

# RÉSUMÉ DE MA THÈSE

## “APPROCHES PROBABILISTES POUR DES ÉQUATIONS DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRES”

Mes travaux concernent l’analyse mathématique des équations aux dérivées partielles dispersives non linéaires, et en particulier des équations de Schrödinger, en présence de fluctuations aléatoires. Les équations dispersives décrivent des modèles physiques dans lesquels des ondes de fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes, comme la lumière qui traverse un prisme et se sépare en différentes couleurs. Les interactions sont dites *non linéaires* lorsque la superposition de deux solutions n’est plus une solution.

Cette classe d’équations regroupe de nombreux modèles qui décrivent la propagation de paquets d’ondes [67] dans des contextes physiques variés — physique statistique, optique non linéaire, systèmes de particules quantiques, océanographie — pour décrire, par exemple, la dynamique de solitons — des vagues qui se déplacent sans se disperser — ou encore la formation de condensats de Bose-Einstein [59].

Les motivations à l’étude mathématique de ces équations en présence d’aléa sont de natures très diverses. Tout d’abord, l’aléatoire peut être imposé par le modèle afin de décrire les fluctuations microscopiques et le comportement collectif d’un grand nombre de particules, dont l’équilibre statistique est décrit par les *mesures de Gibbs*. Par ailleurs, les équations dispersives non linéaires présentent des instabilités qui ont lieu dans certains régimes où les interactions non linéaires prédominent sur les effets dispersifs, et qui compromettent la description de l’évolution de toutes les données initiales. Néanmoins, en munissant l’ensemble des conditions initiales d’une mesure de probabilité on peut espérer exhiber des *ensembles génériques* qui donnent lieu à des solutions physiquement pertinentes. On peut alors s’intéresser à la stabilité de solutions particulières, comme des solitons, sous l’effet de perturbations irrégulières qui contiennent de l’aléa.

Ainsi, la coexistence de mécanismes singuliers et de phénomènes stables est un aspect remarquable du comportement qualitatif des équations dispersives non linéaires, qui est sous-jacent à chacun de mes travaux. La question principale à laquelle ma thèse apporte des réponses est la suivante:

- Comment les fluctuations aléatoires affectent-elles la dynamique de systèmes dispersifs non linéaires ?

Après avoir présenté les contextes dans lesquels s’inscrivent mes travaux de thèse, je résume dans ce document chacune des contributions en les rassemblant dans trois grandes parties qui constituent mon manuscrit.

1. Contexte	2
2. Instabilités dans les régimes sur-critiques	7
3. Dynamiques en temps long pour des données initiales aléatoires	10
4. Vers une théorie de Cauchy probabiliste quasi-linéaire	14
5. Synthèse, progrès récents et perspectives	18
References	19

## 1. CONTEXTE

**1.1. Analyse mathématique des équations dispersives non linéaires.** La propagation des ondes dans les milieux dispersifs faiblement non linéaires est décrite par des *équations dispersives non linéaires*, qui sont généralement de la forme

$$i\partial_t u = Lu + f(u),$$

où la solution  $u = u(t, x)$  prend des valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{C}^d$ ,  $L$  est un opérateur auto-adjoint généralement donné par un multiplicateur de Fourier, et  $f(u)$  est le terme non linéaire, qui peut contenir des dérivées de  $u$ . La théorie des équations dispersives non linéaires a été largement développée au cours des 30 dernières années, et nous renvoyons aux livres [11, 30, 43, 70], à la note [71], et aux références qui y sont mentionnées pour une présentation générale et une discussion sur de nombreux aspects de l'étude mathématique de ces équations. Des exemples illustres de modèles dispersifs non linéaires sont donnés par l'équation de Korteweg-de Vries, l'équation de Benjamin-Ono et celle de Burgers, qui modélisent respectivement la propagation d'ondes dans des canaux d'eau peu profonds, les ondes internes dans les océans, et des écoulements turbulents.

L'évolution en temps des solutions à de telles équations est particulièrement riche et difficile à appréhender. Cependant, certains systèmes dits complètement intégrables — qui peuvent être considérées comme des généralisations des systèmes intégrables de la mécanique classique — possèdent des propriétés remarquables qui permettent de les résoudre explicitement et de décrire finement la dynamique de leurs solutions. Par ailleurs, les interactions d'ondes non linéaires ont la caractéristique d'être parfois turbulentes, c'est à dire que de petites échelles apparaissent. Lorsque des phénomènes chaotiques interviennent, comme des cascades d'énergie vers les petites échelles, il devient pertinent d'étudier les propriétés statistiques des solutions plutôt que leurs trajectoires individuelles.

Les mécanismes dispersifs sont linéaires et s'expriment au moyen d'inégalités fonctionnelles remarquables. Au niveau non linéaire il est nécessaire de comprendre comment les différentes ondes interagissent les unes avec les autres. Il faut alors isoler les différentes échelles d'oscillations — ce qui convoque des outils issus de l'analyse harmonique et de l'étude des signaux comme superposition d'ondes monochromatiques — et exploiter finement les mécanismes dispersifs qui régissent leur propagation.

On identifie alors deux approches complémentaires :

- (i) L'approche dynamique, qui consiste à étudier les orbites des solutions individuelles et leur comportement en temps long.
- (ii) L'approche statistique, qui consiste à appréhender l'évolution collective et macroscopique des trajectoires en suivant l'évolution de mesures de probabilité sur l'espace des phases au cours du temps.

Mes travaux de thèse s'inscrivent dans le cadre de la deuxième approche, présentée dans le paragraphe 1.2. Ils ont principalement pour objet l'étude des solutions à l'équation de Schrödinger non linéaire dans l'espace euclidien tridimensionnel  $\mathbb{R}^3$ , mais également dans le cas périodique  $\mathbb{T}^d$  et sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . La motivation est d'étudier la théorie de Cauchy — à savoir l'existence et l'unicité de solutions — et leur dynamique à long terme, le tout à très basse régularité et sous l'effet de perturbations stochastiques. La forme générale de l'équation de Schrödinger non linéaire est

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_g u = f(|u|^2)u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbf{M}. \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (\text{NLS})$$

Ici,  $(\mathbf{M}, g)$  est une variété Riemannienne,  $\Delta_g$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $(\mathbf{M}, g)$  et  $f$  est une fonction qui mesure la force des interactions non linéaires, qui se font par le biais du potentiel  $f(|u|^2)$  dépendant de la solution  $u$  elle-même. Le signe de  $f$  détermine la nature des interactions non linéaires qui seront attractives lorsque  $f(|u|^2) < 0$  et répulsives sinon, comme indiqué sur la figure 1.1.

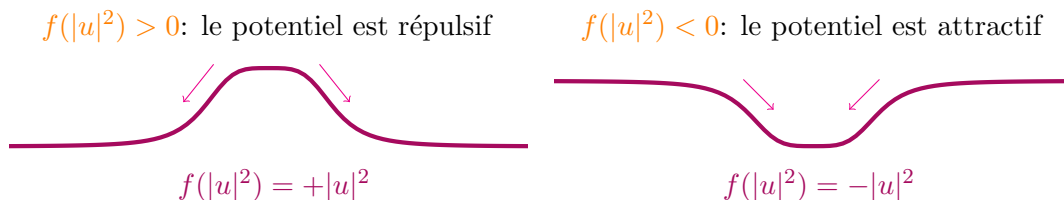


FIGURE 1. Interactions non linéaires de la solution sur elle-même, selon le signe du paramètre  $\mu$ .

Les solutions de l'équations (NLS) conservent leur énergie  $\mathcal{E}$  au cours du temps, où

$$\mathcal{E}[u](t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbf{M}} |\nabla u(t, x)|^2 dx + \frac{\mu}{p+1} \int_{\mathbf{M}} |u(t, x)|^{p+1} dx,$$

ainsi que leur masse

$$M[u](t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbf{M}} |u(t, x)|^2 dx.$$

Les équations de Schrödinger non linéaires servent de modèles théorique qui apparaissent dans un certain nombre de modèles dispersifs pour décrire l'amplitude de l'enveloppe d'un paquet d'ondes qui oscillent rapidement. Nous renvoyons à [67] pour des perspectives physiques sur ces équations. Compte tenu des propriétés de l'évolution linéaire — représentée par le semi-groupe  $\{e^{it\Delta}\}_{t \in \mathbb{R}}$  — et des lois de conservation, les espaces de phase naturels généralement associés aux équations dispersives sont les espaces fonctionnel de Sobolev  $H^s(\mathbf{M})$ , où  $s \in \mathbb{R}$  est un paramètre qui mesure la régularité et le degré d'oscillations des solutions.

Même si la masse et l'énergie des solutions sont conservées, leurs normes  $H^s(\mathbf{M})$  peuvent, en revanche, s'amplifier pour certains paramètres  $s > 1$  au fur et à mesure que le temps s'écoule. Dans un tel cas, la masse se répartit sur les fréquences *élevées* et des oscillations à petite échelle apparaissent. Une telle cascade de fréquences basses vers hautes est appelée *turbulence faible*. Par exemple, l'effet du vent — à basse fréquence — sur la surface d'une étendue d'eau fait apparaître des vagues qui ont des fréquences bien plus hautes.

On ne considère dans cette thèse que des équations dont nous ne connaissons pas les solutions explicitement, et nous suivons une approche perturbative matérialisée par la formule intégrale de Duhamel:

$$u(t, x) = e^{it\Delta_g} u_0(x) - i\mu \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta_g} |u(\tau, x)|^{p-1} u(\tau, x) d\tau.$$

Plus précisément, l'évolution non linéaire est considérée comme une perturbation de l'évolution linéaire. La formule intégrale de Duhamel est utilisée pour prouver l'existence et l'unicité locales par un argument de contraction ou, alternativement, un schéma d'itération de Picard dans un espace de fonctions approprié qui encode les propriétés dispersives de l'équation.

Cette stratégie est plus susceptible de réussir lorsque les données initiales ou le temps d'existence sont petits. Pour comprendre le comportement à long terme, et pour des grandes données initiales, nous devons itérer cet argument local en utilisant des quantités conservées qui contrôlent la croissance des normes de Sobolev, et d'autres quantités uniformément contrôlées grâce à des de formules variationnelles.

La thèse porte sur des régimes où les données initiales oscillent à des fréquences élevées qui engendrent des instabilités compromettant le développement de schéma d'itération de Picard. Plus précisément on rencontre dans cette thèse deux types d'instabilités. D'une part, le *mécanisme d'inflation de la norme*, discuté dans le paragraphe 2, où des invariances par changement d'échelle permettent de construire des états initiaux arbitrairement petits qui deviendront instantanément arbitrairement grands. D'autre part, des instabilités sont dues à la présence de solutions stationnaires particulières qui arrivent à surmonter les effets dispersifs et à concentrer leur masse dans une région de l'espace. Cela a lieu par exemple lorsque la dispersion est trop faible. Dans ces régimes, discutés dans le paragraphe 4, le système est *quasi-linéaire* dans le sens où l'évolution linéaire n'est pas une bonne approximation de l'évolution non linéaire et où l'on ne peut immédiatement utiliser la formule de Duhamel.

Pour aller au delà de ces instabilités, j'ai dans ma thèse contribué au développement d'une approche probabiliste qui permet de générer des grands ensembles de solutions typiques et aléatoires, qui restent stables.

**1.2. Approche statistique des ondes non linéaires.** Pour une variété Riemannienne compacte  $\mathbf{M}$ , il s'agira ici de développer un point de vue macroscopique et de substituer à l'étude des trajectoires individuelles, celle du transport de distributions de probabilité sur  $H^\sigma(\mathbf{M})$  par les flots non linéaires. Les mesures pertinentes dans ce contexte sont des mesures à densité par rapport à des mesures gaussiennes  $\mu_s$ , qui sont naturellement associées à des fonctionnelles d'énergie  $\mathcal{E}(u)$  souvent de la forme

$$\mathcal{E}(u) = \|u\|_{H^s}^2 + \int_{\mathbf{M}} P(u)dx,$$

avec  $s = 1$  pour l'équation (NLS). En effet, à la fonctionnelle  $\mathcal{E}$  est associée une mesure de probabilité  $\rho$  — appelée mesure de Gibbs lorsque  $\mathcal{E}$  est une énergie conservée — qui peut être formellement exprimée comme par

$$d\rho(u) = Z^{-1} \exp(-\mathcal{E}(u))du,$$

où  $Z > 0$  est un facteur de normalisation. Les mesures de Gibbs apparaissent en physique statistique pour décrire la transition de phase vers un condensat de Bose-Einstein [1, 59]. Si  $\mathcal{E}$  est une quantité conservée alors la mesure  $\rho$  est formellement laissée invariante par le flot associé à l'équation. Dans les cas favorables, de telles mesures peuvent être rigoureusement définies sur  $H^\sigma(\mathbf{M})$  pour  $\sigma < s - \frac{d}{2}$  comme mesures à densité par rapport aux mesures gaussiennes  $\mu_s$  : si

$$d\mu_s = Z^{-1} \exp(-\|u\|_{H^s}^2)du,$$

alors

$$d\rho(u) = \exp\left(-\int_{\mathbf{M}} P(u(x))dx\right)d\mu_s(u).$$

Dans le cadre euclidien où  $\mathbf{M} = \mathbb{T}^d$ , en exprimant  $u$  et sa norme  $H^s(\mathbb{T}^d)$  par les coefficients de Fourier de  $u$ ,  $\mu_s$  peut être interprétée comme le produit de mesures gaussiennes centrées complexes sur chaque mode de Fourier, avec une variance  $\langle n \rangle^{-s}$ . Ainsi,  $\mu_s$  est la mesure image de la série de Fourier aléatoire

$$\omega \mapsto \phi^\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{g_n(\omega)}{\langle n \rangle^s} e^{inx}, \quad (1.1)$$

où  $(g_n)$  sont des variables gaussiennes complexes normalisées et indépendantes sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . La série (1.1) converge dans

$$L^2(\Omega, H^\sigma(\mathbb{T}^d)),$$

pour tout  $\sigma < s - \frac{d}{2}$ . Il s'agira alors d'étudier l'évolution de ces mesures par les flots non linéaires.

**Transport de mesures gaussiennes par des flots non linéaires.** Soit  $T$  une transformation et  $\mu$  une mesure de probabilité. On note

$$T_{\#}(\mu) = \mu \circ T^{-1}$$

le transport de la mesure  $\mu$  par  $T$ . Pour un certain  $s$ , suffisamment grand pour que le flot  $\Phi_t$  soit bien défini sur le support de la mesure gaussienne  $\mu_s$  (1.1), à la régularité  $H^{s-\frac{d}{2}-\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ , nous nous intéressons à  $(\Phi_t)_{\#}(\mu_s)$ , le transport de  $\mu_s$  par le flot au temps  $t$ . Pour l'équation linéaire, les solutions sont écrites explicitement en séries de Fourier

$$u(t) = S(t)u_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{g_n(\omega)}{\langle n \rangle^s} e^{-it|n|^2} e^{inx},$$

et on peut voir grâce à l'invariance des variables aléatoires gaussiennes complexes sous l'action des rotations que  $\mu_s$  est toujours invariante :

$$S(t)_{\#}(\mu_s) = \mu_s.$$

Cette propriété macroscopique d'invariance des mesures gaussiennes est remarquable car les solutions libres de l'équation de Schrödinger sont des sommes de Gauss qui peuvent avoir des comportements compliqués selon les propriétés arithmétiques de  $t$ .

**Approche historique.** L'utilisation du hasard en analyse harmonique remonte au début des années 1930, lorsque Paley et Zygmund ont observé dans une série d'articles [62] qu'une fonction *typique* dans de carré sommable bénéficie de meilleures estimations dans les espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbb{T})$ , qui mesurent la concentration d'une fonction données, que ce que la théorie générale pourrait prédire. Plus précisément, considérons une série trigonométrique de carré sommable

$$\sum_n c_n e^{inx}, \quad \text{où} \quad \sum_n |c_n|^2 < \infty,$$

qui n'appartient pas à  $L^p(\mathbb{T})$  pour  $p > 2$ . Cependant, Paley et Zygmund ont observé qu'il suffit de changer aléatoirement le signe de chaque coefficient, indépendamment, pour que la fonction appartienne à  $L^p(\mathbb{T})$ . C'est ainsi que l'histoire des *séries de Fourier aléatoires* a commencé. En mathématiques modernes, le résultat dans [62] s'énonce comme suit.

**Théorème 1.1** (Paley-Zygmund). *Étant donné une séquence de nombres complexes  $(c_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$  et une famille de variables aléatoires de Bernoulli  $(b_n(\omega))$  indépendantes de moyenne nulle, la série aléatoire définie par*

$$u^\omega(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(\omega) c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{T},$$

*appartient presque sûrement à  $L^p(\mathbb{T})$  pour tout  $p \in [2, \infty)$ .*

Cette observation a initié une série de contributions majeures en analyse harmonique, et nous renvoyons au livre [52] pour une vue d'ensemble du sujet. La preuve moderne du théorème 1.1 est brève et repose sur une estimation standard de grande déviation quantitative. Néanmoins, cette preuve illustre les arguments probabilistes utilisés dans ce manuscrit. Nous encourageons les lecteurs intéressés à consulter la note [17] pour une discussion précise du théorème de Paley-Zygmund et de ses applications dans le contexte des équations aux dérivées partielles dispersives. Bien sûr, le résultat est valide pour des variables aléatoires plus générales. Nous soulignons qu'une difficulté majeure à cette époque était de donner un sens à une famille infinie de variables de Bernoulli indépendantes. Les premières réalisations explicites de familles infinies de variables de Bernoulli indépendantes sont dues à Rademacher [63] et Kolmogorov [54] avec une décomposition dyadique d'un nombre sur la ligne.

La raison historique de l'intérêt pour les équations dispersives en présence de hasard et de faible régularité provient de la mécanique statistique. Dans l'étude de systèmes microscopiques contenant un

grand nombre de particules à l'équilibre, les observables macroscopiques sont obtenues en intégrant contre la distribution de probabilité de Gibbs. Dans leurs travaux [57, 58], Lebowitz, Rose et Speer ont établi l'existence de la mesure de Gibbs pour certains systèmes hamiltoniens gouvernés par l'équation de Schrödinger non linéaire de focalisation et le système de Zakharov. Étant donné un nombre fini de particules  $N$  dans un volume fini  $\Omega$ , la mesure de probabilité de Gibbs sur un ensemble d'états microscopiques est écrite

$$\mu(du_N) = Z_N^{-1} \exp(-\beta \mathcal{E}(u_N)) du_N,$$

où  $\mathcal{E}$  est l'hamiltonien du système,  $\beta$  est la température inverse et  $Z_N$  est un facteur de normalisation. Pour comprendre les ondes de Langmuir et la turbulence de plasma, ils ont considéré le cas de focalisation, de sorte que l'hamiltonien n'est pas borné par en dessous. Ils ont surmonté cette difficulté en utilisant une coupure de masse, qui est interprétée comme un système avec un nombre fini de particules, sans prendre la limite hydrodynamique lorsque  $N$  tend vers l'infini. La mesure de Gibbs est absolument continue par rapport à une mesure gaussienne, et la réalisation d'une mesure de Gibbs consiste en des chemins de Wiener irréguliers. En effet, les mesures gaussiennes sont de type

$$(\omega, x) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{g_n(\omega)}{\langle n \rangle^{\frac{1}{2}}} e^{inx} \in L^2(\Omega; H^{1-\frac{d}{2}}(\mathbb{T}^d)).$$

Par conséquent, l'existence d'une dynamique à l'équilibre bien définie sur le support de la mesure de Gibbs constituait un véritable challenge. Par exemple, dans le cas de l'équation de Schrödinger cubique en dimension  $d = 2$ , la mesure de Gibbs est supportée dans  $H^{0-\epsilon}$ , mais le seuil déterministe pour la théorie de Cauchy est  $s_c = 0$ .

**La naissance de la théorie de Cauchy probabiliste.** La construction de mesures invariantes est devenue un problème classique depuis les années 1990. À la suite des premiers travaux de Lebowitz, Rose et Speer [57, 58], Frilander [48] et Zhidkov [74] ont prouvé l'invariance de la mesure de Gibbs pour l'équation des ondes non linéaire unidimensionnelle, suivis par Bourgain [9], qui a prouvé l'invariance de la mesure de Gibbs pour l'équation de Schrödinger non linéaire cubique sur  $\mathbb{T}$ .

Passons maintenant au cas bidimensionnel qui, strictement parlant, a été la naissance de la théorie de Cauchy probabiliste. Dans un autre travail célèbre [10], Bourgain a obtenu à la fois l'existence globale pour les données dans l'ensemble statistique, et la propriété d'invariance de la mesure de Gibbs pour l'équation de Schrödinger cubique à commande de Wick<sup>1</sup> à deux dimensions :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u =: |u|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2, \\ u(0) = u_0^\omega. \end{cases}$$

La donnée initiale s'écrit sous la forme d'une série de Fourier aléatoire

$$u_0^\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{g_n(\omega)}{n} e^{inx},$$

où  $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}^2}$  est une séquence de variables gaussiennes normalisées et indépendantes avec des valeurs complexes. Contrairement au cas unidimensionnel, le support de la mesure de Gibbs se situe à des régularités surcritiques  $H^{0-}(\mathbb{T}^2)$ , l'exposant d'échelle critique étant  $s_c = 0$ . Pour surmonter cette difficulté, Bourgain a cherché la solution sous la somme d'une évolution linéaire approximative et d'un reste non linéaire plus lisse

$$u = e^{it\Delta} u_0^\omega + v, \tag{1.2}$$

En particulier, le terme de Duhamel non linéaire  $v$  s'avère être régulier à  $H^{\frac{1}{2}-}(\mathbb{T}^2)$ . Bourgain a effectué un argument de point fixe pour  $v$  à la régularité  $H^\epsilon$ , pour un certain  $\epsilon > 0$ .

<sup>1</sup>Pour le cas cubique, la commande de Wick se lit :  $|u|^2 u := |u|^2 u - 2\|u\|_{L^2}^2 u$ . Nous utilisons une transformation de jauge et la conservation de la masse  $L^2$  pour passer de la non linéarité cubique à la non linéarité de commande de Wick. Voir, par exemple, [61] pour des discussions sur la renormalisation de commande de Wick dans le contexte des équations dispersives.

Pour appliquer l'argument de point fixe, Bourgain a d'abord observé un gain de  $\frac{1}{2}$  dérivées dans la deuxième itération de Picard. Ensuite, il a exploité des annulations multilinéaires pour analyser les interactions entre  $e^{it\Delta} u_0^\omega$  et  $v^2$ , en développant un argument probabiliste dit “ $TT^*$ ” qui exploite des idées de théorie des matrices aléatoires. Dans cette approche,  $v$  est traité de manière déterministe, car on n'exploite aucune structure aléatoire particulière du reste. La *décomposition linéaire-non linéaire* (2.4) dans le contexte de données initiales aléatoires est également appelée la méthode Da Prato-Debussche [36], qui a utilisé avec succès une stratégie similaire dans le contexte de la mécanique des fluides. Par la suite, Burq et Tzvetkov [24, 25] ont étendu la stratégie de Bourgain aux équations d'ondes non linéaires dans le cas d'une variété riemannienne compacte générale  $(\mathbf{M}, g)$  sans bords. De cette manière, ils ont fourni un cadre général qui a rendu possible des développements ultérieurs de la théorie.

Avant de présenter les contributions de ma thèse, écrivons une version informelle d'un résultat de résolution probabiliste du problème de Cauchy pour (NLS), qui s'énonce comme suit.

**Theorème 1.2** (Problème de Cauchy probabiliste). *Soit  $s_d$  un exposant déterministe tel que l'équation n'est pas uniformément bien posée lorsque  $s < s_d$ . Il existe  $s_0$  tel que pour tout  $s_0 < s < s_d$ , il existe une mesure de probabilité  $\mu$  supportée dans  $H^s$  et un ensemble de mesure pleine  $\Sigma$ , tel que pour tout  $u_0 \in \Sigma$ , la suite des solutions régularisées  $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$  associées aux données initiales  $(u_0 * \rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ , converge vers un objet limite dans  $C([-T, T], H^s)$  qui est solution de (NLS) jusqu'au temps  $T = T(u_0) > 0$ .*

## 2. INSTABILITÉS DANS LES RÉGIMES SUR-CRITIQUES

Pour simplifier la présentation nous considérons l'équation de Schrödinger cubique posée sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \mu |u|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d. \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (\text{NLS})$$

Le paramètre réel  $\mu$  dicte la nature de l'interaction non linéaire, qui sera attractive lorsque  $\mu < 0$  et répulsive sinon.

Dans l'étude de la théorie de Cauchy pour les équations dispersives, on rencontre généralement un seuil de régularité critique qui détermine si le problème de Cauchy est bien posé ou non. Cette régularité est quantifiée par les normes de Sobolev  $H^s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , qui mesurent comment les fréquences qui composent une fonction sont distribuées — la fonction est d'autant plus régulière qu'elle est dans  $H^s$  avec un  $s$  qui est grand.

Étant donné un instant  $T > 0$  et une donnée initiale  $u_0$  dans  $H^s$ , rappelons qu'une courbe continue  $u : t \in [-T, T] \mapsto u(t) \in H^s$  est une solution au problème de Cauchy dans  $H^s$  pour l'équation (NLS) avec la condition initiale  $u_0$  lorsqu'elle satisfait la formule de représentation intégrale de Duhamel

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 - i\mu \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} |u(\tau)|^2 u(\tau) d\tau, \quad t \in [-T, T]. \quad (2.1)$$

Lorsque l'on sait montrer que le problème de Cauchy est bien posé pour des données initiales régulières, disons dans  $H^\alpha$  pour un certain  $\alpha$  suffisamment grand, il est alors possible de définir un *flot* sur  $H^\alpha$  via l'application

$$\Phi : u_0 \in H^\alpha \mapsto \Phi(u_0) \in C([-T, T]; H^\alpha).$$

Pour un espace  $H^s$  avec  $s < \alpha$ , qui autorise les données initiales à être plus irrégulières, le problème de Cauchy est bien posé lorsque le flot se prolonge continument de  $H^\alpha$  vers  $H^s$ . Cette définition est motivée par la persistance de la régularité du flot, qui permet de voir les solutions dans  $H^s$ , si elles existent, comme une limite de solutions régularisées qui sont dans l'espace  $H^\alpha$ .

À des régularités sur-critiques — c'est à dire dans  $H^s$  pour  $s < s_c$ <sup>2</sup> — la discontinuité du flot a été mise en évidence dans des travaux de Lebeau [55, 56], de Christ, Colliander et Tao [31] puis de Xia

<sup>2</sup> L'exposant de Sobolev critique  $s_c$  est tel que la norme de Sobolev homogène  $\dot{H}^{s_c}$  est laissée invariante par la symétrie par changement d'échelle de l'équation.

Bo [72] qui ont décrit un mécanisme d'inflation des normes au voisinage de chaque donnée initiale : pour tout  $u_0 \in H^s$ , il existe une suite  $(\psi_n)_n$  de fonctions  $C^\infty$  à supports compacts qui est telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n - u_0\|_{H^s} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty, T \rightarrow 0} \|\Phi_t(\psi_n)\|_{L^\infty([0, T]; H^s)} = +\infty,$$

où  $\Phi_t(\psi_n)$  est la solution lisse associée à  $\psi_n$  à l'instant  $t$ . Pour mettre en évidence un tel mécanisme d'inflation des normes, la stratégie générale est d'effectuer une *analyse de petite dispersion* qui reflète le fait que les oscillations non linéaires dominent la dispersion. Le phénomène de croissance de la norme  $H^s$  témoigne alors d'une cascade d'énergie des basses fréquences vers les hautes fréquences.

Mais que se passe-t-il lorsque la procédure de régularisation est choisie convenablement, par exemple à partir de la convolution avec un approximation de l'identité ? Pour une donnée initiale  $u_0$  dans  $H^s$ , une fonction test  $\rho$  et un entier  $n$ , on note la donnée initiale régularisée à l'échelle  $n^{-1}$

$$\varphi_n = u_0 * \rho_n, \quad \rho_n(x) := n^d \rho(nx). \quad (2.2)$$

Peut-on alors décrire la classe des données initiales  $u_0$  telles que la suite des solutions régulières approchées  $(\Phi(\varphi_n))_n$  converge dans  $H^s$  vers un objet limite qui vérifie l'équation (2.1) ? Avec Louise Gassot, nous apportons des réponses à cette question pour l'équation (NLS) dans l'article [28] que je présente dans les deux paragraphes qui suivent.

**2.1. Solutions fortes issues d'un ensemble statistique de données initiales.** A la suite des contributions pionnières de Bourgain [9, 10] pour l'équation de Schrödinger sur le tore et des travaux de Burq, Tzvetkov [24, 25] pour l'équations des ondes sur des variétés compactes sans bords, de nombreux auteurs ont adopté une approche statistique pour étudier le problème de Cauchy en régularité sur-critique. Une telle approche est motivée par l'étude des mesures de Gibbs [10], et a été largement développée dans d'autres contextes depuis. On renvoie à [8, 24] pour une introduction à la théorie de Cauchy dite probabiliste. Il s'agit d'étudier le problème de Cauchy pour des données initiales distribuées selon une mesure de probabilité sur  $H^s$ , généralement donnée par la mesure image  $\mu_s$  d'une variable aléatoire gaussienne

$$\omega \mapsto \phi^\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g_n(\omega) \phi_n, \quad (2.3)$$

où  $(\phi_n)$  est une décomposition d'une fonction donnée dans  $H^s$  — par exemple en séries de Fourier dans le cas périodique — et  $(g_n)$  est une suite de variables indépendantes gaussiennes centrées à valeurs complexes, sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Afin de résoudre un tel problème de Cauchy, dans un régime où l'équation est mal posée, l'idée de Bourgain [9] — aussi appelée astuce de Da Prato et Debussche [36] — a été de construire la solution dans le régime instable sous la forme

$$u(t) = e^{it\Delta} \phi^\omega + w(t), \quad (2.4)$$

où  $e^{it\Delta} \phi^\omega$  est l'évolution linéaire de la donnée initiale aléatoire et  $w$  est un terme résiduel plus régulier qui satisfait une équation de Schrödinger dans un régime sous-critique, avec donnée initiale nulle mais avec des termes de source stochastiques qui viennent de la donnée initiale :

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta)w = \mu |w + e^{it\Delta} \phi^\omega|^2 (w + e^{it\Delta} \phi^\omega), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ w(0) = 0, \end{cases} \quad (\text{NLS}_\phi)$$

Dans le cadre non périodique  $\mathbb{R}^d$ , la mesure gaussienne (2.3) sur  $H^s(\mathbb{R}^d)$  est construite à partir d'une décomposition de l'espace des fréquences dite de Wiener : une fonction  $\phi$  de  $H^s(\mathbb{R}^d)$  se décompose dans  $H^s(\mathbb{R}^d)$  comme

$$\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \phi_n, \quad \phi_n := Q_n \phi,$$

où  $Q_n \phi$  est un multiplicateur de Fourier sur le cube unitaire centré autour de  $n \in \mathbb{Z}^d$ . Pour des régularités sur-critiques  $H^s(\mathbb{R}^d)$  avec  $s_0 < s < s_c$ , Bényi, Oh et Pocovnicu [7] ont résolu le problème de



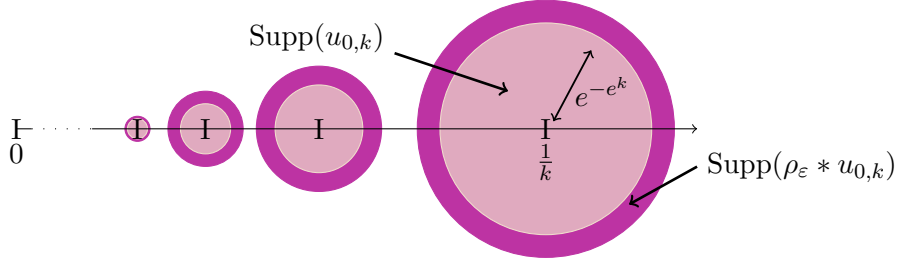


FIGURE 2. Construction des bulles explosives, qui constituent l'ensemble pathologique.

Cauchy local pour (NLS)  $\mu_s$ -presque sûrement, c'est à dire pour des données initiales dans un ensemble statistique  $\Sigma$  qui est dense<sup>3</sup> dans  $H^s(\mathbb{R}^d)$  et de mesure pleine :

$$\mu_s(\Sigma) = 1.$$

De plus les fonctions  $\phi^\omega$  ne sont presque-sûrement pas plus régulières que  $\phi$ .

Avec Louise Gassot, nous précisons dans une partie de notre article [28] la théorie de Cauchy locale établie par Bényi, Oh et Pocovnicu dans [6] en montrant que les solutions probabilistes sont limites dans  $C([-T, T]; H^s)$  des solutions régularisées au sens de (2.2).

**2.2. Ensembles de données initiales pathologiques pour NLS.** Le résultat principal de notre article [28] est la description de l'ensemble pathologique  $\mathcal{P}$  pour les équations de type Schrödinger, qui correspond aux données initiales pour lesquelles l'inflation des normes a lieu même pour la procédure naturelle de régularisation (2.2) :

$$\mathcal{P} = \left\{ u_0 \in H^s : \limsup_{T \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \|\Phi_t(u_0 * \rho_n)\|_{L^\infty([0, T]; H^s)} = +\infty \right\}.$$

Cet ensemble est par construction dans le complémentaire de l'ensemble statistique  $\Sigma$ . Nous démontrons que  $\mathcal{P}$  contient un sous-ensemble qui est  $G_\delta$ -dense, ce qui implique qu'il existe deux type de généricité dans les régimes sur-critiques pour (NLS) : d'une part des données initiales statistiques, qui donnent lieu à des solutions fortes et qui sont génériques au sens de la mesure  $\mu_s$  et d'autre part des données initiales pathologiques, qui sont génériques au sens de la topologie.

Un tel résultat avait été démontré pour l'équation des ondes par Sun et Tzvetkov [68] mais leur démonstration reposait fortement sur le principe de propagation à vitesse finie, qui est spécifique à cette équation. Notre preuve pour les équations de type Schrödinger utilise la même construction que [68] qui consiste à mettre côte à côte une infinité de profils concentrés à des échelles arbitrairement petites. Pour chaque échelle  $n^{-1}$  d'espace, il s'agit d'isoler un profil pour lequel il y a inflation de la norme  $H^s$  à partir d'un instant  $t_n$ , qui est tel que  $t_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Sun et Tzvetkov utilisent ensuite le principe de propagation à vitesse finie pour s'assurer que les différents profils n'interagissent pas. Dans le cas des équations de type Schrödinger, on exploite plutôt l'effet de la convolution sur les profils trop concentrés. Plus précisément, on observe qu'à une échelle de régularisation donnée  $n^{-1}$ , la convolution par  $\rho_n$  casse les profils qui sont concentrés à des échelles inférieures à  $n^{-1}$ . Cette observation indique que le phénomène ne repose pas sur le principe de propagation à vitesse finie, et la même approche s'étend par conséquent à de nombreuses autres équations non linéaires dispersives. Signalons par ailleurs que la construction de l'ensemble pathologique est locale en espace. Le résultat s'étend donc sur d'autres domaines que  $\mathbb{R}^d$  qui peuvent être compacts ou non.

<sup>3</sup>La mesure  $\mu_s$  dépend du choix de la fonction  $\phi$  à partir de laquelle la mesure (2.3) est définie, et la densité dans  $H^s$  du support de la mesure est vraie pour les fonctions  $\phi$  dont aucun bloc de Wiener  $\phi_n$  n'est identiquement nul.

### 3. DYNAMIQUES EN TEMPS LONG POUR DES DONNÉES INITIALES ALÉATOIRES

Une partie de mes recherches est dédiée à l'étude du comportement en temps long de solutions associées à des données initiales aléatoires pour (NLS) sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ , dans des régimes sur-critiques où le problème de Cauchy est mal posé et où l'énergie est infinie. Rappelons que pour des exposants sur-critiques  $s < s_c$  (au-dessus d'un certain seuil  $s_0$ ) il est possible de construire un ensemble statistique  $\Sigma$  de  $H^s(\mathbb{R}^d)$ , introduit dans la partie 2.1, tel que pour toute donnée initiale  $\phi^\omega$  dans  $\Sigma$  il existe une unique solution locale à (NLS) de la forme

$$u(t) = e^{it\Delta} \phi^\omega + w(t),$$

où  $w(t)$  est un terme résiduel qui satisfait (NLS) $_\phi$ , dans un régime critique ou sous-critique  $H^\alpha(\mathbb{R}^d)$  pour un certain  $\alpha \geq s_c$ .

Est-il alors possible d'étendre globalement en temps la solution probabiliste  $u$ , et de décrire sa dynamique ? Pour répondre à cette question il faut comprendre le comportement du terme résiduel non linéaire  $w$  — plus régulier — à l'aide de méthodes basées sur la considération d'énergies modifiées.<sup>4</sup> Il s'agit alors de combiner l'approche stochastique avec les méthodes déterministes d'analyse des EDP dispersives.

On peut ainsi comprendre la stabilité de certaines dynamiques — diffusion non linéaire, résolution en solitons, croissance des normes de Sobolev — sous l'effet de perturbations aléatoires très irrégulières, qui modélisent par exemple des fluctuations microscopiques. Cette approche permet également d'exhiber des ensembles de mesure pleine de données initiales pour lesquelles ces mécanismes ont lieu, dans des régimes où l'on sait que le problème de Cauchy n'est pas bien posé. Les résultats qui constituent les deux paragraphes suivants illustrent ces démarches.

#### 3.1. Approche probabiliste de la conjecture de diffusion non linéaire pour NLS dans $\mathbb{R}^3$ .

Lorsqu'une donnée initiale évolue par une équation de Schrödinger non linéaire dont la non linéarité est défocalisante — répulsive — alors sa dynamique en temps long est parfois approchée par l'évolution linéaire d'une autre donnée initiale : pour tout  $u_0$  dans  $H^s(\mathbb{R}^d)$  il existe  $u_\pm$  dans  $H^s(\mathbb{R}^d)$  tel que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - e^{it\Delta} u_\pm\|_{H^s} = 0,$$

où  $u$  est la solution associée à la donnée initiale  $u_0$ . Pour les équations de Schrödinger non linéaires ce phénomène de *diffusion non linéaire* est bien compris dans l'espace d'énergie  $H^1(\mathbb{R}^d)$ , lorsque ce dernier est critique ou sur-critique — c'est à dire que  $s_c \leq 1$ .

Dans l'article [27] j'ai considéré l'équation (NLS) avec une non linéarité cubique défocalisante posée sur  $\mathbb{R}^3$ . L'exposant critique est  $s_c = \frac{1}{2}$ , et le problème de Cauchy est localement bien posé dans  $H^s(\mathbb{R}^3)$  dès lors que  $\frac{1}{2} \leq s$ . Des arguments généraux — coercivité de l'énergie conservée et estimées dispersives de Strichartz — permettent d'affirmer que la solution est globale dans  $H^s(\mathbb{R}^3)$  lorsque  $1 \leq s$ , et qu'il y a diffusion non linéaire lorsqu'il existe un  $p \in (\frac{3}{10}, 10)$  qui est tel que

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} |u(t, x)|^p dx dt < \infty.$$

Une telle estimation a priori peut être démontrée en combinant les lois de conservations avec des inégalités de flux de type Morawetz :

$$\iint_{I \times \mathbb{R}^3} |u(t, x)|^4 dt dx \leq C \sup_{t \in I} \|u(t)\|_{L_x^2}^2 \|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2.$$

<sup>4</sup>Dans le cas de domaines compacts, et lorsque la mesure de probabilité est invariante par le flot non linéaire associé à NLS, un argument général et probabiliste dû à Bourgain [9] permet de substituer la mesure invariante à l'énergie conservée, et de déduire l'existence globale des solutions associées à des données initiales distribuées selon cette mesure, ainsi que des propriétés dynamiques d'ergodicité en temps long. L'idée est que la présence d'une mesure invariante permet de transporter une information de nature probabiliste par le flot non linéaire, qui est nécessaire à la résolution du problème de Cauchy local.

On montre alors que les solutions qui ont une énergie finie — c’est à dire dans  $H^s$  avec  $1 \leq s$  — sont globales, et qu’il y a diffusion non linéaire. Que se passe-t-il pour les solutions locales moins régulières qui ont une énergie infinie, dans le régime où  $\frac{1}{2} < s < 1$  ? Malheureusement, cette question simple reste un problème ouvert difficile qui est encore loin d’être résolu en toute généralité. Des résultats partiels ont été obtenus via des méthodes d’énergie modifiée telle que la *I-method* [32] et des raffinements dûs à Dodson. Ces méthodes permettent de démontrer la conjecture dans le cas radial [44] et dans le cas général lorsque  $\frac{2}{3} < s$  [42, 66].

J’ai proposé dans [27] une résolution probabiliste de cette conjecture, sur des ensembles statistiques de données initiales distribuées selon la procédure de Wiener (2.3) jusqu’à des régimes  $H^s(\mathbb{R}^3)$  qui peuvent être sur-critiques, avec  $\frac{3}{7} < s \leq \frac{1}{2}$ . Ces régimes sont hors de portée de résultats déterministes puisqu’il y a inflation des normes pour des données initiales dans l’ensemble pathologique.

Ce théorème, que nous énonçons ci-dessous, constitue le premier résultat probabiliste de la sorte pour une équation dite énergie inter-critique — où l’exposant critique est inférieur à l’exposant d’énergie — pour des données initiales aléatoires qui ne sont pas petites. Il a été démontré au même moment par Shen, Soffer et Wu [64] avec une méthode différente.

**Théorème 3.1** (Diffusion presque-sûre pour NLS dans  $\mathbb{R}^3$  [27] et [64]). *Pour  $\frac{3}{7} < s$  on fixe  $\phi \in H^s(\mathbb{R}^3)$  une fonction radiale et nous notons  $\omega \mapsto \phi^\omega$  la randomisation de Wiener (2.3) qui lui est associée. Pour toute donnée initiale dans l’ensemble statistique  $\Sigma$  de  $H^s(\mathbb{R}^3)$  — qui est dense et de mesure  $\mu_s$  pleine — la solution locale probabiliste existe globalement en temps, et il y a diffusion non linéaire dans un l’espace plus régulier  $H^{2s-}(\mathbb{R}^3)$  : il existe  $w_\pm \in H^{2s-}(\mathbb{R}^3)$  tels que*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - e^{it\Delta}(\phi^\omega + w_\pm)\|_{H^{2s-}} = 0.$$

Voici quelques commentaires sur le résultat et sur les principales difficultés.

- L’observation clé est que le terme résiduel non linéaire  $w$  qui satisfait l’équation recentrée autour de l’évolution linéaire (NLS $_\phi$ ) est dans  $H^{2s-}(\mathbb{R}^3)$ . Lorsque  $s < \frac{1}{2}$  est proche de  $\frac{1}{2}$ ,  $2s-$  est supérieur à  $\frac{2}{3}$  de sorte que le terme résiduel est suffisamment proche de l’espace d’énergie  $H^1(\mathbb{R}^3)$  pour que la conjecture déterministe soit connue à cette régularité. En développant une théorie de la stabilité dans  $H^{2s-}(\mathbb{R}^3)$  pour (NLS), on montre que le Théorème 3.1 se déduit d’un contrôle uniforme en temps de la norme  $H^{2s-}(\mathbb{R}^3)$  de  $w$ .
- Le défi — mais aussi la motivation — est alors de combiner la méthode probabiliste avec des raffinements de la *I-method* pour démontrer ce contrôle a priori. La difficulté réside dans le fait que les termes de forçage stochastiques qui apparaissent dans l’équation (NLS $_\phi$ ) brisent la structure de la non linéarité. Par conséquent, des termes supplémentaires et irréguliers apparaissent dans les estimées d’énergie modifiée.
- Pour surmonter manque de régularité des termes stochastiques qui rend délicate l’utilisation de méthodes d’énergie, il faut exploiter un effet régularisant supplémentaire qui vient de l’estimée de *décroissance locale de l’énergie* [35], aussi appelé *effet régularisant local*. Pour pouvoir exploiter cet effet régularisant il faut des hypothèses de décroissance, qui peuvent découler d’injections de Sobolev radiales. Pour des équations énergie-critique dans  $\mathbb{R}^4$  et en dehors du cas radial, Dodson, Lührmann et Mendelson [45, 46] ont proposé l’astuce suivante qui consiste à supposer que  $\phi$  est radiale, mais à briser cette symétrie par la procédure de Wiener (2.3). En effet, les données initiales aléatoires  $\phi^\omega$  ainsi générées ne sont pas radiales bien qu’elles soient construites à partir d’une fonction radiale  $\phi$ .
- Il s’agit alors d’exploiter une estimée fine qui combine des estimées stochastiques, de l’analyse harmonique et l’effet de régularisation local. Dans le cas de  $\mathbb{R}^3$  les effets régularisants sont plus faibles que dans les dimensions supérieures traitées jusqu’alors. Pour démontrer le Théorème 3.1 il a m’a fallu développer un argument qui combine cet effet régularisant avec la *I-method* et des estimées de Morawetz probabilistes.

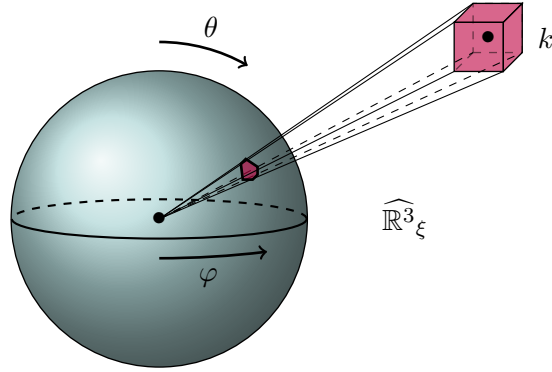


FIGURE 3. Projection d'un cube de Wiener sur la sphère unité. En découplant aléatoirement les composantes d'une fonction radiale sur de tels cubes, on génère de nombreuses données initiales aléatoires qui encapsulent des effets régularisants.

**3.2. Stabilité asymptotique de petits états fondamentaux.** Jusqu'à très récemment la théorie de Cauchy probabiliste telle que mentionnée dans les paragraphes précédents avait été développée pour traiter des régimes à petites données, ou pour des interactions défocalisantes dans le but de démontrer des résultats de diffusion non linéaires. Dans le cas focalisant — attractif — où les équations dispersives présentent des dynamiques très riches, l'effet de perturbations aléatoires est bien moins compris. Le premier pas dans cette direction est dû à Kenig et Mendelson [53] qui ont récemment démontré un résultat de résolution en solitons probabiliste pour l'équation d'ondes énergie critique dans  $\mathbb{R}^4$ .

J'ai obtenu un résultat dans cette direction pour l'équation (NLS) dans  $\mathbb{R}^3$ , en démontrant la stabilité asymptotique presque-sûre des petites solutions stationnaires générées par un potentiel externe régulier et de courte portée  $V$ , que l'on suppose appartenir à la classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  :

$$(i\partial_t + \Delta)u(t, x) = \left( \underbrace{V(x)}_{\text{potentiel externe}} + \underbrace{\mu|u(t, x)|^2}_{\text{perturbation non linéaire}} \right) u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3. \quad (\text{NLS}_V)$$

Sous l'hypothèse que l'opérateur de Schrödinger  $-\Delta + V$  a une valeur propre simple négative, l'équation (NLS<sub>V</sub>) admet au voisinage de zéro une famille à un paramètre complexe de petites solutions stationnaires de la forme

$$z \in \mathbb{C} \mapsto u_z(t, x) = Q_z(x) e^{itE_z}$$

où pour  $z$  proche de zéro  $Q_z$  est un état fondamental solution de l'équation

$$\left( -\Delta + V(x) + Q_z(x)^2 \right) Q_z(x) = E_z Q_z(x).$$

Cette courbe d'objets elliptiques est construite par le théorème des fonctions implicites, et s'interprète comme la bifurcation non linéaire de la droite propre associée à la valeur propre négative de  $-\Delta + V$ . Ce modèle a d'abord été étudié par Soffer et Weinstein [65], qui démontrent la stabilité asymptotique par des petites perturbations dans l'espace d'énergie  $H^1(\mathbb{R}^3)$ , sous des hypothèses de décroissance. Gustafson, Nakanishi et Tsai ont ensuite prouvé dans [51] que la *stabilité asymptotique* a lieu sans aucune hypothèse de décroissance : pour toute donnée initiale  $u_0$  dans  $H^1(\mathbb{R}^3)$ , la solution locale à (NLS<sub>V</sub>) est globale il existe  $z$  dans  $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  tel qu'à chaque instant la solution se décompose comme la superposition d'une solution stationnaire localisée modulée par  $z(t)$  et d'une partie dispersive  $\eta$  dans  $C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^3))$  :

$$u(t, x) = Q(z(t), x) + \eta(t, x).$$

En temps long, les états fondamentaux sont *asymptotiquement stables* dans le sens où il existe  $z_{\pm} \in \mathbb{C}$  et des états finaux  $\eta_{\pm} \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  tels que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z(t) \exp\left(-i \int_0^t E(z(\tau)) d\tau\right) = z_{\pm}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\eta(t) - e^{it(-\Delta+V)} \eta_{\pm}\|_{H^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Rappelons que l'équation  $(\text{NLS}_V)$  est localement bien posée dans  $H^s(\mathbb{R}^3)$  lorsque  $s \geq \frac{1}{2}$ , et presque sûrement bien posée [6] pour des données initiales distribuées selon la mesure  $\mu_s$  (2.3) lorsque  $\frac{1}{4} < s$ . En effet, l'ajout d'un potentiel externe n'a pas d'influence sur les théories de Cauchy locales déterministe et probabiliste de (NLS). Je démontre dans l'article [26] que les solutions stationnaires restent asymptotiquement stables sous l'effet de perturbations irrégulières et aléatoires dans  $H^s$  avec  $s > \frac{1}{4}$ .

**Theorème 3.2** (Stabilité asymptotique presque-sûre [26]). *Pour toute donnée donnée initiale  $u_0$  suffisamment petite dans l'espace critique  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et toute perturbation  $\phi^{\omega}$  dans un ensemble statistique  $\Sigma$  qui est dense et de mesure pleine dans  $H^s(\mathbb{R}^3)$  pour  $s > \frac{1}{4}$ , la solution probabiliste locale associée à la donnée initiale*

$$u(0) = u_0 + \phi^{\omega}, \quad u_0 \in H^{\frac{1}{2}}, \quad \phi^{\omega} \in H^s,$$

qui se décompose comme

$$u(t, x) = e^{-it(\Delta-V)} \phi^{\omega} + w(t), \quad w(t) \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3),$$

est globale. En temps long, les solutions stationnaires sont asymptotiquement stables.

Donnons quelques commentaires sur le résultat.

- Lorsque  $\phi^{\omega} = 0$ , le théorème 3.2 étend le résultat déterministe dans l'espace d'énergie de [51] jusqu'à la régularité critique  $s = \frac{1}{2}$ .
- Ce théorème de résolution en solitons probabiliste a été inspiré par la contribution de Kenig et Mendelson [53] dans le cas d'une équation d'ondes. Pour des équation de Schrödinger des difficultés sérieuses apparaissent. Contrairement à l'équation des ondes, le terme intégral de Duhamel ne présente aucun gain de dérivée immédiat, et l'opérateur linéarisé autour des états fondamentaux n'est pas auto-adjoint. La prise en compte de petits états fondamentaux générés par un potentiel externe semble être un premier pas raisonnable vers un résultat sans potentiel externe et pour des grandes données, par exemple pour des solitons de (NLS) sur la droite  $\mathbb{R}$ .
- Pour établir la stabilité asymptotique autour du soliton Kenig et Mendelson [53] ont défini une procédure de Wiener (2.3) à partir d'une *transformée de Fourier distordue*, qui diagonalise l'opérateur de Schrödinger associé à l'équation linéarisée autour du soliton  $-\Delta + V$ . Ils ont alors recentré la solution autour de l'évolution non linéaire inhomogène  $S(t)\phi^{\omega}$

$$(i\partial_t - \Delta + V)S(t)\phi^{\omega} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad u(t) = S(t)\phi^{\omega} + w,$$

$w$  étant le terme résiduel plus régulier. Cette décomposition permet de supprimer le terme linéaire qui vient du potentiel de l'équation linéaire satisfaite par  $w$ , et qui n'est pas régularisant.

- L'utilisation d'estimations bilinéaires devient assez difficile en présence d'un potentiel puisque la transformée de Fourier distordue ne partage pas les propriétés multiplicatives de la transformée de Fourier classique. En suivant une approche semi-classique j'ai établi dans [26] des inégalités bilinéaires pour l'interaction de deux évolutions linéaires inhomogènes dont les fréquences sont localisées dans l'espace de Fourier distordu.
- La seconde contribution de mon travail est d'avoir combiné l'utilisation d'espace fonctionnels critiques avec le principe de décroissance locale de l'énergie, pour la première fois dans le contexte de la théorie de Cauchy probabiliste.

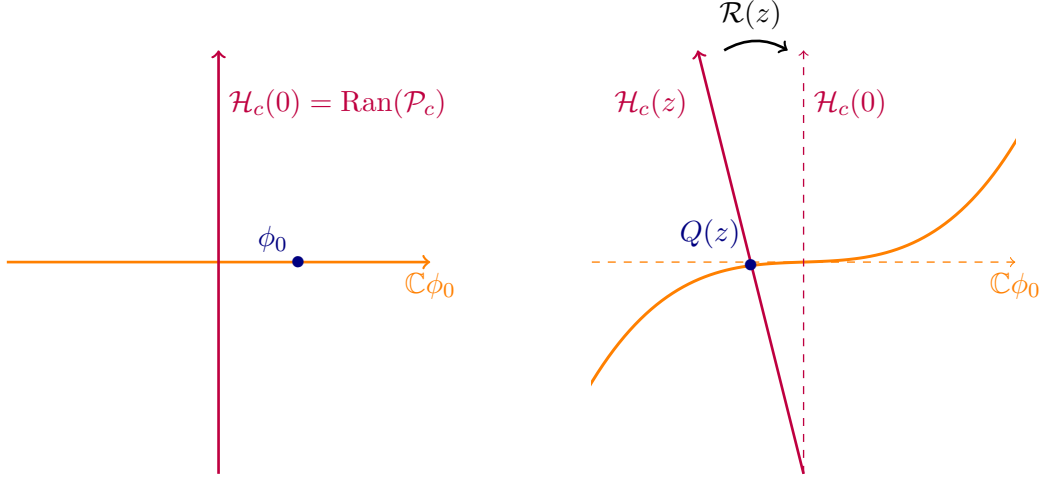


FIGURE 4. À gauche, la droite propre associée à la valeur propre négative de l'opérateur de Schrödinger. À droite, la bifurcation de cette droite propre en une variété stable de petits états fondamentaux pour l'équation non linéaire.

#### 4. VERS UNE THÉORIE DE CAUCHY PROBABILISTE QUASI-LINÉAIRE

Les travaux précédents pour (NLS) sur  $\mathbb{R}^d$  reposent sur des effets régularisants non linéaires qui viennent des oscillations en temps de la partie linéaire dispersive, et des fluctuations aléatoires. Pour de nombreux autres modèles physiques dans lesquels la dispersion est trop faible par rapport aux interactions non linéaires, des instabilités non linéaires peuvent apparaître et limiter le gain possible de régularité des itérations de Picard. Dans le pire des cas, les mauvaises interactions peuvent même exclure tout gain de régularité et compliquent significativement la résolution du problème de Cauchy, même avec des données initiales aléatoires puisqu'on ne peut pas utiliser le schéma semi-linéaire de résolution probabiliste de Bourgain [10]. Récemment, Bringmann a étudié une équation d'onde quasi-linéaire [12] avec des données initiales aléatoires en proposant le premier schéma de résolution probabiliste *quasi-linéaire*. Il s'agit d'un schéma itératif sur la taille des fréquences de la donnée initiale, qui s'inspire du calcul para-contrôlé dans un contexte dispersif. L'idée clé est d'utiliser l'indépendance probabiliste entre les hautes fréquences de la donnée initiale et la solution approchée, qui est construite à partir des basses fréquences de la donnée initiale.

Ce schéma itératif quasi-linéaire a ensuite été développé de manière spectaculaire dans les travaux de Deng, Nahmod et Yue [39, 40] pour établir l'invariance de la mesure de Gibbs associée à l'équation de Schrödinger semi-linéaire sur  $\mathbb{T}^2$  avec une puissance  $p \geq 2$  arbitrairement grande, après avoir effectué une renormalisation de Wick — dénotée par  $:: -$  du terme non linéaire :

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta)u =: |u|^{2p}u : & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2. \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

Dans l'esprit de ces travaux nous avons développé avec Louise Gassot et Slim Ibrahim [29] un schéma itératif quasi-linéaire similaire pour résoudre le problème de Cauchy local associé à des équations faiblement dispersives sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{R}^2$  qui sont de type demi-onde.

##### 4.1. Théorie de Cauchy probabiliste raffinée pour des équations faiblement dispersives.

L'étude des équations d'évolution non linéaires à faible dispersion fait l'objet d'une activité intense du fait de leur apparition dans des modèles physiques, et de la richesse des dynamiques en temps long qui sont observées. En général, il est très difficile de résoudre le problème de Cauchy pour ces équations à faible régularité, la raison étant que dans de tels contextes le manque de dispersion se traduit par une perte de dérivées dans les estimations dispersives. Lorsque l'équation faiblement dispersive n'est ni

complètement intégrable ni semi-linéairement bien posée, il est pertinent de développer une théorie de Cauchy à données aléatoires inspirée des schémas de résolution quasi-linéaires.

On considère dans [29] l'équation de Schrödinger demi-onde : pour  $\mu \in \mathbb{R}$ , et  $(t, x, y) \in \mathbb{R}^{1+2}$ , cette équation s'écrit

$$\begin{cases} i\partial_t u + (\partial_{xx} - \sqrt{-\partial_{yy}^2})u = \mu|u|^2 u, \\ u_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (\text{NLS-HW})$$

Il s'agit là d'un modèle anisotrope, où l'on a une équation de Schrödinger dans la direction  $x$  et une équation de demi-onde dans la direction  $y$ , respectivement. Par conséquent, dans les régimes à basse fréquence dans la direction  $x$  et à haute fréquence dans la direction  $y$ , le transport domine et il n'y a pas de dispersion. La dynamique asymptotique des solutions lisses à cette équation est très riche [73, 2, 3], malgré le fait que la théorie de Cauchy reste mal comprise dans l'espace d'énergie. La régularité est mesurée dans l'échelle des espaces de Sobolev anisotropes

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2) = L_x^2 H_y^s(\mathbb{R}^2) \cap H_x^{2s} L_y^2(\mathbb{R}^2),$$

dont le choix est dicté par la structure hamiltonienne de l'équation et par l'invariance de l'équation par changement d'échelle. En particulier, l'exposant critique associé à cette symétrie est  $s_c = \frac{1}{4}$ . Le problème de Cauchy est bien posé lorsque  $s > \frac{1}{2}$ . Cependant une théorie de Cauchy satisfaisante dans l'espace d'énergie — qui correspond au point limite  $s = \frac{1}{2}$  — et en dessous n'a pas encore été établie. Il existe de sévères obstructions pour établir une théorie de Cauchy dans ces espaces. En outre, nous démontrons que le flot ne peut pas se prolonger de manière  $C^3$  dans  $\mathcal{H}^s$  lorsque  $s < \frac{1}{2}$ , et qu'il y a inflation des normes lorsque  $s < \frac{1}{4}$ . En adaptant le schéma itératif de [12], on démontre que le problème de Cauchy est presque-sûrement bien posé sur  $\mathcal{H}^s$  dans des régimes quasi-linéaires où  $s < \frac{1}{2}$ . Les difficultés principales résident dans l'absence totale d'effet dispersif régularisant et dans la structure anisotrope de l'équation.

Notre résultat montre qu'une méthode probabiliste peut surmonter le manque de dispersion. En figeant la variable  $x$ , on peut aussi adapter la méthode à des modèles faiblement dispersifs unidimensionnels comme l'équation de Szegő ou celle de la demi-onde, afin de générer des grands ensembles de données initiales qui donnent lieu à des solutions fortes bien que [60] a mis en évidence des interactions singulières pour des modèles tels que Szegő qui ne permettent pas d'utiliser l'ansatz semi-linéaire (2.4) pour résoudre le problème de Cauchy. L'approche para-contrôlée que nous développons devrait fonctionner pour d'autres modèles dans des géométries dégénérées, pour le Laplacien de Grushin ou de Heisenberg par exemple. Signalons enfin que ces schémas de résolution reposent très fortement sur la structure aléatoire des données initiales. Pour pouvoir les itérer et obtenir des solutions globales, les méthodes d'énergies ne suffisent pas et il faut comprendre comment se propage l'information probabiliste.

**4.2. Vers l'invariance de la mesure de Gibbs pour NLS sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ .** Afin de comprendre l'effet de la géométrie ambiante sur la dynamique des équations de Schrödinger non linéaires, Burq, Gérard et Tzvetkov ont prouvé dans une série de travaux [19, 20, 22, 21, 23] que le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger cubique sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  est semi-linéairement bien posé dans  $H^s(\mathbb{S}^2)$  si et seulement si  $s > \frac{1}{4}$ . Il y a par conséquent un écart très important à combler entre le seuil déterministe et l'espace où vit la mesure de Gibbs qui est  $H^{0-}(\mathbb{S}^2)$ . Il est donc extrêmement difficile d'obtenir l'analogie sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  du résultat pionnier de Bourgain [10] sur le tore  $\mathbb{T}^2$ . En outre, la théorie de Cauchy probabiliste juste en dessous du seuil déterministe  $s = \frac{1}{4}$  reste à établir. Discutons brièvement des difficultés. La plus importante est la dégénérescence des harmoniques sphériques. En effet, étant donné le niveau d'énergie  $\lambda_n^2 = n(n+1)$ , la multiplicité de l'espace propre correspondant, généré par les harmoniques sphériques de degré  $n$ , est de dimension  $2n+1$ . De plus, certaines harmoniques sphériques se concentrent autour des géodésiques de la sphère — ce qui n'est pas le cas pour les ondes planes  $e^{in \cdot x}$  sur le tore — ce qui engendre des instabilités non linéaires. Nous avons quantifié la concentration de

nombreuses harmoniques sphériques autour de l'équateur dans le Théorème suivant, qui repose sur des considérations d'analyse semi-classique. On représente cette concentration sur la figure 4.2.

**Théorème 4.1.** *Pour tout  $0 < \delta \ll 1$  et tout ordre  $k$  qui vérifie  $\sqrt{1 - \delta^2} < \frac{|k|}{n} \leq 1$ , on a*

$$\|\mathbf{1}_{|\cos(\theta)| > 2\delta} Y_{n,k}\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \lesssim_{\delta} \frac{1}{n} .$$

Pour amorcer l'étude probabiliste de l'équation (NLS) sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ , nous avons obtenu un résultat préliminaire où l'on isole une interaction singulière dans la première itération de Picard, et on démontre que l'équation de Schrödinger cubique posée sur  $\mathbb{S}^2$  avec des données aléatoires est quasi-linéaire, et ce malgré la renormalization de Wick et le découplage probabiliste. En particulier, la seconde itération de Picard n'est pas plus régulière — en espérance — que les données initiales aléatoires.

Avant de discuter du résultat principal et de ses conséquences, présentons le cadre probabiliste. On fixe  $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$  ainsi qu'une suite de variables gaussiennes normalisées indépendantes à valeurs complexes  $(g_{n,k})_{1 \leq n, |k| \leq n}$ . On définit ensuite

$$\phi^{\omega} = \sum_{1 \leq n} \frac{e_n^{\omega}}{\lambda_n^{\alpha}}, \quad e_n^{\omega}(x) = \sum_{|k| \leq n} \frac{g_{n,k}(\omega)}{[n]^{\frac{1}{2}}} Y_{n,k}(x). \quad (4.1)$$

La série ci-dessus converge dans  $L^2(\Omega; H^{\alpha - \frac{1}{2}^-}(\mathbb{S}^2))$ , de sorte que  $\phi^{\omega}$  vit dans  $H^{\alpha - \frac{1}{2}^-}(\mathbb{S}^2)$  presque sûrement. Lorsque  $\alpha = \frac{1}{2}$ , les données initiales sont distribuées selon la mesure de Gibbs associée à NLS vu comme un système hamiltonien — on renvoie à la section 1.2 pour une discussion sur les mesures de Gibbs). Cependant, le seuil déterministe pour que l'équation soit bien posée est  $H^{\frac{1}{4}}(\mathbb{S}^2)$ . Le résultat est le suivant.

**Théorème 4.2** (Absence de régularisation de la deuxième itération de Picard, [18]). *Soit  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ , et  $\phi^{\omega} \in H^{\alpha - \frac{1}{2}^-}(\mathbb{S}^2)$  les données initiales randomisées comme dans (4.1). Il existe  $\eta > 0$ ,  $N_0 > 0$  tels que pour chaque  $N \geq N_0$  et  $t$ ,*

$$|t| \eta \log(N) \leq \mathbb{E} \left[ \left\| \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} \Pi_N \mathcal{N}(\Pi_N e^{i\tau\Delta} \phi^{\omega}) d\tau \right\|_{H^{\alpha - \frac{1}{2}^-}(\mathbb{S}^2)}^2 \right],$$

où  $\mathcal{N}$  désigne le terme non linéaire de l'équation cubique renormalisée.

Commentons brièvement ce résultat.

- Lorsque  $N$  tend vers l'infini, le moment quadratique de la norme  $H^{\alpha - \frac{1}{2}^-}(\mathbb{S}^2)$  de la seconde itération de Picard de  $\phi^{\omega}$  a une divergence logarithmique. Puisque la mesure induite vit dans  $H^{\alpha - \frac{1}{2}^-}(\mathbb{S}^2)$ , cela montre qu'il n'y a pas d'effet de régularisation probabiliste.
- Pour des raisons techniques, nous n'avons pas pu prouver que la divergence se produit *presque-sûrement* en  $\omega$ . Il n'est pas clair qu'il existe une preuve élémentaire de ceci, qui ne repose pas sur des outils sophistiqués d'analyse stochastique. On montre simplement une divergence logarithmique en espérance.
- A l'opposé, la seconde itération de Picard sur  $\mathbb{T}^2$  gagne  $\frac{1}{2}$  dérivées. On démontre que ceci reste vrai dans le cas des tores irrationnels, et on donne une preuve auto-contenue de ce résultat, déjà évoqué dans l'article [47].

Le résultat s'accompagne également de quelques observations positives, et n'exclut pas la résolution du problème de Cauchy en dessous de l'espace critique  $H^{\frac{1}{4}}(\mathbb{S}^2)$ . En effet, on a non seulement identifié l'obstacle à l'exécution d'un schéma semi-linéaire, mais on a également prouvé que d'autres interactions ont un effet régularisant.

Dans un programme à long terme avec N. Burq, C. Sun et N. Tzvetkov, nous développons une théorie probabiliste de Cauchy à l'aide du schéma itératif quasi-linéaire décrit précédemment, en employant le calcul paracontrôlé. Plus précisément, nous surmontons l'absence d'effet régularisant en affinant l'ansatz probabiliste et en exploitant l'indépendance des données initiales à haute fréquence et des



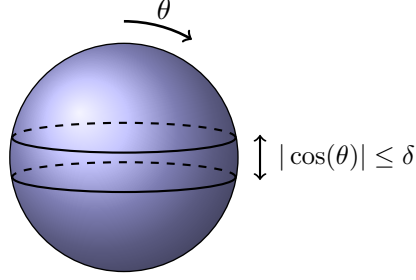


FIGURE 5. Pour mettre en évidence des instabilités dans les interactions d’ondes non linéaires sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  nous démontrons dans le Théorème 4.1 que de nombreuses harmoniques sphériques concentrent leur masse autour de l’équateur.

solutions approchées construites à partir des basses fréquences, en utilisant les opérateurs de moyenne aléatoire mentionnés dans la section 1.2. L’analyse reposera ainsi sur l’utilisation des opérateurs de moyenne aléatoire, s’inspirant des travaux de Bringmann [12], Deng, Nahmod, Yue [39], et Sun, Tzvetkov [69], et elle devra comporter des nouveautés importantes. Il nous faudra en outre exploiter la propagation par le flot de l’invariance des mesures gaussiennes sous l’action des isométries de la sphère. Cette caractéristique clé nous permet de briser significativement le seuil de régularité déterministe  $s = \frac{1}{4}$ . Afin de descendre jusqu’à la mesure de Gibbs, il nous faudra être capable de traiter un terme complètement résonnant, qui est de nature critique.

\* Étape numéro 1 : **Problème de Cauchy probabiliste dans les régimes quasi-linéaires.**

En combinant la compréhension fine des instabilités de (NLS) avec la construction d’opérateurs de moyennisation aléatoires adaptés à  $\mathbb{S}^2$  et le schéma de résolution para-controlé inspiré de [39, 40, 41] nous pensons pouvoir démontrer que le problème de Cauchy associé aux mesures gaussiennes  $\mu_s$  pour  $s > 1$  est bien posé. Cela couvrirait en particulier l’ensemble des régimes qui sont quasi-linéaires mais sous-critiques pour le scaling, à savoir  $H^\sigma(\mathbb{S}^2)$  avec  $0 < \sigma \leq \frac{1}{4}$ . Lorsque  $\sigma > \frac{1}{4}$  nous obtiendrons par ailleurs des nouveautés dynamiques et une meilleure compréhension de la structure des solutions déterministes obtenues dans [21], que nous pourrons voir comme limites des solutions approchées qui se décomposent sous la forme

$$u_N = u_{\frac{N}{2}} + \psi_N + w_N. \quad (4.2)$$

Le terme  $\psi_N$  — dit coloré — est solution d’une équation aux dérivées partielle linéaire para-controlée qui encode les interactions singulières, alors que  $w_N$  est un terme résiduel plus régulier qui est construit par un point fixe dans  $H^{s-\frac{1}{2}^-}(\mathbb{S}^2)$ . En particulier, la dynamique effective de la solution est contenue dans les termes  $\psi_N$ , qui agissent comme des opérateurs unitaires sur chaque espace propre de l’opérateur  $-\Delta_{\mathbb{S}^2}$ . Nous pensons que ces termes contiennent les instabilités mises en évidence dans [19].

\* Étape numéro 2 : **Invariance de la mesure de Gibbs et propriétés dynamiques.** Dans le cas limite où  $s = 1$ , qui correspond au champ libre Gaussien  $\mu_1$  à partir duquel la mesure de Gibbs est définie, les interactions entre un terme résiduel  $w_N$  et deux termes colorés  $\psi_N$  dans le cas complètement résonnant donnent lieu à une contribution critique qui rend la résolution du problème de Cauchy bien plus difficile que lorsque  $s > 1$ . En notant  $\pi_n$  le projecteur spectral l’espace propre de  $n^{\text{ième}}$  niveau d’énergie, ce terme critique s’écrit

$$\mathcal{R}_N(t) := \sum_{\substack{n_1, n_2 \sim N \\ n_1 \neq n_2}} \pi_{n_1}(\pi_{n_1} \psi_N \overline{\pi_{n_2} \psi_N} \pi_{n_2} w_N). \quad (4.3)$$

Il peut être vu comme un opérateur linéaire et aléatoire appliqué au terme résiduel  $w_N$ . Pour établir la convergence de la suite des solutions approchées (4.2) il nous faudra estimer sa norme d’opérateur sur  $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$ . Les méthodes que nous développons dans le cas de la sphère  $\mathbb{S}^2$  afin de traiter pour la

première fois ce type de termes critiques — qui apparaissent par ailleurs dans des équations de type Hartree — auront certainement une portée plus générale.

Une fois le terme critique contrôlé, nous obtiendrons l'existence d'une dynamique locale en temps sur le support de la mesure de Gibbs. Nous pourrions alors utiliser l'invariance formelle de la mesure de Gibbs comme substitut à l'énergie pour prolonger les solutions locales en des solutions globales. Cet argument de globalisation probabiliste, qui est dû à Bourgain [9], est très classique. Néanmoins, il n'est pas clair que les conséquences dynamiques — invariance rigoureuse de la mesure, théorème de récurrence de Poincaré et propriété du flot sur le support de la mesure — s'en déduisent directement dans le contexte quasi-linéaire, et cette partie nécessitera probablement l'écriture d'un article indépendant.

## 5. SYNTHÈSE, PROGRÈS RÉCENTS ET PERSPECTIVES

Dans le régime sur-critique, nous avons deux comportements différents pour le flot non linéaire approché issu de données initiales régularisées par convolution. D'une part, le Théorème présenté dans le paragraphe 2 met en évidence un ensemble *pathologique* de données initiales où se produit l'inflation des normes, qui contient un sous-ensemble  $G_\delta$ -dense. D'autre part, l'approche statistique initiée par Bourgain puis Burq, Tzvetkov fournit un ensemble *statistique* de données initiales de mesure pleine décrit dans le Théorème 1.2, pour lequel les solutions régularisées convergent vers un objet limite qui est une solution forte de l'équation. Il y a ainsi deux notions différentes de généricité dans les régimes sur-critiques. Alors que l'ensemble pathologique est générique pour la topologie, il est négligeable pour la mesure. De plus, nous déduisons du théorème de Baire que l'ensemble statistique donné par le Théorème 1.2 ne peut pas contenir d'ensemble  $G_\delta$ -dense.

L'étude du comportement en temps long de ces solutions est illustrée dans la partie 3, où sont présentés deux résultats de natures différentes. Rappelons que les solutions probabilistes issues de données initiales dans l'ensemble statistique s'obtiennent à partir de la décomposition de Da Prato et Debussche

$$u(t) = e^{it\Delta} f_0^\omega + v, \quad (5.1)$$

où la partie non linéaire  $v$  est suffisamment régulière pour être obtenue par un schéma itératif de Picard. D'une part, nous établissons *le scattering presque sûr* pour l'équation (NLS) défocalisante dans un régime où l'espace d'énergie est sous-critique. D'autre part, on démontre la stabilité asymptotique de petits états fondamentaux sous l'effet de perturbations irrégulières. Cela montre qu'il est possible d'étudier l'évolution non linéaire en temps long d'une donnée initiale dans l'ensemble statistique, en adoptant une approche perturbative qui combine des outils probabilistes et des méthodes d'analyse des équations dispersives non linéaires. Une perspective est l'étude de l'évolution de la mesure elle-même par le flot non linéaire, afin de comprendre finement la propagation de l'information probabiliste des données initiales — invariance, quasi-invariance, etc.

L'on a ensuite étudié des modèles faiblement dispersifs, pour lesquels l'effet régularisant des itérations de Picard n'est pas suffisant pour établir la convergence de ce schéma, bien que l'on soit dans un cadre probabiliste. Il n'est alors pas possible d'obtenir une solution de la forme (5.1). Pour établir l'existence de solutions locales, il faut plutôt utiliser un schéma itératif *quasi-linéaire* qui exploite la structure probabiliste de la solution, dans la continuité des développements récents Bringmann puis Deng, Nahmod, Yue et Sun, Tzvetkov. Se pose alors la question du comportement en temps long de ces solutions. Pour espérer y répondre, il faut comprendre comment se propage l'information probabiliste des données initiales. Ainsi, les techniques perturbatives déterministes développées dans la partie 3 ne sont pas suffisantes pour pouvoir itérer en temps le schéma quasi-linéaire. Il faudrait démontrer une forme d'invariance ou de quasi-invariance de la mesure de probabilité puis adapter l'argument de globalisation de Bourgain. Comme l'attestent les chapitres qui constituent la partie 4, soulignons pour conclure que l'étude des mesures invariantes ou quasi-invariantes dans de tels régimes non linéaires et faiblement dispersifs, et à basse régularité, constitue un domaine de recherche difficile et actif, dont les défis nécessiteront le développement de nouvelles approches aussi bien stochastiques que déterministes.

**Perspectives.** Pour conclure ce résumé de ma thèse, mentionnons les percées spectaculaires réalisées récemment dans des problèmes connexes. Citons les résultats [16, 38, 37, 33, 34] dans l'étude de l'équation d'ondes cinétique, concernant la propagation des quantités statistiques — aussi appelée propagation du chaos — à l'équilibre. D'autres lignes de recherche concernent l'étude des équations géométriques [15], ou l'étude statistique de la formation des vagues scélérates, liée à la dérivation des principes de grande déviation pour les équations cubiques de Schrödinger avec des données initiales aléatoires [49]. Très récemment, Bringmann, Deng, Nahmod et Yue [14] ont prouvé dans un travail remarquable l'invariance de la mesure de Gibbs sous la dynamique de l'équation d'onde cubique tridimensionnelle, en introduisant une nouvelle décomposition *calorique* des données initiales, et en combinant le cadre analytique des tenseurs aléatoires avec des considérations combinatoires très poussées, développées dans [38, 37], respectivement.

Le développement d'approches probabilistes pour d'équations dispersives suscite un intérêt grandissant, en connexion avec plusieurs domaines de recherche actifs. Bien loin de simplement combiner deux domaines des mathématiques, les avancées récentes s'appuient également sur des idées de la théorie analytique des nombres [16], de la géométrie différentielle [15], de l'analyse harmonique [50, 13], de la théorie des matrices aléatoires [10, 39, 40] et de la théorie quantique des champs [4, 5].

## REFERENCES

- [1] P. Arnold and G. Moore. Bec transition temperature of a dilute homogeneous imperfect bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 87:120401, Aug 2001.
- [2] Y. Bahri, S. Ibrahim, and H. Kikuchi. Remarks on solitary waves and Cauchy problem for half-wave-Schrödinger equations. *Commun. Contemp. Math.*, 23(5):31, 2021. Id/No 2050058.
- [3] Y. Bahri, S. Ibrahim, and H. Kikuchi. Transverse Stability of Line Soliton and Characterization of Ground State for Wave Guide Schrödinger Equations. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, pages 1–43, 2021.
- [4] N. Barashkov and M. Gubinelli. A variational method for  $\Phi_3^4$ . *Duke Math. J.*, 169(17):3339–3415, 2020.
- [5] N. Barashkov and M. Gubinelli. The  $\Phi_3^4$  measure via Girsanov's theorem. *Electron. J. Probab.*, 26:29, 2021. Id/No 81.
- [6] Á. Bényi, T. Oh, and O. Pocovnicu. On the probabilistic Cauchy theory of the cubic nonlinear Schrödinger equation on  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . *Trans. Am. Math. Soc., Ser. B*, 2:1–50, 2015.
- [7] A. Bényi, T. Oh, and O. Pocovnicu. *Wiener randomization on unbounded domains and an application to almost sure well-posedness of NLS*, pages 3–25. Springer International Publishing, 2015.
- [8] Á. Bényi, T. Oh, and O. Pocovnicu. Higher order expansions for the probabilistic local cauchy theory of the cubic nonlinear schrödinger equation on  $\mathbb{R}^3$ . *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*, 6:114–160, 2019.
- [9] J. Bourgain. Periodic nonlinear schrödinger equation and invariant measures. *Commun. Math. Phys.*, 166:1–26, 1994.
- [10] J. Bourgain. Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation. *Commun. Math. Phys.*, 176(2):421–445, 1996.
- [11] J. Bourgain. *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations*. 1999.
- [12] B. Bringmann. Almost sure local well-posedness for a derivative nonlinear wave equation. *Int. Math. Res. Not.*, 2021(11):8657–8697, 2021.
- [13] B. Bringmann. Almost sure scattering for the energy critical nonlinear wave equation. *Am. J. Math.*, 143(6):1931–1982, 2021.
- [14] B. Bringmann, Y. Deng, A. R. Nahmod, and H. Yue. Invariant gibbs measures for the three dimensional cubic nonlinear wave equation. *arXiv:2205.03893*, 2022.
- [15] B. Bringmann, J. Lührman, and G. Staffilani. The wave maps equation and brownian paths. *arXiv:2111.07381*, Nov. 2021.
- [16] T. Buckmaster, P. Germain, Z. Hani, and J. Shatah. Onset of the wave turbulence description of the longtime behavior of the nonlinear Schrödinger equation. *Invent. Math.*, 225(3):787–855, 2021.
- [17] N. Burq. *Random Data Cauchy Theory for Dispersive Partial Differential Equations*, pages 1862–1883. 2011.
- [18] N. Burq, N. Camps, M. Latocca, C. Sun, and N. Tzvetkov. Lack of regularization in the first Picard iteration for NLS on  $\mathbb{S}^2$ . *In preparation*, 2022.
- [19] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. An instability property of the nonlinear Schrödinger equation on  $\mathbb{S}^d$ . *Math. Res. Lett.*, 9:323–335, 2002.
- [20] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *Amer. J. Math.*, 126:569–605, 2004.

- [21] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces. *Invent. Math.*, 159(1):187–223, 2005.
- [22] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Multilinear eigenfunction estimates and global existence for the three dimensional nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 38:255–301, 2005.
- [23] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. High frequency solutions of the nonlinear schrödinger equation on surfaces. *Q. Appl. Math.*, 68:61–71, 2010.
- [24] N. Burq and N. Tzvetkov. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations I: local theory. *Invent. Math.*, 173(3):449–475, 2008.
- [25] N. Burq and N. Tzvetkov. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations II: a global existence result. *Invent. Math.*, 173(3):477–496, 2008.
- [26] N. Camps. Asymptotic stability of small ground states for NLS under random perturbations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, published online first, 2022.
- [27] N. Camps. Scattering for the cubic Schrödinger equation in 3D with randomized radial initial data. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 376:285–333, 2023.
- [28] N. Camps and L. Gassot. Pathological set of initial data for scaling-supercritical nonlinear Schrödinger equations. *Int. Math. Res. Not.*, 2022.
- [29] N. Camps, L. Gassot, and S. Ibrahim. Refined probabilistic local well-posedness for a cubic Schrödinger half-wave equation. *arXiv:2209.14116*, 2022.
- [30] T. Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations*, volume 10. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); New York, NY: Courant Institute of Mathematical Sciences, 2003.
- [31] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao. Ill-posedness for nonlinear Schrodinger and wave equations. *arXiv:math/0311048*, 2003.
- [32] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. Global existence and scattering for rough solutions of a nonlinear schrödinger equation on  $\mathbb{R}^3$ . *Commun. Partial Differ. Equ.*, 57(8):987–1014, 2004.
- [33] C. Collot and P. Germain. On the derivation of the homogeneous kinetic wave equation. *arXiv:1912.10368*, Feb. 2019.
- [34] C. Collot and P. Germain. Derivation of the homogeneous kinetic wave equation: longer time scales. *arXiv:2007.03508*, July 2020.
- [35] P. Constantin and J.-C. Saut. Local smoothing properties of dispersive equations. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(2):413–439., 1988.
- [36] G. Da Prato and A. Debussche. Two-dimensional navier-stokes equations driven by a space-time white noise. *J. Funct. Anal.*, 196(1):180–210, 2002.
- [37] Y. Deng and Z. Hani. Full derivation of the wave kinetic equation. *arXiv:2104.11204*, Apr. 2021.
- [38] Y. Deng and Z. Hani. On the derivation of the wave kinetic equation for NLS. *Forum Math. Pi*, 9:37, 2021. Id/No e6.
- [39] Y. Deng, A. Nahmod, and H. Yue. Invariant gibbs measures and global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations in dimension two. *arXiv:1910.08492*, 2019.
- [40] Y. Deng, A. Nahmod, and H. Yue. Random tensors, propagation of randomness, and nonlinear dispersive equations. *Invent. Math.*, 228:539–686, 2022.
- [41] Y. Deng, A. R. Nahmod, and H. Yue. Invariant Gibbs measure and global strong solutions for the Hartree NLS equation in dimension three. *J. Math. Phys.*, 62(3):031514, 39, 2021.
- [42] B. Dodson. Global well-posedness and scattering for the defocusing, cubic nonlinear Schrödinger equation when  $n = 3$  via a linear-nonlinear decomposition. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(5):1905–1926, 2013.
- [43] B. Dodson. *Defocusing nonlinear Schrödinger equations*, volume 217. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
- [44] B. Dodson. Global well-posedness and scattering for nonlinear Schrödinger equations with algebraic nonlinearity when  $d = 2, 3$  and  $u_0$  is radial. *Camb. J. Math.*, 7(3):283–318, 2019.
- [45] B. Dodson, J. Lührmann, and D. Mendelson. Almost sure local well-posedness and scattering for the 4D cubic nonlinear Schrödinger equation. *Adv. Math.*, 347:619–676, 2019.
- [46] B. Dodson, J. Lührmann, and D. Mendelson. Almost sure scattering for the 4D energy-critical defocusing nonlinear wave equation with radial data. *Am. J. Math.*, 142(2):475–504, 2020.
- [47] C. Fan, Y. Ou, G. Staffilani, and H. Wang. 2d-defocusing nonlinear schrödinger equation with random data on irrational tori. *Stoch. Partial Differ. Equ.: Anal. Comput.*, 9, 2021.
- [48] L. Friedlander. An invariant measure for the equation  $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$ . *Comm. Math. Phys.*, 98(1):1–16, 1985.
- [49] M. A. Garrido, R. Grande, K. M. Kurianski, and G. Staffilani. Large deviations principle for the cubic nls equation. *arXiv:2110.15748*, Oct. 2021.
- [50] M. Gubinelli, H. Koch, T. Oh, and L. Tolomeo. Global dynamics for the two-dimensional stochastic nonlinear wave equations. *Internat. Math. Res. Notices*, 2021.
- [51] S. Gustafson, K. Nakanishi, and T.-P. Tsai. Asymptotic stability and completeness in the energy space for nonlinear Schrödinger equations with small solitary waves. *Int. Math. Res. Not.*, 2004(66):3559–3584, 2004.
- [52] J. P. Kahane. *Some Random Series of Functions*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1993.

- [53] C. Kenig and D. Mendelson. The Focusing Energy-Critical Nonlinear Wave Equation With Random Initial Data. *Int. Math. Res. Not.*, 2019.
- [54] A. Kolmogorov and G. Seliverstoff. Sur la convergence des séries de fourier. *Comptes rendus*, CLXXVIII:303–306, 1924.
- [55] G. Lebeau. Non linear optic and supercritical wave equation. *Bull. Soc. R. Sci. Liege*, 2001.
- [56] G. Lebeau. Perte de régularité pour les équations d’ondes sur-critiques. *Bull. SMF*, 133(1):145–157, 2005.
- [57] J. L. Lebowitz, H. A. Rose, and E. R. Speer. Statistical mechanics of the nonlinear schrödinger equation. *J. Statist. Phys.*, 50(3-4):657–687, 1988.
- [58] J. L. Lebowitz, H. A. Rose, and E. R. Speer. Statistical mechanics of the nonlinear schrödinger equation ii. mean field approximation. *J. Statist. Phys.*, 54(1-2):17–56, 1989.
- [59] M. Lewin, P. T. Nam, and N. Rougerie. Classical field theory limit of many-body quantum Gibbs states in 2d and 3d. *Invent. Math.*, 224(2):315–444, 2021.
- [60] T. Oh. Remarks on nonlinear smoothing under randomization for the periodic KdV and the cubic Szegő equation. *Funkc. Ekvacioj, Ser. Int.*, 54(3):335–365, 2011.
- [61] T. Oh and L. Thomann. A pedestrian approach to the invariant gibbs measures for the 2-d defocusing nonlinear schrödinger equations. *Stoch. Partial Differ. Equ.: Anal. Comput.*, 6(3):397–445, 2018.
- [62] R. E. A. C. Paley and A. Zygmund. On some series of functions, (1) (2) (3). *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 26:337–357, 1930.
- [63] H. Rademacher. Einige sätze über reihen von allgemeinen orthogonalfunktionen. *Mathematische Annalen*, 87:112–138, 1922.
- [64] J. Shen, A. Soffer, and Y. Wu. Almost sure well-posedness and scattering of 3d cubic nonlinear schrödinger equation. *arXiv:2110.11648*, 2021.
- [65] A. Soffer and M. I. Weinstein. Multichannel nonlinear scattering for nonintegrable equations. *Commun. Math. Phys.*, 133(1):119–146, 1990.
- [66] Q. Su. Global well-posedness and scattering for defocusing, cubic NLS in  $\mathbb{R}^3$ . *Math. Res. Lett.*, 19(2):431–451, 2012.
- [67] C. Sulem and P.-L. Sulem. *The nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collapse*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [68] C. Sun and N. Tzvetkov. Concerning the pathological set in the context of probabilistic well-posedness. *Comptes Rendus. Math.*, 358(9-10):989–999, 2020.
- [69] C. Sun and N. Tzvetkov. Refined probabilistic global well-posedness for the weakly dispersive NLS. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 213:91, 2021.
- [70] T. Tao. *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis*. Conference Board of the Mathematical Sciences. Regional conference series in mathematics. American Mathematical Society, 2006.
- [71] T. Tao. Why are solitons stable? *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 46, 2008.
- [72] B. Xia. Generic Ill-posedness for wave equation of power type on three-dimensional torus. *Int. Math. Res. Not.*, 20:15533–15554, 2021.
- [73] H. Xu. Unbounded Sobolev trajectories and modified scattering theory for a wave guide nonlinear Schrödinger equation. *Mathematische Zeitschrift*, 286(1):443–489, 2017.
- [74] P. E. Zhidkov. An invariant measure for a nonlinear wave equation. *Nonlinear Anal.*, 22(3):319–325, 1994.