MAT 562 - Exercices du chapitre 4

Exercice 1. Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$ de parallélogramme fondamental M. Soit f une fonction Λ-elliptique. Montrer que :

$$\sum_{z \in M} z \cdot \operatorname{ord}_z(f) \in \Lambda.$$

Exercice 2. Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction elliptique (relativement à Λ) paire.

a) Si $a \in \mathbb{C}$ vérifie $2a \notin \Lambda$, montrer que $\operatorname{ord}_a(f) = \operatorname{ord}_{-a}(f)$. Si $2a \in \Lambda$, montrer que $\operatorname{ord}_a(f)$ est pair.

b) Montrer qu'il existe une fraction rationnelle $F(X) \in \mathbb{C}(X)$ telle que $f = F(\mathfrak{p}_\Lambda)$. *Indication* : on pourra considérer une suite $u_1, \ldots, u_r$ de points de $\mathbb{C}$ contenant exactement un élément de chaque partie $\{u, -u \mod \Lambda\}$ où u est un zéro ou pôle de f dans $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ et poser $m_i = \operatorname{ord}_{u_i}(f)$ si $2u_i \notin \Lambda$ et $m_i = \frac{1}{2} \operatorname{ord}_{u_i}(f)$ si $2u_i \in \Lambda$, puis considérer la fonction $g(z) = \prod_{i=1}^r (\mathfrak{p}_\Lambda(z) - \mathfrak{p}_\Lambda(u_i))^{m_i}$.

c) En déduire que si f est une fonction Λ-elliptique quelconque, il existe une fraction rationnelle $F(X, Y) \in \mathbb{C}(X, Y)$ telle que $f = F(\mathfrak{p}_\Lambda, \mathfrak{p}'_\Lambda)$. *Indication* : on pourra commencer par décomposer f comme somme d'une fonction elliptique paire et d'une fonction elliptique impaire.

Exercice 3. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. On pose, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\sigma_\Lambda(z) := z \prod_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2}.$$

a) Montrer que σ_Λ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui possède un zéro simple en chaque point de Λ et qui ne s'annule pas hors de Λ.

b) Soit $\omega \in \Lambda$. Calculer $\frac{d^2}{dz^2} \log \sigma$ et en déduire qu'il existe des constantes $a_\omega, b_\omega \in \mathbb{C}$ telles que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sigma_\Lambda(z + \omega) = e^{a_\omega z + b_\omega} \sigma(z).$$

c) Soient $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$ et $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_i n_i = 0$, $\sum_i n_i z_i \in \Lambda$ et les $z_i + \Lambda$ sont deux à deux disjoints. Montrer alors qu'il existe une fonction elliptique f relativement à Λ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{ord}_z(f) = \begin{cases} n_i & \text{si } z \in z_i + \Lambda, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Indication : on pourra considérer la fonction

$$\prod_i \sigma(z - z_i)^{n_i}.$$

Exercice 4. Soit $\tau \in \mathbb{H}$.

a) Si $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, calculer la partie imaginaire de $M\tau := \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$.

b) Montrer qu'il existe $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\mathrm{Im}(M\tau)$ soit maximal.

c) En déduire qu'il existe $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que

$$M\tau \in \left\{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geqslant 1,\ -\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}(\tau) \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Exercice 5. *(Théorème d'uniformisation)* Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. Pour $\tau \in \mathbb{H}$, on pose :

$$g_4(\tau) = g_4(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}), \quad g_6(\tau) = g_6(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}).$$

a) Expliquer pourquoi la fonction $\Delta = g_4^3 - 27g_6^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$. On introduit alors la fonction $j = 1728\frac{g_4^3}{\Delta}$.

b) On fait agir $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Vérifier que la fonction j est invariante sous cette action et que $|j(\tau)|$ tend vers $+\infty$ quand $\mathrm{Im}(\tau) \to +\infty$. Pour ce dernier point, on pourra utiliser sans preuve les valeurs suivantes de la fonction zêta : $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

Nous allons montrer que $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ est surjective. Par l'absurde, suppose le contraire et donnons-nous $c \in \mathbb{C}$ qui n'est pas dans l'image de j. Introduisons la fonction $f_c = \frac{1}{1-c/j}$.

c) Vérifier que f_c est invariante sous l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ et que $f_c(\tau)$ tend vers 1 quand $\mathrm{Im}(\tau) \to +\infty$. On dit que f_c est une *forme modulaire de poids 0.*

d) On rappelle que, d'après l'exercice 4, on a :

$$\mathbb{H} = \bigcup_{M \in SL_2(\mathbb{Z})} M\mathcal{F}$$

où $\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{H} : |\tau| \geqslant 1, -1/2 \leqslant \mathrm{Re}(\tau) \leqslant 1/2\}$. Montrer que $f_c = 1$ puis que $c = 0$.

e) Vérifier que $j(e^{2i\pi/3}) = 0$, puis aboutir à une contradiction.

f) Conclure que, pour tous $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $a^3 - 27b^2 \neq 0$, il existe un réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$ tel que $(g_4(\Lambda), g_6(\Lambda)) = (a, b)$.