MAT 562 - Exercices du chapitre 2

Dans toute cette feuille, k désigne un corps algébriquement clos.

Exercice 1. Soit E un k-espace vectoriel. Soit f un automorphisme k-linéaire de E. On note $\mathbb{P}(f)$ la transformation de $\mathbb{P}(E)$ envoyant une droite de E sur son image par f. Une telle transformation est appelée *homographie*.

a) Soient f et g deux automorphismes k-linéaires de E. Montrer que $\mathbb{P}(f) = \mathbb{P}(g)$ si et seulement si il existe $\alpha \in k^\times$ tel que $g = \alpha f$.

b) Montrer que l'ensemble des homographies de $\mathbb{P}(E)$ forme un groupe et que, si $d = \dim \mathbb{P}(E)$, ce groupe est isomorphe à $\mathrm{PGL}_{d+1}(E)$.

Posons $d = \dim \mathbb{P}(E)$. On appelle *repère projectif* de $\mathbb{P}(E)$ la donnée de $d+2$-points $P_1, \ldots, P_{d+2}$ telle que pour tout choix de $d+1$ d'entre eux, ces $d+1$ points ne sont pas contenus dans un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(E)$.

c) On note $p : E \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ la projection naturelle. Soient $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de E et $\mathcal{R}$ l'ensemble des repères projectifs de $\mathbb{P}(E)$. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{B} &\to \mathcal{R} \\ (e_0, ..., e_n) &\mapsto (p(e_0), ..., p(e_n), p(e_0 + ... + e_n)) \end{aligned}$$

induit une bijection entre les bases de E à homothétie près et les repères projectifs.

d) Soient $(P_1, \ldots, P_{d+2})$ et $(Q_1, \ldots, Q_{d+2})$ deux repères projectifs de $\mathbb{P}(E)$. Montrer qu'il existe une unique homographie h de $\mathbb{P}(E)$ telle que $h(P_i) = Q_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d+2$.

Exercice 2. Soit I un idéal homogène de $k[X_0, ..., X_n]$.

a) Pour chaque $n \geqslant 0$, on note I_n l'ensemble des polynômes homogènes de degré n de I. Montrer que $I = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

b) En déduire que $\sqrt{I}$ est un idéal homogène. Cela achève la démonstration du théorème des zéros projectif donnée en cours.

c) Toujours à l'aide de la question a), montrer que I est un idéal premier si, et seulement si, pour tous $f, g \in k[X_0, ..., X_n]$ homogènes :

$$fg \in I \Rightarrow f \in I \text{ ou } g \in I.$$

En déduire qu'une variété algébrique projective W de $\mathbb{P}^n_k$ est irréductible si, et seulement si, $I_p(W)$ est un idéal premier différent de $(X_0, ..., X_n)$.

Exercice 3.

a) Soient X un espace topologique et Y une partie de X. Montrer que Y est irréductible si, et seulement si, $\overline{Y}$ l'est aussi.

On plonge $\mathbb{A}^n_k$ dans $\mathbb{P}^n_k$ via :

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n).$$

b) Soit I un idéal homogène de $k[X_0, ..., X_n]$. Montrer que $V_p(I) \cap \mathbb{A}_k^n = V(I_*)$. En déduire que, si $V_p(I)$ est irréductible, alors $V(I_*)$ est soit vide soit irréductible.

c) Soit I un idéal de $k[X_1, ..., X_n]$. Montrer que l'adhérence de Zariski de $V(I)$ dans $\mathbb{P}_k^n$ est $V_p(I^*)$. En déduire que, si $V(I)$ est irréductible, alors $V_p(I^*)$ est irréductible.

Exercice 4. On note ϕ l'application de $\mathbb{A}_k^1$ vers $\mathbb{A}_k^3$ définie par $\phi(t) \coloneqq (t, t^2, t^3)$. On note W l'image de ϕ.

a) Montrer que W est une partie algébrique de $\mathbb{A}_k^3$. Déterminer l'idéal $I(W)$. Montrer qu'il est engendré par deux éléments.

b) On considère la carte affine $j : \mathbb{A}_k^3 \hookrightarrow \mathbb{P}_k^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (1 : x : y : z)$. Déterminer l'adhérence de Zariski de $j(W)$ dans $\mathbb{P}_k^3$.

c) Montrer que

$$I_p(j(W)) = (XY - TZ, Y^2 - XZ, X^2 - YT) \subset k[T, X, Y, Z].$$

(on pourra commencer par montrer que si $F \in I_p(j(W))$, il existe $A, B, C \in k[T, Z]$ tels que $F(T, X, Y, Z) = A(T, Z) + B(T, Z)X + C(T, Z)Y \mod J$)

d) Montrer que $I_p(j(W))$ ne peut pas être engendré par deux éléments homogènes.

Exercice 5. Soit p un nombre premier et soit q une puissance de p. On note $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments. Si $n \geqslant 1$, calculer le cardinal de l'ensemble $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.

Exercice 6. Soit F un polynôme homogène irréductible dans $k[X_0, ..., X_n]$. Montrer que :

$$C^{\text{sing}} = C \cap \bigcap_{i=0}^{n} V_p\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right).$$

Exercice 7. Supposons que k est de caractéristique différente de 2. Montrer que la cubique d'équation $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$ est lisse si et seulement si $4a^3 + 27b^2 \neq 0$.

Exercice 8. Supposons que k est de caractéristique différente de 2. Soit $P \in k[X]$ un polynôme simplement scindé de degré $d \geqslant 3$. Soit W l'adhérence de Zariski de $V(Y^2 - P(X)) \subset \mathbb{A}_k^2$ dans $\mathbb{P}_k^2$. Déterminer les points lisses de W.

Exercice 9. On considère la variété projective d'équation $X_0^d + ... + X_n^d = 0$. Montrer qu'elle est lisse.

Exercice 10. *(Plongement de Segre)* On considère l'application $\Phi_{n,m}$ de $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ vers $\mathbb{P}_k^{nm+n+m}$ définie par

$$([x_0 : \ldots : x_n], [y_0 : \ldots : y_m]) \mapsto [x_i y_j]_{0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant m}$$

Montrer que $\Phi_{n,m}$ induit une bijection de $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ sur une partie algébrique de $\mathbb{P}_k^{nm+n+m}$.

Exercice 11. On considère la fonction rationnelle $f : \mathbb{P}_k^2 \to \mathbb{P}_k^2$ définie par

$$[x : y : z] \mapsto [x^2 : xy : z^2].$$

Quel est son ouvert de définition U_f ?

Exercice 12. On considère la variété $V := V_p(Y^2Z - X^3 - X^2Z)$. On introduit les fonctions rationnelles $f : \mathbb{P}^1_k \to V$ et $g : V \to \mathbb{P}^1_k$ définies par

$$f([x:y]) = [(x^2-y^2)y : (x^2-y^2)x : y^3], \quad g([x:y:z]) = [y:x].$$

a) Quels sont les domaines de définition de f et de g ?

b) Vérifier que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont égales à l'identité sur leurs ouverts de définition.

Exercice 13. *(Plongement de Veronese)* Soient n et d deux entiers et posons $N := \binom{n+d}{n} - 1$. Soient $P_0, ..., P_N$ les monômes de degré d en les variables $X_0, ..., X_n$. On considère la fonction rationnelle $\phi : \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^N_k$ définie par :

$$[x_0 : ... : x_n] \mapsto [P_0(x_0, ..., x_n) : ... : P_N(x_0, ..., x_n)].$$

a) Montrer que ϕ est définie sur tout $\mathbb{P}^n_k$.

b) Montrer que l'image de ϕ est une variété projective $V_{n,d}$, et que ϕ induit un isomorphisme entre $\mathbb{P}^n_k$ et $V_{n,d}$.

c) Soit $F \in k[X_0, ..., X_n]$ un polynôme homogène de degré $d > 0$. Vérifier que $\phi(V_p(F))$ est l'intersection de $V_{n,d}$ avec un hyperplan projectif de $\mathbb{P}^N_k$, puis en déduire que $\mathbb{P}^n_k \smallsetminus V_p(F)$ est homéomorphe à une variété affine.

Exercice 14. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit $V \in \mathbb{P}^n_k$ une variété projective de dimension au plus $n-2$.

a) Montrer qu'il existe des polynômes homogènes $F_1, ..., F_r \in k[X_0, ..., X_n]$ sans diviseurs irréductibles communs tels que $I_p(V) = (F_1, ..., F_r)$.

b) Soit $f \in k(\mathbb{P}^n_k)$ une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{P}^n_k \smallsetminus V$. Montrer que f est constante.

Exercice 15. *(Frobenius)* Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p, où p est un nombre premier. Soit $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ un idéal engendré par des éléments de $\mathbb{F}_p[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^p, \ldots, x_n^p)$ induit une application polynomiale bijective de $V(I)$ dans $V(I)$ mais que c'est un isomorphisme si et seulement si $V(I)$ est fini.

Exercice 16. Soit $V \in \mathbb{P}^n_k$ une variété algébrique projective irréductible. Soit $H \subset \mathbb{P}^n_k$ un hyperplan projectif tel que $V \not\subset H$. On identifie alors $\mathbb{P}^n_k \smallsetminus H$ à l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$. Montrer qu'il existe un isomorphe de k-algèbres $k(V) \simeq k(V \cap \mathbb{A}^n_k)$ et que, si $P \in V \cap \mathbb{A}^n_k$, cet isomorphisme identifie $k[V]_P$ et $k[V \cap \mathbb{A}^n_k]_P$.

Exercice 17. Soit C une courbe projective plane irréductible de degré 2. Montrer que C est isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$.

Exercice 18. Soit C une courbe projective plane irréductible. Soit $P \in C$ tel que $\mathfrak{m}_P$ est principal. Montrer que P est un point lisse de C.

Exercice 19. Soit C une courbe projective plane irréductible. Soit $P \in C$ un point lisse.

a) Considérons une carte affine $\mathbb{A}^2_k \subset \mathbb{P}^2_k$ telle que $C \cap \mathbb{A}^2_k \neq \emptyset$. On considère l'application qui envoie un idéal I de $k[C \cap \mathbb{A}^2_k]_P$ sur l'idéal $I \cap k[C \cap \mathbb{A}^2_k]$ de $k[C \cap \mathbb{A}^2_k]$. Montrer qu'elle est injective, puis en déduire que $k[C]_P$ est noethérien.

b) Soient f une uniformisante de $k[C]_P$ et $g \in k[C]_P$ un élément non nul. A l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe un plus grand entier $n \geqslant 0$ tel que f^n divise g.

Exercice 20. Soient C une courbe projective plane irréductible et lisse. Soient V une variété projective et f une application rationnelle de C vers V. Montrer que f s'étend en un morphisme de C vers V.

Exercice 21. Soit C une courbe projective plane irréductible et lisse. Soit $f \in k(C)$.

a) Montrer que l'on définit un morphisme $\phi(f) : C \to \mathbb{P}^1_k$ par :

$$P \mapsto \begin{cases} [f(P) : 1] & \text{si } P \text{ n'est pas un pôle de } f, \\ [1 : 0] & \text{sinon.} \end{cases} \quad .$$

b) Vérifier que $f \mapsto \phi(f)$ est une application injective de $k(C)$ vers les morphismes de C vers $\mathbb{P}^1_k$.

c) Quels morphismes de C vers $\mathbb{P}^1_k$ sont de la forme $\phi(f)$?