MAT 562 - Exercices du chapitre 1

Exercice 1. Soit k un corps algébriquement clos. Quelles sont les parties algébriques de k ?

Exercice 2. Soit k un corps algébriquement clos. Est-ce que les ensembles suivants sont des variétés algébriques affines dans k^2 ?

a) $\{(x,x) \in k^2\}$

b) $\{(x,x) \in k^2 \mid x \neq 0\}$

c) $k^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$

Exercice 3. Soit k un corps algébriquement clos. Si $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$ sont deux variétés algébriques affines, montrer que $V \times W \subset k^{n+m}$ est une variété algébrique affine. Déterminer l'idéal $I(V \times W)$ en fonction de $I(V)$ et $I(W)$.

Exercice 4.

a) Dans l'anneau $\mathbb{Z}$, calculer les idéaux $(n)+(m)$, $(n)\cap(m)$ et $(n)\cdot(m)$ pour $n,m \in \mathbb{Z}$.

b) Soient A un anneau et I et J deux idéaux de A. On suppose que $I+J=A$. Montrer que $IJ = I \cap J$.

c) La réciproque est-elle vraie ?

d) Soient $I_1, ..., I_n$ des idéaux d'un anneau A tels que $I_i + I_j = A$ pour tous $i \neq j$. Montrer que $I_1 ... I_n = I_1 \cap ... \cap I_n$.

Exercice 5. Calculer les quotients $\mathbb{C}[X,Y]/(X)$, $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ et $\mathbb{C}[X]/(X^2+1)$.

Exercice 6. *(Lemme chinois)* Soient $I_1, ..., I_n$ des idéaux d'un anneau A tels que $I_i+I_j = A$ pour tous $i \neq j$. Montrer que $A/(I_1 \cap ... \cap I_n) \cong A/I_1 \times ... \times A/I_n$.

Exercice 7. Soit A un anneau commutatif unitaire. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ainsi que I_1 et I_2 deux idéaux de A. Si $I_1 I_2 \subset \mathfrak{p}$, montrer que $I_1 \subset \mathfrak{p}$ ou $I_2 \subset \mathfrak{p}$.

Exercice 8. Soit A un anneau commutatif unitaire. Soit I un idéal de A.

a) Montrer que l'idéal I est premier si et seulement si l'anneau A/I est intègre.

b) Montrer que l'idéal I est maximal si et seulement si l'anneau A/I est un corps.

Exercice 9. Soit k un corps et soit $n \geqslant 1$. On fixe $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$.

a) Montrer que l'idéal des $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $P(a_1, \dots, a_n) = 0$ est l'idéal $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$.

b) En déduire que l'idéal $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ est maximal. (On pourra considérer l'application $k[X_1, \dots, X_n] \to k$ définie par $P \mapsto P(a_1, \dots, a_n)$ et déterminer son noyau.)

Exercice 10. Soit k un corps. Montrer que l'anneau $k[X,Y]$ n'est pas principal.

Exercice 11. Soit A un anneau principal. Soit $x \in A \smallsetminus \{0\}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) x est irréductible ;

(ii) l'idéal (x) est premier ;

(iii) l'idéal (x) est maximal.

Exercice 12. Soit k un corps. On note A l'anneau $k[X,Y]/(Y^2 - X^3)$.

a) Montrer que $A \cong k[T^2, T^3]$.

b) En déduire que A n'est pas factoriel. Exhiber un idéal non principal de cet anneau.

Exercice 13. Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

a) Montrer que $A^\times = \{1, -1\}$.

b) Montrer que $3, 7, 4 + i\sqrt{5}$ et $4 - i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans A.

c) Vérifier que :

$$21 = 3 \cdot 7 = (4 - i\sqrt{5})(4 + i\sqrt{5}).$$

En déduire que A n'est pas factoriel.

Exercice 14. Montrer que tout anneau principal est factoriel. Pour établir l'unicité de la décomposition en produit d'irréductibles, on pourra utiliser l'exercice 11.

Exercice 15. Soit A un anneau factoriel. On note K son corps de fractions.

a) Soient $a, b \in A$ non nuls. Montrer qu'il existe un élément m, unique à multiplication par une unité près, tel que, pour tout d, on a $d \mid a$ et $d \mid b$ si et seulement si $d \mid m$. Un tel élément m est appelé *PGCD* de a et b. On dit que deux éléments de A sont *premiers entre eux* si leur PGCD est inversible.

b) Si a, b et c sont trois éléments de A tels que a et b sont premiers entre eux et $a \mid bc$, alors $a \mid c$.

c) Soit $a \in A$ un élément non nul. Montrer que l'idéal principal (a) est premier si et seulement si a est irréductible.

d) Si $P \in A[X]$ est un polynôme, on note $c(P)$ un PGCD des coefficients de P. Montrer que si P et Q sont deux polynômes de $A[X]$, alors $c(PQ) = c(P)c(Q)$ (dans $A/A^\times$).

e) Montrer que les éléments irréductibles de $A[X]$ sont, soit les polynômes constants irréductibles dans A, soit les polynômes $P \in A[X]$ tels que $c(P) = 1$ et P irréductible dans $K[X]$.

f) En déduire que $A[X]$ est factoriel.

g) En déduire que si k est un corps, l'anneau $k[X_1, \dots, X_n]$ est factoriel.

Exercice 16.

a) Montrer que le quotient d'un anneau principal par un idéal premier est principal.

b) Le quotient d'un anneau factoriel par un idéal premier est-il toujours factoriel ?

c) Montrer qu'un quotient d'un anneau noethérien est noethérien.

Exercice 17. Soit A un anneau intègre noethérien. Montrer que tout élément non nul de A s'écrit sous la forme $up_1...p_n$ avec $u \in A^\times$ et p_i irréductible pour chaque i. L'anneau A est-il forcément factoriel ?

Exercice 18. Soient A un anneau, I un idéal de A et a un élément de A. Montrer que si $I + (a)$ et $\{x \in A \,|\, ax \in I\}$ sont des idéaux de type fini de A, alors I est de type fini. A l'aide du lemme de Zorn, en déduire que A est noethérien si, et seulement si, tous ses idéaux premiers sont de type fini.

Exercice 19. Soit A un anneau noethérien. On se donne un idéal I de $A[X]$. Pour $n \geqslant 0$, on note I_n l'ensemble des polynômes dans I de degré $\leqslant n$, et J_n l'ensemble des $a \in A$ pour lequels il existe $Q \in A[X]$ de degré $< n$ tel que $aX^n + Q \in I$.

a) Vérifier que J_n est un idéal de A pour tout n. En déduire qu'il existe $p \geqslant 0$ tel que $J_n = J_p$ pour tout $p \leqslant n$.

b) Soit I' l'idéal de $A[X]$ engendré par I_p. Montrer que $I_n \subset I'$ pour tout n. En déduire que $I = I'$.

c) Montrer que I_p est un A-module de type fini. En déduire que I est un idéal de type fini dans $A[X]$, puis que $A[X]$ est noethérien.

Exercice 20.

a) Dans l'espace affine k^n, calculer $V(0)$ et $V(k[X_1, ..., X_n])$. Vérifier que, si $I \subset J$ sont des idéaux de $k[X_1, ..., X_n]$, alors $V(J) \subseteq V(I)$.

b) Soit $(I_i)_{i\in E}$ une famille d'idéaux de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que

$$V\left(\sum_{i\in E} I_i\right) = \bigcap_{i\in E} V(I_i).$$

c) Soient I et J deux idéaux de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que $V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

Exercice 21. Soit k un corps algébriquement clos. Soient U et V deux ouverts de Zatiski non vides de k^n. Montrer que $U \cap V \neq \emptyset$. En particulier, k^n muni de la topologie de Zariski n'est pas un espace métrique.

Exercice 22. Soit $X \subset k^n$ une partie de k^n. Montrer que $X \subset V(I(X))$ et que $V(I(X))$ est l'adhérence de X dans k^n. En déduire que X est une partie algébrique si et seulement si $X = V(I(X))$.

Exercice 23. Soit $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. On pose

$$D(P) = \{x \in k^n \mid P(x) \neq 0\}.$$

a) Montrer que $D(P)$ est un ouvert de k^n.

b) Montrer que l'ensemble des parties de la forme $D(P)$ forme une base d'ouverts de la topologie : pour tout ouvert $U \subset k^n$ et $x \in U$, il existe P tel que $x \in D(P) \subset U$.

c) Montrer que l'espace topologique $D(P)$ est homéomorphe à l'espace $V(X_{n+1}P-1)$ dans k^{n+1}. Autrement dit, montrer qu'il existe une application $f : D(P) \to V(X_{n+1}P-1)$ telle que l'image d'un ouvert est un ouvert et l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.

Exercice 24. Soient $(X_1, \mathcal{T}_{X_1})$ et $(X_2, \mathcal{T}_{X_2})$ deux espaces topologiques. On note $\mathcal{T}_{X_1 \times X_2}$ l'ensemble des parties de $X_1 \times X_2$ qui sont des unions de parties de la formes $U \times V$ avec $U \in \mathcal{T}_{X_1}$ et $V \in \mathcal{T}_{X_2}$.

a) Montrer que $\mathcal{T}_{X_1 \times X_2}$ est une topologie sur $X_1 \times X_2$. On l'appelle la *topologie produit*.

b) Montrer que la topologie produit sur $k^2 = k \times k$ (où k est muni de la topologie de Zariski) n'est pas la topologie de Zariski sur k^2.

Exercice 25. Soit $k \subseteq K$ une inclusion de corps algébriquement clos. Montrer qu'un système d'équations polynomiales à coefficients dans k qui a des solutions dans K a aussi des solutions dans k.

Exercice 26. On travaille sur un corps algébriquement clos k. Calculer l'idéal annulateur de $V(X^2(X-1)^3)$ dans $k[X]$ et celui de $V(Y(X^2-Y)^9)$ dans $k[X,Y]$. Dans chaque cas, le faire d'abord "à la main", puis avec le Nullstellensatz.

Exercice 27. Soit k un corps algébriquement clos. Soit $J = (X^2+Y^2-1, Y-1) \subset k[X,Y]$.

a) Déterminer l'ensemble $V(J)$.

b) Trouver une fonction $f \in I(V(J))$ telle que $f \notin J$.

c) Déterminer $I(V(J))$.

Exercice 28. Soit A un anneau.

a) Reconnaître $\sqrt{A}$ et $\sqrt{(0)}$.

b) Soient I et J des idéaux de A. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Corriger celles qui sont fausses.

(i) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

(ii) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

(iii) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I} \cdot \sqrt{J}$.

(iv) $\sqrt{I+J} = \sqrt{I} + \sqrt{J}$.

c) Soit I un idéal de A. Montrer que $\sqrt{I}$ est l'intersection des idéaux premiers contenant I. On pourra utiliser le lemme de Zorn.

Exercice 29.

a) Soit X un espace topologique et soit A une partie de X. Montrer que, si A est irréductible, son adhérence $\overline{A}$ est irréductible.

b) Soit X un espace topologique irréductible. Montrer que tout ouvert non vide est de X est irréductible.

Exercice 30 (Critère d'Eisenstein)**.** Soit A un anneau factoriel. Soit $x \in A$ un élément irréductible. Si $P \in A[X]$, on note $\overline{P}$ l'image de P dans $A/(x)[X]$.

a) Rappeler pourquoi (x) est un idéal premier de A. En déduire que $A/(x)[X]$ est un anneau intègre.

b) Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in A[X]$ est unitaire, que x divise a_i pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et que x^2 ne divise pas a_0. Montrer que P est irréductible dans $A[X]$.

c) Soit k un corps et soit $n \geqslant 2$. Montrer que l'idéal engendré par $Y^n + YX - X^{17} - X$ dans $k[X, Y]$ est premier.

Exercice 31. Soit k un corps algébriquement clos. Déterminer les idéaux annulateurs et les composantes irréductibles des variétés algébriques affines suivantes.

a) $V(X^2Y, (X-1)(Y+1)^2)$;

b) $V(Z - XY, Y^2 + XZ - X^2)$;

c) $V(XY^3 + X^3Y - X^2 + Y)$.

Exercice 32. Soit k un corps algébriquement clos. Déterminer les composantes irréductibles des variétés algébriques suivantes ainsi que l'idéal annulateur et la dimension de chacune des composantes.

a) $V(Y, Y^2 - XZ) \subset \mathbb{A}^3_k$;

b) $V(X(Y - X^2 + 1), Y(Y - X^2 + 1)) \subset \mathbb{A}^2_k$;

c) $V(X^2) \subset \mathbb{A}^2_k$;

d) $V(X^2 - YZ, XZ - X) \subset \mathbb{A}^3_k$.

e) $V(X^{14} + Y^{17} - Y^5X + X - 1) \subset \mathbb{A}^2_k$;

f) $V(Z^2 - XYZ, X^{19} + Y^{15} - Y^4Z + X) \subset \mathbb{A}^3_k$.

Exercice 33. Soit k un corps.

a) Soit $V = V(Y - X^2)$. Montrer que l'anneau $k[V]$ est k-isomorphe à l'anneau des polynômes en une variable.

b) Soit $V = V(XY - 1)$. Montrer que l'anneau $k[V]$ n'est pas k-isomorphe à l'anneau des polynômes en une variable.

c) On suppose que k est algébriquement clos. Montrer que les variétés affines $\mathbb{A}^1_k$ et $V(Y^2 - X^3)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 34. On travaille sur un corps algébriquement clos k. Soit $f : V \to W$ un morphisme entre deux variétés algébriques affines. Montrer que l'image par f d'une composante irréductible de V est contenue dans une composante irréductible de W.

Exercice 35. On travaille sur un corps algébriquement clos k. Soit V une variété algébrique affine irréductible. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples (U, f) avec U ouvert non vide de V et f une fonction polynomiale $U \to k$. Soit K le quotient de $\mathcal{F}$ par la relation d'équivalence suivante : $(U, f) \sim (U', f')$ si, et seulement si, il existe un ouvert non vide U'' contenu dans U et U' tel que $f|_{U''} = f'|_{U''}$. On munit K des opérations suivantes :

$$(U, f) + (U', f') = (U \cap U', f + f'),$$
$$(U, f) \cdot (U', f') = (U \cap U', f \cdot f').$$

Montrer que K est un corps naturellement isomorphe à $k(V)$.

Exercice 36.

a) Soient X et Y deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$ une application continue. On suppose que X est irréductible. Montrer que l'image de f l'est aussi.

b) Soit k un corps algébriquement clos et considérons le polynôme :

$$\det \in k[X_{i,j},\, 1 \leqslant i, j \leqslant n].$$

A l'aide de la question précédente, montrer que $V(\det)$ est irréductible. En déduire que det est irréductible.

Exercice 37. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit V une variété algébrique affine irréductible sur k.

a) Montrer qu'il existe un sous-corps L de $k(V)$ contenant k tel que L est isomorphe en tant que k-algèbre à $k(X_1, ..., X_n)$ pour un certain n et K est un L-espace vectoriel de dimension finie.

b) Montrer qu'il existe un polynôme irréductible $f \in k[X_1, ..., X_{n+1}]$ tel que V et $V(f)$ ont des ouverts non vides isomorphes. Pour ce faire, on pourra utiliser le théorème de l'élément primitif.

c) Déduire de la question précédente que $n = \dim(V)$. En particulier, l'entier n est entièrement déterminé par l'extension de corps $k(V)/k$. On l'appelle le degré de transcendance de $k(V)/k$.

Exercice 38. Soit k un corps algébriquement clos. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(k)$, et on identifie $M_n(k)$ à la variété affine k^n.

a) Montrer que $\mathcal{N}$ est une variété algébrique affine et que son idéal de définition est engendré par n éléments. Les expliciter lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

b) Montrer que $\mathcal{N}$ est l'adhérence de Zariski de l'ensemble des matrices nilpotentes de rang $n - 1$.

c) Montrer que $\mathcal{N}$ est irréductible. On pourra utiliser la question a) de l'exercice 29.

Exercice 39. Soit A un anneau noethérien.

a) Soit I un idéal de A. Montrer qu'il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ tels que $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset I$.

b) En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premiers qui sont minimaux pour la relation d'inclusion.

Exercice 40. On travaille sur un corps algébriquement clos k. Soit $V = V(I) \subset k^n$ une variété algébrique affine non vide.

a) Soit C une composante irréductible de V. Montrer que C est un fermé de V. (on pourra commencer par considérer l'adhérence de C)

b) En déduire que les composantes irréductibles de V sont en bijection avec les idéaux premiers minimaux de $k[V]$.

c) En utilisant l'exercice 39, en déduire que V a un nombre fini de composantes irréductibles et que V est égale à l'union de ses composantes irréductibles.

Exercice 41. Soit k un corps algébriquement clos. On note $C = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\}$. Déterminer $I(C)$ et montrer que C est une variété affine de dimension 1.

Exercice 42. Soit k un corps algébriquement clos. Soit $f \in k[X_1, ..., X_n]$ un polynôme irréductible.

a) Quelle est la dimension de $V(f)$?

b) Soit $P \in V(f)$. Montrer que $V(f)$ est singulière en P si, et seulement si, on a $\partial f/\partial X_i(P) = 0$ pour tout i.

Exercice 43. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. En utilisant l'exercice précédent, déterminer le lieu singulier des sous variétés affines d'équations suivantes :

a) $X^2 = X^4 + Y^4$ dans k^2 ;

b) $XY^2 = Z^2$ dans k^3

c) $X^3 = Y^2 + X^4 + Y^4$ dans k^2 ;

d) $X^2Y + XY^2 = X^4 + Y^4$ dans k^2 ;

e) $X^2 + Y^2 = Z^2$ dans k^3 ;

f) $XY + X^3 + Y^3 = 0$ dans k^3.

Exercice 44. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Déterminer le lieu singulier de la variété affine définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} x^3 + y^4 = z^2 + w^7 \\ x^2 + y^6 + z^4 = w^3. \end{cases}$$

Exercice 45. *(Partie affine d'une courbe elliptique)* On suppose que k est un corps algébriquement clos. Donnons-nous un polynôme $P \in k[X]$ de degré 3 et considérons la varieté affine $V := V(Y^2 - P(X))$.

a) Vérifier que V est une courbe algébrique affine irréductible.

b) À quelle condition sur P la courbe V est-elle lisse ?

c) La courbe V peut-elle être isomorphe à k ?

Exercice 46. Soit k un corps infini et soit $V_i = V(P_i)$, avec $P_1 = Y - X^2$, $P_2 = XY - 1$ et $P_3 = X^2 + Y^2 - 1$ des éléments de $k[X, Y]$.

1. Déterminer $k[V_i]$ et montrer que $k[V_1] \simeq k[T]$ et que $k[V_2] \not\simeq k[V_1]$.
2. Pour quels corps k a-t-on $k[V_3] \simeq k[V_1]$ ou $k[V_3] \simeq k[V_2]$?

Exercice 47. Soit $M_n(k) = \mathbb{A}^{n^2}(k)$ l'ensemble des matrices carrées de taille n, soit $r \in [0, n]$ et soit

$$R_r = \{M \in M_n(k) \mid \mathrm{Rg}(M) \leqslant r\}$$

Montrer que R_r est un sous-ensemble algébrique affine de $\mathbb{A}_{n^2}(k)$.

Exercice 48. Soit k un corps infini et soit $P \in k[X, Y]$ tel que $V(P)$ est infini.

1. Montrer que si P est irreductible, alors $I(V(P)) = (P)$.
2. Soit $P = P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$ la décomposition de P est facteurs irréductibles. Montrer que si $V(P_i)$ est infini pour tout $i \in [1, r]$, alors les $V(P_i)$ sont les composantes irréductibles de $V(P)$.