dans $QH_T^*(G/P)_{loc}$:*

$$\sigma^{v_i} * \sigma^w = q_{\eta_P(\varpi_i^\vee - w^{-1}(\varpi_i^\vee))} \sigma^{v_i w}.$$

Théorème 4.16 ([ChMaPe09]) *Si f est l'involution de Weyl, alors la représentation de Seidel du groupe $\pi_1(G^{\text{ad}})$ dans $QH^*(G/P)_{loc}^\times$ est donnée pour $i \in I_m$, par*

$$-\varpi_i^\vee \mapsto \sigma^{v_{f(i)}}.$$

La technique principale pour obtenir ce résultat est d'utiliser la formule de comparaison, énoncée par D. Peterson et démontrée par T. Lam et M. Shimozono, qui compare la cohomologie quantique des espaces homogènes rationnels à certains quotients de l'anneau (pour le produit de Pontryagin) de l'homologie dans la Grassmannienne affine. Le résultat se déduit ensuite d'une formule de produit dans l'homologie de la Grassmannienne affine.

Pour les variétés de drapeaux complets généralisées G/B , cette formule de produit peut s'obtenir grâce à une formule de factorisation due à P. Magyar [Mag07]. Pour montrer le résultat en toute généralité, on a besoin d'étendre les résultats de P. Magyar à la Grassmannienne affine pour le groupe adjoint. Celle-ci n'est plus connexe et ses composantes connexes sont indexées par le groupe Z . On a alors besoin de généraliser les résultats de B. Kostant et S. Kumar [KoKu86] valables pour la Grassmannienne affine $\text{Gr}_{\text{aff}}(G)$ du groupe simplement connexe G à la Grassmannienne affine $\text{Gr}_{\text{aff}}(G^{\text{ad}})$ pour le groupe adjoint G^{ad} de G . Cette dernière grassmannienne affine a alors plusieurs composantes connexes, toutes isomorphes à $\text{Gr}_{\text{aff}}(G)$ et indexées par le centre Z de G . On obtient un anneau de Hecke nilpotent (*nil-Hecke ring* en anglais) étendu (par rapport à celui de Kostant et Kumar [KoKu86]) dans lequel la formule de P. Magyar peut admettre une généralisation.

Beaucoup de questions restent ouvertes concernant la cohomologie quantique mais également la cohomologie classique des espaces homogènes rationnels. Une première question est la suivante.

Question 4.17 *Donner une présentation de l'anneau de cohomologie quantique de tous les espaces homogènes rationnels.*

Outre les résultats de B. Kim donnant une présentation dans le cas de G/B , les résultats de Siebert et Tian [SiTi97] et de Bertram [Ber97] pour les grassmanniennes, de Ciocan-Fontanine [Cio99] et de Fomin, Gelfand et Postnikov [FoGePo97] pour les variétés homogènes sous $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ et les résultats présentés dans ce texte concernant la cohomologie quantique des espaces homogènes minuscules, une présentation de l'anneau de cohomologie quantique a été obtenue par A. Buch, A. Kresch et H. Tamvakis pour les Grassmanniennes de sous-espaces isotropes pour une forme quadratique ou symplectique dans [BuKrTa09]. Dans [ChPe09b], nous obtenons également des présentations de la cohomologie quantiques pour les variétés adjointes (et coadjointes). Des formules de Giambelli sont données dans [ChPe09c].

Une autre question, encore ouverte même dans le cas de la cohomologie classique est la suivante.

Question 4.18 *Donner une formule combinatoire pour calculer les coefficients de Littlewood-Richardson $c_{u,v}^w$ ainsi que les invariants de Gromov-Witten $I_\beta(u, v, w^\vee)$.*

De nombreuses formules partielles sont connues pour ce problème notamment dans le cas classique mais on n'a pas de formule combinatoire, c'est-à-dire mettant en lumière la positivité des coefficients, uniforme dans tous les cas. On peut bien sûr citer la fameuse règle de Littlewood-Richardson, qui utilise le jeu de taquin, conjecturée par D.E. Littlewood et A.R. Richardson dans [LiRi34] et démontrée par M.-P. Schützenberger dans [Sch77]. On peut aussi citer sa généralisation aux espaces homogènes (co)minuscules obtenue par H. Thomas et A. Yong [ThYo09]. Nous avons obtenu une généralisation de ces résultats à tous les coefficients $c_{u,v}^w$ avec w un élément Λ -(co)minuscule et même à nombre de ces coefficients dans le cadre plus général des groupes de Kac-Moody dans [ChPe09a]. Signalons également les résultats obtenus par I. Coskun [Cos09] pour les variétés de drapeaux à deux termes et qui utilisent les techniques géométriques

développées par R. Vakil dans [Vak06a] et [Vak06b]. La littérature sur ce sujet est énorme et on ne peut espérer citer tous les travaux s’y rapportant. On peut tout de même encore citer H. Duan [Dua05] qui donne une formule générale mais pas combinatoire dans le sens où la positivité des coefficients n’apparaît pas de manière évidente.

Une manière de comprendre la cohomologie ou la cohomologie quantique est de donner des formules de Pieri et de Giambelli c’est-à-dire des formules de multiplication par des classes *spéciales* qui engendrent l’anneau (formule de Pieri) et des fomules de Giambelli qui expriment toute classe en fonction des classes spéciales.

Question 4.19 *Donner des formules de Pieri et de Giambelli classiques et quantiques pour tous les espaces homogènes rationnels G/P .*

De nombreuses formules de ce genre sont connues, que ce soit pour les grassmanniennes classiques (ce sont les fameuses formules de Pieri et de Giambelli) ou pour certaines grassmanniennes isotropes (voir [PrRa96] et [PrRa03]), pour les variétés de drapeaux partiels (voir par exemple [Sot96], [BeSo98] et [BeSo02]) mais les formules les plus abouties ont été obtenues récemment par A. Buch, A. Kresch et H. Tamvakis (voir par exemple la prépublication [Tam09] et les références qu’elle contient). En particulier, on dispose maintenant de formules de Giambelli pour tous les espaces homogènes G/P où G est classique et de formules de Pieri pour les G/P avec G classique et P maximal. On dispose également de formule de Pieri et de Giambelli quantiques pour les grassmanniennes isotropes grâce aux résultats de A. Buch, A. Kresch et H. Tamvakis [BuKrTa09] et [BuKrTa08]. Cependant, dans le cas général c’est-à-dire incluant les groupes exceptionnels, on sait peu de choses. La notion même de classe spéciale est mal définie, les choix naturels qui existent dans le cas des groupes classiques n’existent plus.

On peut également citer dans une autre direction

Question 4.20 *À quelle condition un espace homogène a-t-il une cohomologie quantique semi-simple ?*

Lorsque la réponse est positive et que le groupe de Picard de l’espace homogène est \mathbb{Z} , la cohomologie quantique admet alors une involution d’algèbre qui échange le paramètre quantique q et son inverse q^{-1} .

Question 4.21 *Pour quels espaces homogènes de groupes de Picard \mathbb{Z} et ayant une cohomologie quantique semi-simple, la dualité étrange induite envoie-t-elle une classe de Schubert sur une classe de Schubert ?*

Des réponses partielles à ces deux questions ont été données dans [ChPe09b]. En particulier, peu d’espaces homogènes de groupe de Picard \mathbb{Z} ont une cohomologie quantique semi-simple. C’est cependant le cas des espaces homogènes adjoints non coadjoints dont la cohomologie quantique admet donc une involution. Cependant cette involution n’envoie pas une classe de Schubert sur une classe de Schubert en général.

Les résultats annoncés par D. Peterson dans [Pet97] ont maintenant presque tous été démontrés, notamment sa formule comparant cohomologie quantique et homologie de la Grassmannienne affine par T. Lam et M. Shimozono [LaSh09]. Cependant la preuve de T. Lam et M. Shimozono n’est pas complètement satisfaisante car uniquement combinatoire. Pour décrire la preuve de manière grossière, ils vérifient que les deux anneaux ont les mêmes présentations en termes de générateurs et de relations utilisant notamment la formule de Chevalley quantique équivariante prouvée par L. Mihalea [Mih07].

Question 4.22 *Donner une preuve géométrique de la formule de comparaison entre cohomologie quantique des espaces homogènes et homologie de la Grassmannienne affine.*

Une des grandes techniques pour obtenir des présentations explicites des anneaux de cohomologie quantique et des calculs de certains invariants de Gromov-Witten est le principe quantique/classique qui compare des invariants de Gromov-Witten à des coefficients de Littlewood-Richardson (pour la cohomologie classique).

Question 4.23 *Formuler et démontrer un principe quantique/classique général entre cohomologie quantique et cohomologie classique.*

Il est fort probable que, pour prouver un tel principe, on soit contraint de sortir du cadre des espaces homogènes et de considérer des adhérences d'orbites telles que les variétés horosphériques ou les variétés sphériques.

Des généralisations naturelles des diverses études évoquées jusqu'ici sont la cohomologie équivariante, la K -théorie, la K -théorie quantique et enfin la K -théorie quantique équivariante. Ces théories ont été bien définies par A. Givental et Y.-P. Lee [Giv00], [Lee04] et [GiLe03]. On peut donc poser des questions telles que

Question 4.24 *Donner une présentation de l'anneau de K -théorie quantique équivariante des espaces homogènes, montrer des résultats de comparaison quantique/classique pour la K -théorie quantique équivariante et la K -théorie classique équivariante.*

Des résultats partiels, concernant le principe quantique/classique ont été obtenus par A. Buch et L. Mihalcea [BuMi08] dans le cas des Grassmanniennes. A. Buch et L. Mihalcea expliquent également que leurs résultats s'étendent aux espaces homogènes (co)minuscules modulo la preuve que certaines variétés de Gromov-Witten sont rationnelles. Nous montrons ces résultats dans [ChPe10]. On peut aussi espérer un lien avec la grassmannienne affine :

Question 4.25 *Existe-t-il un lien entre la K -théorie quantique des espaces homogènes sous G et la K -théorie homologique de la grassmannienne affine pour G ?*

On pourrait alors voir apparaître des symétries affines dans la K -théorie quantique des espaces homogènes. Ceci est le cas pour les premiers exemples calculés dans la grassmannienne grâce aux résultats de [BuMi08].

Références

- [Abr00] Abrams L., *The quantum Euler class and the quantum cohomology of the Grassmannians*, Israel J. Math. **117** (2000), 335–352.
- [BeFa97] Behrend K., Fantechi B., *The intrinsic normal cone*. Invent. Math. **128** (1997), no. 1, 45–88.
- [BeSo98] Bergeron N., Sottile F., *Schubert polynomials, the Bruhat order, and the geometry of flag manifolds*. Duke Math. J. **95** (1998), no. 2, 373–423.
- [BeSo02] Bergeron N., Sottile F., *Skew Schubert functions and the Pieri formula for flag manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 2, 651–673.
- [BeGeGe73] Bernšteĭn I.N., Gel'fand I.M., Gel'fand S.I., *Schubert cells and the cohomology of a flag space*. Funkcional. Anal. i Priložen. **7** (1973), no. 1, 64–65.

- [Ber97] Bertram A., *Quantum Schubert calculus*, Adv. Math. **128** (1997), no. 2, 289–305.
- [BiJo07] Billey S.C., Jones B.C., *Embedded factor patterns for Deodhar elements in Kazhdan-Lusztig theory*. Ann. Comb. **11** (2007), no. 3-4, 285–333.
- [BiWa01] Billey S.C., Warrington G.S., *Maximal singular loci of Schubert varieties in $SL(n)/B$* . Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3915–3945.
- [Boe88] Boe B.D., *Kazhdan-Lusztig polynomials for Hermitian symmetric spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), no. 1, 279–294.
- [Bor53] Borel A., *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*. Ann. of Math. (2) **57** (1953). 115–207.
- [Bor91] Borel A., *Linear algebraic groups*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 126. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Bou54] Bourbaki N., *Groupes et algèbres de Lie*. Hermann 1954.
- [BrPo99] Brion M., Polo P., *Generic singularities of certain Schubert varieties*. Math. Z. **231** (1999), no. 2, 301–324.
- [Bru87] Bruguères A., *The scheme of morphisms from an elliptic curve to a Grassmannian*. Compositio Math. **63** (1987), no. 1, 15–40.
- [Buc03] Buch A.S., *Quantum cohomology of Grassmannians*. Compositio Math. **137** (2003), no. 2, 227–235.
- [BuKrTa03] Buch A., Kresch A., Tamvakis H., *Gromov-Witten invariants on Grassmannians*. J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 4, 901–915.
- [BuKrTa08] Buch A., Kresch A., Tamvakis H., *Quantum Giambelli formulas for isotropic Grassmannians*. Prépublication arXiv : math/0812.0970 (2008).
- [BuKrTa09] Buch A., Kresch A., Tamvakis H., *Quantum Pieri rules for isotropic Grassmannians*. Invent. Math. **178** (2009), no. 2, 345–405.
- [BuMi08] Buch A.S., Mihalcea L.C., *Quantum K-theory of Grassmannians*. Prépublication arXiv : 0810.0981.
- [CaKu03] Carrell J.B., Kuttler J., *Smooth points of T -stable varieties in G/B and the Peterson map*. Invent. Math. **151** (2003), no. 2, 353–379.
- [CaKu06] Carrell J.B., Kuttler J., *Singularities of Schubert varieties, tangent cones and Bruhat graphs*. Amer. J. Math. **128** (2006), no. 1, 121–138.
- [ChMaPe07] Chaput P.-E., Manivel L., Perrin N., *Quantum cohomology of minuscule homogeneous spaces II : Hidden symmetries*. Int. Math. Res. Not. IMRN (2007), no. 22.
- [ChMaPe08] Chaput P.-E., Manivel L., Perrin N., *Quantum cohomology of minuscule homogeneous spaces*. Transform. Groups **13** (2008), no. 1, 47–89.
- [ChMaPe09] Chaput P.-E., Manivel L., Perrin N., *Affine symmetries of the equivariant quantum cohomology ring of rational homogeneous spaces*. Math. Res. Lett. **16** (2009), no. 1, 7–21.
- [ChMaPe10] Chaput P.-E., Manivel L., Perrin N., *Quantum cohomology of minuscule homogeneous spaces III : semi-simplicity and consequences*. À paraître dans le Canadian J. of Math. (2010), DOI : 10.4153/CJM-2010-050-9, 18 pages.
- [ChPe09a] Chaput P.-E., Perrin N., *Towards a Littlewood-Richardson rule for Kac-Moody homogeneous spaces*. Prépublication arXiv : 0902.0152 (2009).

- [ChPe09b] Chaput P.-E., Perrin N., *Quantum cohomology of adjoint homogeneous spaces*. Prépublication arXiv : 0904.4824 (2009).
- [ChPe09c] Chaput P.-E., Perrin N., *Computations of quantum Giambelli formulas in some exceptional homogeneous spaces*. Prépublication arXiv : 0904.4838 (2009).
- [ChPe10] Chaput P.-E., Perrin N., *Rationality of some Gromov-Witten varieties and application to quantum K -theory*. À paraître dans *Communications in Contemporary Mathematics* (2010).
- [Che03] Chen L., *Quantum cohomology of flag manifolds*. *Adv. Math.* **174** (2003), no. 1, 1–34.
- [Cheo09] Cheong D., *Quantum Cohomology Rings of Lagrangian and Orthogonal Grassmannians and Total Positivity*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), no. 10, 5505–5537.
- [Cio99] Ciocan-Fontanine I., *On quantum cohomology rings of partial flag varieties*. *Duke Math. J.* **98** (1999), no. 3, 485–524.
- [Cor03] Cortez A., *Singularités génériques et quasi-résolutions des variétés de Schubert pour le groupe linéaire*. *Adv. Math.* **178** (2003), no. 2, 396–445.
- [Cos09] Coskun I., *A Littlewood-Richardson rule for two-step flag varieties*. *Inv. Math.* **176**, no 2 (2009) p. 325–395.
- [Dem74] Demazure M., *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), 53–88.
- [Deo90] Deodhar V.V., *A combinatorial setting for questions in Kazhdan-Lusztig theory*. *Geom. Dedicata* **36** (1990), no. 1, 95–119.
- [Dua05] Duan H., *Multiplicative rule of Schubert class*. *Invent. Math.* **159** (2005), no. 2, 407–436.
- [Fom99] Fomin S., *Lecture notes on quantum cohomology of the flag manifold*. *Geometric combinatorics (Kotor, 1998)*. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* **66(80)** (1999), 91–100.
- [FoGePo97] Fomin S., Gelfand S., Postnikov A., *Quantum Schubert polynomials*. *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), no. 3, 565–596.
- [Ful04] Fulton W., *On the quantum cohomology of homogeneous varieties*. *The legacy of Niels Henrik Abel, 729–736*, Springer, Berlin, 2004.
- [FMcPSS95] Fulton W., MacPherson R., Sottile F., Sturmfels B., *Intersection theory on spherical varieties*. *J. Algebraic Geom.* **4** (1995), no. 1, 181–193.
- [FuPa97] Fulton W., Pandharipande R., *Notes on stable maps and quantum cohomology*. *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, 45–96, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 62, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [FuWo04] Fulton W., Woodward C., *On the quantum product of Schubert classes*. *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), no. 4, 641–661.
- [Giv00] Givental A., *On the WDVV equation in quantum K -theory*. Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday. *Michigan Math. J.* **48** (2000), 295–304.
- [GiLe03] Givental A., Lee Y.-P., *Quantum K -theory on flag manifolds, finite-difference Toda lattices and quantum groups*. *Invent. Math.* **151** (2003), no. 1, 193–219.

- [Har66] Hartshorne R., *Connectedness of the Hilbert scheme*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **29** (1966) 5–48.
- [HaHi85] Hartshorne R., Hirschowitz A., *Smoothing algebraic space curves*. Algebraic geometry, Sitges (Barcelona), 1983, 98–131, Lecture Notes in Math., **1124**, Springer, Berlin, 1985.
- [Hen02] Hengelbrock H., *An Involution on the Quantum Cohomology Ring of the Grassmannian*. Prépublication arXiv : math/0205260 (2002).
- [KaLaRe03] Kassel C., Lascoux A., Reutenauer C., *The singular locus of a Schubert variety*. J. Algebra **269** (2003), no. 1, 74–108.
- [KaMaMa87] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K., *Introduction to the minimal model problem*. Algebraic geometry, Sendai, 1985, 283–360, Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [KaLu79] Kazhdan D., Lusztig G., *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*. Invent. Math. **53** (1979), no. 2, 165–184.
- [KaLu80] Kazhdan D., Lusztig G., *Schubert varieties and Poincaré duality*. Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), pp. 185–203, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.
- [Kim99] Kim B., *Quantum cohomology of flag manifolds G/B and quantum Toda lattices*. Ann. of Math. (2) **149** (1999), no. 1, 129–148.
- [KiPa01] Kim B. Pandharipande R. *The connectedness of the moduli space of maps to homogeneous spaces*. Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), 187–201, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.
- [Kle74] Kleiman S.L., *The transversality of a general translate*. Compositio Math. **28** (1974), 287–297.
- [Kol96] Kollár J., *Rational curves on algebraic varieties*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 32. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [KoMo98] Kollár J., Mori S., *Birational geometry of algebraic varieties*. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Cambridge Tracts in Mathematics, 134. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [KoMa94] Kontsevich M., Manin Y., *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*. Comm. Math. Phys. **164** (1994), no. 3, 525–562.
- [Kos59] Kostant B., *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*. Amer. J. Math. **81** (1959) 973–1032.
- [KoKu86] Kostant B., Kumar S., *The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G* . Adv. in Math. **62** (1986), no. 3, 187–237.
- [KrTa03] Kresch A., Tamvakis H., *Quantum cohomology of the Lagrangian Grassmannian*. J. Algebraic Geom. **12** (2003), no. 4, 777–810.
- [KrTa04] Kresch A., Tamvakis H., *Quantum cohomology of orthogonal Grassmannians*. Compos. Math. **140** (2004), no. 2, 482–500.
- [Kum96] Kumar S., *The nil Hecke ring and singularity of Schubert varieties*. Invent. Math. **123** (1996), no. 3, 471–506.

- [LaMuSe79] Lakshmibai V., Musili C., Seshadri C.S., *Geometry of G/P . III. Standard monomial theory for a quasi-minuscule P* . Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A Math. Sci. **88** (1979), no. 3, 93–177.
- [LaSh09] Lam T., Shimozono M., *Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian*. Acta Math. **204** (2010), no. 1, 49–90.
- [Lee04] Lee Y.-P., *Quantum K -theory. I. Foundations*. Duke Math. J. **121** (2004), no. 3, 389–424.
- [LiRi34] Littlewood D.E., Richardson A.R., *Group characters and algebras*. Phil. Trans. R. Soc. London Ser. A **233** (1934) 99–141.
- [Mag07] Magyar P., *Notes on Schubert classes of a loop group*. Prépublication arXiv : 0705.3826 (2007).
- [Man01a] Manivel L., *Le lieu singulier des variétés de Schubert*. Internat. Math. Res. Notices 2001, no. **16**, 849–871.
- [Man01b] Manivel L., *Generic singularities of Schubert varieties*. Prépublication arXiv : math/0105239 (2001).
- [Mat02] Matsuki K., *Introduction to the Mori program*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [McSa04] McDuff D., Salamon D., *J -holomorphic curves and symplectic topology*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 52. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [Mih07] Mihalcea L.C., *On equivariant quantum cohomology of homogeneous spaces : Chevalley formulae and algorithms*. Duke Math. J. **140** (2007), no. 2, 321–350.
- [Per02] Perrin N., *Courbes rationnelles sur les variétés homogènes*. Ann. Inst. Fourier **52** (2002), no. 1, 105–132.
- [Per03] Perrin N., *Courbes elliptiques sur les Grassmanniennes*. Prépublication 2003, <http://people.math.jussieu.fr/~nperrin/preprints.html>.
- [Per04] Perrin N., *Rational curves on homogeneous cones*. Doc. Math. **9** (2004), 623–637.
- [Per05] Perrin N., *Rational curves on minuscule Schubert varieties*. J. Algebra **294** (2005), no. 2, 431–462.
- [Per06] Perrin N., *Courbes elliptiques sur la variété spinnorielle*. Prépublication arXiv : math/0607260 (2006).
- [Per07] Perrin N., *Small resolutions of minuscule Schubert varieties*. Compos. Math. **143** (2007), no. 5, 1255–1312.
- [Per09] Perrin N., *The Gorenstein locus of minuscule Schubert varieties*. Adv. Math. **220** (2009), no. 2, 505–522.
- [Pet97] Peterson D., *Quantum cohomology of G/P* , MIT Lectures, 1997.
- [Pos01] Postnikov A., *Symmetries of Gromov-Witten invariants*. Advances in algebraic geometry motivated by physics (Lowell, MA, 2000), 251–258, Contemp. Math., **276**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [Pos05] Postnikov A., *Affine approach to quantum Schubert calculus*. Duke Math. J. **128** (2005), no. 3, 473–509.
- [PrRa96] Pragacz P., Ratajski J., *A Pieri-type theorem for Lagrangian and odd orthogonal Grassmannians*. J. Reine Angew. Math. **476** (1996), 143–189.

- [PrRa03] Pragacz P., Ratajski J., *A Pieri-type formula for even orthogonal Grassmannians*. Fund. Math. **178** (2003), no. 1, 49–96.
- [Pro84] Proctor R.A., *Bruhat lattices, plane partition generating functions, and minuscule representations*. European J. Combin. 5 (1984), no. 4, 331–350.
- [Rie01] Rietsch K., *Quantum cohomology rings of Grassmannians and total positivity*. Duke Math. J. **110** (2001), no. 3, 523–553.
- [SaVa94] Sankaran P., Vanchinathan P., *Small resolutions of Schubert varieties in symplectic and orthogonal Grassmannians*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30** (1994), no. 3, 443–458.
- [Sch77] Schützenberger M.-P., *La correspondance de Robinson*. Combinatoire et représentation du groupe symétrique (Actes Table Ronde CNRS, Univ. Louis-Pasteur Strasbourg, Strasbourg, 1976), pp. 59–113. Lecture Notes in Math., Vol. **579**, Springer, Berlin, 1977.
- [Sei97] Seidel P., π_1 of symplectic automorphism groups and invertibles in quantum homology rings. Geom. Funct. Anal. **7** (1997), no. 6, 1046–1095.
- [SiTi97] Siebert B., Tian G., *On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator*. Asian J. Math. **1** (1997), no. 4, 679–695.
- [Sot96] Sottile F., *Pieri’s formula for flag manifolds and Schubert polynomials*. Ann. Inst. Fourier **46** (1996), no. 1, 89–110.
- [Ste96] Stembridge J. R., *On the fully commutative elements of Coxeter groups*. J. Algebraic Combin. **5** (1996), no. 4, 353–385.
- [Tam09] Tamvakis H., *A Giambelli formula for isotropic partial flag varieties*. Prépublication arXiv : math/0908.3628 (2009).
- [ThYo09] Thomas H., Yong A., *A combinatorial rule for (co)minuscule Schubert calculus*. Adv. Math. **222** (2009), no. 2, 596–620.
- [Tho98] Thomsen J.F., *Irreducibility of $\overline{M}_{0,n}(G/P, \beta)$* . Internat. J. Math. **9** (1998), no. 3, 367–376.
- [Tot00] Totaro B., *Chern numbers for singular varieties and elliptic homology*. Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 2, 757–791.
- [Vak06a] Vakil R., *A geometric Littlewood-Richardson rule*. Appendix A written with A. Knutson. Ann. of Math. (2) **164** (2006), no. 2, 371–421.
- [Vak06b] Vakil R., *Schubert induction*. Ann. of Math. (2) **164** (2006), no. 2, 489–512.
- [Vie86] Viennot G.X., *Heaps of pieces. I. Basic definitions and combinatorial lemmas*. Combinatoire énumérative (Montreal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985), Lecture Notes in Math., **1234**, Springer, Berlin, 1986.
- [Wiś91] Wiśniewski J.A., *On contractions of extremal rays of Fano manifolds*. J. Reine Angew. Math. **417** (1991), 141–157.
- [WoYo06] Woo A., Yong A., *When is a Schubert variety Gorenstein?* Adv. Math. **207** (2006), no. 1, 205–220.
- [Zel83] Zelevinskiĭ A.V., *Small resolutions of singularities of Schubert varieties*. Funktsional. Anal. i Prilozhen. **17** (1983), no. 2, 75–77.