FMA_52062_EP - Introduction à la géométrie algébrique et aux courbes elliptiques

Devoir maison

Vous pouvez faire ce devoir maison par groupes de 2 ou 3. Il est à rendre au plus tard le lundi 10 février à 18h15. Votre note finale sera calculée via la formule $\max\{\frac{DM+3E}{4}, E\}$*, où* DM *est la note au devoir maison et* E *la note à l'examen.*

Exercice. Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal. On pose $S = A[X_0, \cdots, X_n]$ et on considère A comme un sous-anneau de S. On définit un degré sur S de telle sorte que les X_i sont de degré 1 et les éléments de A de degré 0.

On note IS l'idéal de S engendré par I et pour $r \geqslant 0$, on note S_r le sous-A-module de S formé des éléments de degré r en $X_0, \cdots, X_n$. Un idéal J de S est dit homogène s'il est engendré par des éléments homogènes.

Si $J \subset S$ est un homogène, on pose $J_r = J \cap S_r$.

Dans cet exercice, on se propose de montrer l'énoncé suivant.

Proposition Soit $J \subset S$ un idéal gradué et r un entier non nul fixé.
Si $S_r \subset J + IS$, alors il existe $f \in A \setminus I$ tel que $fS_r \subset J_r$.

Soient donc $I \subset A$ un idéal et $J \subset S$ un idéal homogène tels que $S_r \subset J + IS$. On fixe $(e_1, \cdots, e_N)$ une A-base de S_r (par exemple les monômes de la forme $X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}$ avec $i_0 + \cdots + i_n = r$).

1. Montrer que pour $i \in [1, N]$, il existe $p_i \in J_r$ et $(m_{i,j})_{j\in[1,N]} \in I^N$ tels que
$$e_i = p_i + \sum_{j=1}^{N} m_{i,j} e_j.$$
On pose $M = (m_{i,j})_{i,j\in[1,N]} \in M_N(A)$ et on note Id_N la matrice identité de taille N. On considère les vecteurs colonnes $e = (e_1, \cdots, e_N)^t$ et $p = (p_1, \cdots, p_N)^t$ dans $M_{N,1}(S)$.
2. Montrer que l'on a $(\mathrm{Id}_N - M)(e) = p$.
3. Montrer que $\det(\mathrm{Id}_N - M) \in A \setminus I$.
4. Conclure.

Définition. Une application est fermée si l'image d'un fermé est un fermé.

Problème. Soit k un corps algébriquement clos.

1. Donner un exemple de morphisme $\varphi : X \to Y$ entre ensembles algébriques affines dont l'image n'est pas fermée.

   On veut montrer le résultat suivant lorsque X et Y sont irréductibles.

   Théorème. Un morphisme $\varphi : X \to Y$ entre variétés projectives est fermé.

2. Montrer qu'il suffit de montrer que pour tout morphisme $\varphi : X \to Y$ entre variétés projectives irréductibles, l'image $\varphi(X)$ est fermée.
3. Montrer qu'il suffit de montrer que pour tout morphisme $\varphi : X \to \mathbb{P}^m_{\mathsf{k}}$ entre variétés projectives irréductibles, l'image $\varphi(X)$ est fermée.

   On fixe $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ un fermé irréductible et $\varphi : X \to \mathbb{P}^m_{\mathsf{k}}$ un morphisme entre variétés projectives irréductibles. On définit le graphe de φ :

   $$\Gamma_\varphi = \{(x, z) \in \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}} \times \mathbb{P}^m_{\mathsf{k}} \mid x \in X \text{ et } z = \varphi(x)\}.$$

   Choisissons un système de coordonnées sur $\mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ et $\mathbb{P}^m_{\mathsf{k}}$ de telle sorte que les points s'écrivent sous la forme $[x_0 : \cdots : x_n]$ et $[z_0 : \cdots : z_m]$. Les variables associées sont $X_0, \cdots, X_n$ et $Z_0, \cdots, Z_m$.

   Un polynôme $F \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n, Z_0, \cdots, Z_m]$ est dit homogène en $(X_i)_{i\in[0,n]}$ s'il est homogène comme élément de $A[X_0, \cdots, X_n]$ où $A = \mathsf{k}[Z_0, \cdots, Z_m]$ (voir Exercice 1). On définit de la même manière les polynômes homogènes en $(Z_j)_{j\in[0,m]}$.

4. Soit $\mathcal{I} \subset \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n, Z_0, \cdots, Z_m]$ un idéal engendré par des polynômes homogènes en $(X_i)_{i\in[0,n]}$ et en $(Z_j)_{j\in[0,m]}$. Montrer que $\mathcal{I}$ est engendré par un nombre fini de tels polynômes.
5. Montrer qu'il existe des polynômes $F_1, \cdots, F_\ell \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n, Z_0, \cdots, Z_m]$ homogènes en $(X_i)_{i\in[0,n]}$ et en $(Z_j)_{j\in[0,m]}$ tels que

   $$\Gamma_\varphi = \{(x, z) \in \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}} \times \mathbb{P}^m_{\mathsf{k}} \mid F_i(x, z) = 0 \text{ pour tout } i \in [1, \ell]\}.$$

   On note $p : \Gamma_\varphi \to \mathbb{P}^m_{\mathsf{k}}$ la seconde projection définie par $p(x, z) = z$. Pour $j \in [0, m]$, on pose $D_{\mathbb{P}^m_{\mathsf{k}}}(Z_j) = \mathbb{P}^m_{\mathsf{k}} \setminus V_p(Z_j)$.

6. Montrer que $\varphi(X)$ est fermé si et seulement si $p(\Gamma_\varphi) \cap D_{\mathbb{P}^m_{\mathsf{k}}}(Z_j)$ est fermé dans $D_{\mathbb{P}^m_{\mathsf{k}}}(Z_j)$ pour tout $j \in [0, m]$.

7. En déduire qu'il suffit de montrer que si $W \subset \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}} \times \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ est de la forme

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}} \times \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}} \mid P(x, y) = 0 \text{ pour tout } P \in I\}$$

où $[x_0 : \cdots : x_n]$ et $(y_1, \cdots, y_m)$ sont les coordonnées respectives de $\mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ et $\mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ de variables associées $(X_i)_{i\in[0,n]}$ et $(Y_j)_{j\in[1,m]}$ et $I \subset \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_, Y_1, \cdots, Y_m]$ est un idéal homogène en $(X_i)_{i\in[0,n]}$, alors son image par la seconde projection est fermée.

On cherche maintenant à montrer l'assertion de la question 7. Soit donc $W \subset \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}} \times \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ de la forme

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}} \times \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}} \mid P(x, y) = 0 \text{ pour tout } P \in I\},$$

où $I \subset \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m]$ est l'idéal engendré par les polynômes homogènes en $(X_i)_{i\in[0,n]}$ s'annulant sur W.

On va montrer que le complémentaire de $p(W)$, où $p : \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}} \times \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}} \to \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ est la seconde projection, est ouvert. Soit donc $y = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{A}_m(\mathsf{k}) \smallsetminus p(W)$. On note $\mathfrak{M} = (Y_1 - y_1, \cdots, Y_n - y_n) \subset \mathsf{k}[Y_1, \cdots, Y_m]$ l'idéal maximal associé.

Pour tout $i \in [0, n]$, on pose $D(X_i) = \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}} \smallsetminus V_p(X_i)$ et $U_i = D(X_i) \times \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$.

8. Montrer que U_i est un espace affine et que l'on a

$$\mathsf{k}[U_i] \simeq \mathsf{k}\left[\frac{X_0}{X_i} \cdots, \frac{X_n}{X_i}, Y_1, \cdots, Y_m\right].$$

Pour tout $i \in [1, n]$, on pose $I_i = I(W \cap U_i) \subset \mathsf{k}[U_i]$.

9. Montrer que $W \cap U_i$ est un ensemble algébrique (*i.e.* $W \cap U_i = V(I_i)$ et que pour tout $f \in I_i$, il existe un entier d_f tel que $X_i^{d_f} f \in I$.
10. Montrer que l'on a $\mathsf{k}[U_i] = I_i + \mathfrak{M}\,\mathsf{k}[U_i]$.

On pose $A = \mathsf{k}[Y_1, \cdots, Y_m]$ et $S = A[X_0, \cdots, X_n]$. On rappelle le degré sur S défini à l'Exercice 1 et la notation S_r qui désigne les polynômes de degré r de S. Pour $F \in S$, on pose

$$F_{X_i} = F\left(\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}, Y_1, \cdots, Y_m\right) \in \mathsf{k}\left[\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}, Y_1, \cdots, Y_m\right] = \mathsf{k}[U_i],$$

et on considère l'idéal homogène $J \subset S$ défini par

$$J = (F \mid F \text{ homogène en } (X_i)_{i\in[0,n]} \text{ tel que } F_{X_i} \in I_i \text{ pour tout } i \in [0, n]).$$

11. Montrer qu'il existe un entier s tel que $X_i^s \in J + \mathfrak{M}S$ pour tout $i \in [1, n]$.

12. En déduire qu'il existe un entier r tel que $S_r \subset J + \mathfrak{M}S$ puis qu'il existe un $f \in A \smallsetminus \mathfrak{M}$ tel que $fS_r \subset J_r$ (on pourra utiliser l'Exercice 1).

    On montre maintenant que $\mathbb{A}^m_{\mathsf{k}} \smallsetminus V(f)$ est un voisinage ouvert de y dans $\mathbb{A}^m_{\mathsf{k}} \smallsetminus p(W)$ ce qui terminera la preuve.

13. Montrer que $y \in \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}} \smallsetminus V(f)$.
14. Montrer que pour $(x, y') \in W$ et tout $F \in J$ on a $F(x, y') = 0$.
15. Montrer que $\mathbb{A}^m_{\mathsf{k}} \smallsetminus V(f) \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}} \smallsetminus p(W)$ (on pourra raisonner par l'absurde).
16. Conclure la preuve du théorème.
17. Retrouver le fait qu'une application régulière $f : X \to \mathsf{k}$, où X est un ensemble algébrique projectif irréductible, est constante.