Approches dynamiques et statistiques des équations dispersives

Nicolas Camps

Journée de rentrée IRMAR, 1er Octobre 2024

I. Introduction

Une équation dispersive non-linéaire...

(NLS) $$i\partial_t u + \Delta u = \mu |u|^2 u\,, \quad u : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \to \mathbb{C}\,.$$

- Modèle central en physique, dans la description des **ondes non-linéaires**.
- Equation **dispersive non-linéaire**.

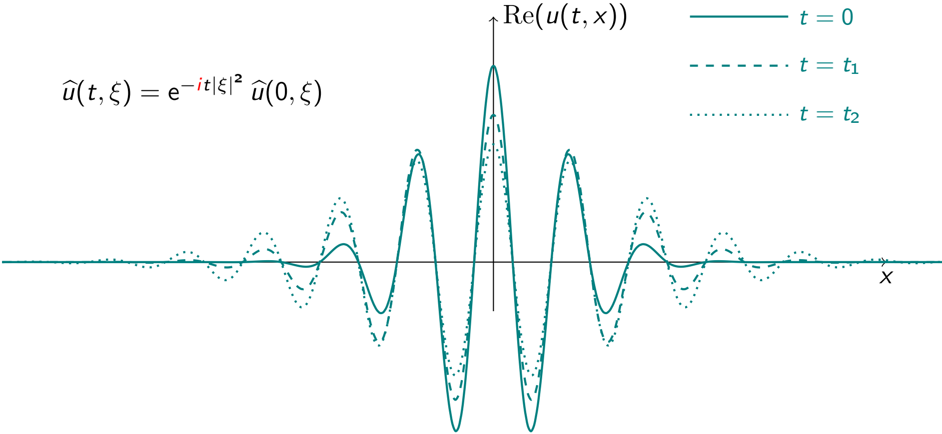
Structure Hamiltonienne:

$$H(u(t)) = \int \frac{1}{2}\,|\nabla u(t,x)|^2 + \frac{\mu}{4}\,|u(t,x)|^4\,dx = H(u(0))\,.$$

Equation de Schrödinger (linéaire) :

$$i\partial_t u + \Delta u = 0\,.$$

$$\widehat{u}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-it|\xi|^2}\,\widehat{u}(0,\xi)$$



$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\xi\cdot(x-t\xi)}\,\widehat{u}(0,\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Interaction non-linéaire

$$i\partial_t u + \Delta u = \mu|u^2|u = V(u)u\,, \quad V(u) = \mu|u|^2$$

La nature de l'interaction non-linéaire dépend du signe de μ:

$\mu > 0$:

$V(u) = +|u|^2$

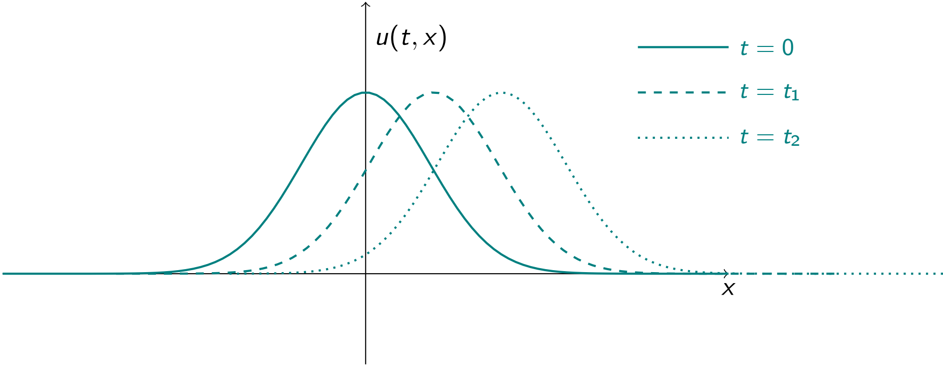
$\mu < 0$:

$V(u) = -|u|^2$

Lorsque $\mu < 0$ (interaction attractive), il existe des solutions de type **soliton** :

$$u(t,x) = Q(x-t)\,,$$

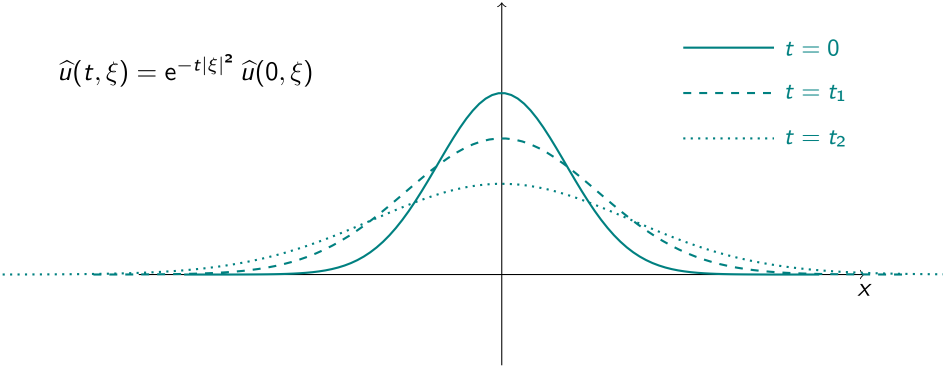
où le profil Q a une forme en cloche:



Observé par Russel (1834) puis décrit par l'équation de Korteweg–de Vries (1895)

Equation de la chaleur :

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$



$\rightsquigarrow$ très différents des phénomènes dispersifs !

* **Représentation intégrale** de la solution: (*formulation de Duhamel*)

$$u(t) = \mathrm{e}^{it\Delta}\, u(0) - i\mu \int_0^t \mathrm{e}^{i(t-\tau)\Delta}\, |u(\tau)|^2 u(\tau)\mathrm{d}\tau\,.$$

* **Lois de conservations** et symétries pour analyser le **temps long**.

* Espace des phases: l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$:

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\,.$$

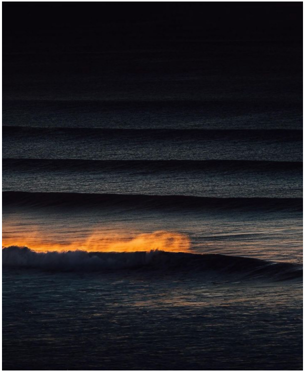
* Point fixe et analyse dans des espaces fonctionels $X \subset C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$.

Un mécanisme fondamental: Le scattering

Lorsque la solution $u(t)$ est globale en temps et qu'il il existe $u_+ \in H^s$

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t) - e^{it\Delta} u_+\|_{H^s} = 0\,.$$

- Stabilité asymptotique des solitons ?
- Résolution en solitons ?



II. NLS sur des surfaces compactes

Quelle est l'influence de la géométrie sur la propagation des ondes non-linéaires ?

Dispersion ?

(M,g): surface de Riemann compacte $\rightsquigarrow$ $-\Delta_g$: opérateur de Laplace–Beltrami

Evolution libre:

$$e^{it\Delta_g}\, u(x) = \sum_n e^{-it\lambda_n^2}\, \pi_n u(x)\,,$$

où π_n projecteur spectral associé à la valeur propre λ_n^2.

- Sur des domaines compacts, la dispersion est bien plus **faible.**
- On analyse plutôt des paquets d'ondes localisés en fréquence:

$$P_N u = \sum_{N<\lambda\leq 2N} \pi_\lambda u\,.$$

$\rightsquigarrow$ *analyse semi-classique, géométrie spectrale,...*

Introduisons le **profil** de la solution :

$$a(t) := e^{-it\Delta} u(t) = \sum_n e^{it\lambda_n^2} \pi_n u(t).$$

* Les modes propres $(\pi_n a)$ vérifient

$$i\partial_t \pi_n a = \sum_{n_1, n_2, n_3} e^{it\Omega(\vec{n})} \pi_n \left(\pi_{n_1} a \, \overline{\pi_{n_2} a} \, \pi_{n_3} a\right),$$

où la fonction de résonance, qui capture la dispersion, s'écrit

$$\Omega(\vec{n}) = \lambda_{n_1}^2 - \lambda_{n_2}^2 + \lambda_{n_3}^2 - \lambda_n^2.$$

* Résonances:

$$\left\{ \vec{n} = (n_1, n_2, n_3, n) \quad \middle| \quad \Omega(\vec{n}) = 0 \right\}$$

* Sur le tore $\mathbb{T}^d$:

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \widehat{u}_n \, e^{in \cdot x} \ .$$

* Les valeurs propres de $-\Delta$ sont

$$\lambda_n^2 = |n|^2 \,, \quad n \in \mathbb{Z}^d \ .$$

* L'ensemble résonant à 4 ondes

$$\Big\{ \vec{n} = (n_1, n_2, n_3, n) \in (\mathbb{Z}^d)^4 \quad | \quad \Omega(\vec{n}) = 0 \,, \quad n_1 - n_2 + n_3 = n \,. \Big\}$$

est formé **des rectangles** du réseau $\mathbb{Z}^d$.

* Equation de Schrödinger linéaire: oscillateur harmonique

$$\widehat{u}_n(t) = \mathrm{e}^{it\lambda_n^2}\,\widehat{u}_n(0) \quad \rightsquigarrow \quad |\widehat{u}_n(t)|^2 \equiv |\widehat{u}_n(0)|^2 \,.$$

* Equation de Schrödinger non-linéaire: oscillateurs harmoniques couplés

$$H(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \lambda_n^2 |\widehat{u}_n|^2 \quad + \quad \sum_{\vec{n}} \widehat{u}_{n_1}\overline{\widehat{u}_{n_2}}\,\widehat{u}_{n_3}\overline{\widehat{u}_{n_4}} \,.$$

$\rightsquigarrow$ *Perturbation d'un système hamiltonien intégrable (lorsque $|u| \ll 1$)*

$\rightsquigarrow$ *Formes normales de Birkhoff, théorie KAM, mesures invariantes...*

II. NLS sur des surfaces compactes

2. Approches dynamiques: cascades d'énergie

Comment la densité spectrale se distribue lorsque $t \to \infty$?

$$|\widehat{u}_n(t)|^2 \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty \text{ ?}$$

* Norme de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^d)$: mesure la distribution de la densité spectrale

$$\|u(t)\|^2_{H^s(\mathbb{T}^d)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (1 + |n|^2)^s |\widehat{u}_n(t)|^2 .$$

Comment la densité spectrale se distribue lorsque $t \to \infty$?

$$|\widehat{u}_n(t)|^2 \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty \ ?$$

$\ast$ Norme de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^d)$: mesure la distribution de la densité spectrale

$$\|u(t)\|^2_{H^s(\mathbb{T}^d)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (1 + |n|^2)^s |\widehat{u}_n(t)|^2 .$$

Question: (Bourgain (2000))

Existe-t-il des solutions $u \in C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{T}^d))$, $s > 1$, pour lesquelles

$$\|u(0)\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} \ll 1 , \quad \limsup_{t \to \infty} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} = +\infty \, ?$$

Stratégie:

1. Dynamique (turbulente) dans le système résonant.
2. Stabilité par le système complet (avec dispersion).

Contexte :

$*$ Carles-Faou ('10) Transfer d'énergie en temps petit.

$*$ Colliander-Keel-Staffilani–Takaoka–Tao ('10) Amplification des normes $H^s(\mathbb{T}^d)$.

Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$:

$*$ Hani-Pausader-Tzvetkov-Visciglia (15) : **Cascade infinie d'énergie**

$*$ **Idée :** *la dispersion (direction $\mathbb{R}$) réduit la dynamique à celle du système résonant.*

Ces mécanismes persistent-ils lorsqu'on perturbe le domaine ?

Ces mécanismes persistent-ils lorsqu'on perturbe le domaine ?

$$\Delta \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{div}(\mathrm{A}\nabla)\,, \quad \mathrm{A} \in S^{++}(\mathbb{R}^d)\,.$$

* Fréquences: pour $n \in \mathbb{Z}^d$,

$$\lambda_n^2 = n^{\intercal} \mathrm{A} n\,.$$

* On impose des conditions *Diophantinnes* sur A:
  - Condition générique
  - Remplacer les résonances exactes par des *quasi-résonances:*

$$\left\{ \vec{n} = (n_1, n_2, n_3, n) \quad \middle| \quad |\Omega(\vec{n})| \ll 1/t \right\}$$

  - La dispersion opère plus longtemps (Deng–Germain–Guth (19))

Théorème: NC-Staffilani (24)

Sous des hypothèses diophantiennes sur A, *les normes* H^s *ne sont pas amplifiées:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^s} \leq C\|u(0)\|_{H^s} .$$

Stratégie: scattering modifié (scattering avec une correction logarithmique)

$*$ Si l'on veut contrôler une certaine quantité (ex: $\|\cdot\|_{H^s}$), alors

$$\Big\|\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{i(t-\tau)}\,|u(\tau)|^2 u(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{H^s} \lesssim \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|_{L^\infty}^2 \|u(\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau \lesssim \int_{t_0}^{t} \tau^{-1}\|u(\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau .$$

$\rightsquigarrow$ Méthode dite des *résonances espace / temps*.

$\rightsquigarrow$ Ici, ce sont les **quasi-résonances** qui gouvernent la **dynamique effective**.

II. NLS sur des surfaces compactes

3. Approche statistique: mesures invariantes

Approche statistique: comment sont transportées les mesures gaussiennes ?

* Pour $u \in H^s(\mathbb{T}^d)$, et $(g_n(\omega))_n$ des variables aléatoires, on définit

$$\mu : \quad \omega \in \Omega \quad \longmapsto \quad u^\omega := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g_n(\omega) \widehat{u}_n \, e^{inx} \quad \in H^s(\mathbb{T}^d) \quad p.s.$$

* Pour $u \in H^s(\mathbb{T}^d)$, et $(g_n(\omega))_n$ des variables aléatoires, on définit

$$\mu : \quad \omega \in \Omega \quad \longmapsto \quad u^\omega := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g_n(\omega) \widehat{u}_n \, e^{inx} \quad \in H^s(\mathbb{T}^d) \quad p.s.$$

* Si $(g_n(\omega))_n$ sont des gaussiennes complexes *i.i.d*,

$$e^{it\Delta} u^\omega = \sum_n e^{-it|n|^2} g_n(\omega) \widehat{u}_n \, e^{inx} \quad \rightsquigarrow \quad \text{Loi } (e^{it\Delta} u^\omega) = \text{Loi } (u^\omega) \, .$$

Approche statistique: comment sont transportées les mesures gaussiennes ?

* Pour $u \in H^s(\mathbb{T}^d)$, et $(g_n(\omega))_n$ des variables aléatoires, on définit

$$\mu : \quad \omega \in \Omega \quad \longmapsto \quad u^\omega := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g_n(\omega) \widehat{u}_n \, \mathrm{e}^{inx} \quad \in H^s(\mathbb{T}^d) \quad p.s.$$

* Si $(g_n(\omega))_n$ sont des gaussiennes complexes *i.i.d*,

$$\mathrm{e}^{it\Delta} u^\omega = \sum_n \mathrm{e}^{-it|n|^2} g_n(\omega) \widehat{u}_n \, \mathrm{e}^{inx} \quad \rightsquigarrow \quad \text{Loi } (\mathrm{e}^{it\Delta} u^\omega) = \text{Loi } (u^\omega) \, .$$

* En revanche, la mesure transportée par le flot purement non-linéaire

$$i\partial_t u = |u|^2 u$$

n'est pas absolument continue par rapport à la mesure initiale.

Approche statistique: comment sont transportées les mesures gaussiennes ?

* Pour $u \in H^s(\mathbb{T}^d)$, et $(g_n(\omega))_n$ des variables aléatoires, on définit

$$\mu : \quad \omega \in \Omega \quad \longmapsto \quad u^\omega := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g_n(\omega) \widehat{u}_n \, e^{inx} \quad \in H^s(\mathbb{T}^d) \quad p.s.$$

* Si $(g_n(\omega))_n$ sont des gaussiennes complexes *i.i.d*,

$$e^{it\Delta} u^\omega = \sum_n e^{-it|n|^2} g_n(\omega) \widehat{u}_n \, e^{inx} \quad \rightsquigarrow \quad \text{Loi } (e^{it\Delta} u^\omega) = \text{Loi } (u^\omega) \, .$$

* En revanche, la mesure transportée par le flot purement non-linéaire

$$i\partial_t u = |u|^2 u$$

n'est pas absolument continue par rapport à la mesure initiale.

$\rightsquigarrow$ **Équilibre (macroscopique) entre dispersion et effets non-linéaires ?**

La mesure de Gibbs, formellement invariante,

$$\mathrm{d}\rho(u) = Z^{-1} \exp(-H(u))\mathrm{d}u\,,$$

où H est le hamiltonien, Z un facteur de normalisation.

Le problème de la mesure de Gibbs: (Rose-Lebowitz-Speer ('88))

(i) Construction de la mesure ?

(ii) **Théorie de Cauchy sur le support de ρ ?**

$$\rho(L^2(\mathbb{T}^2)) = 0\,.$$

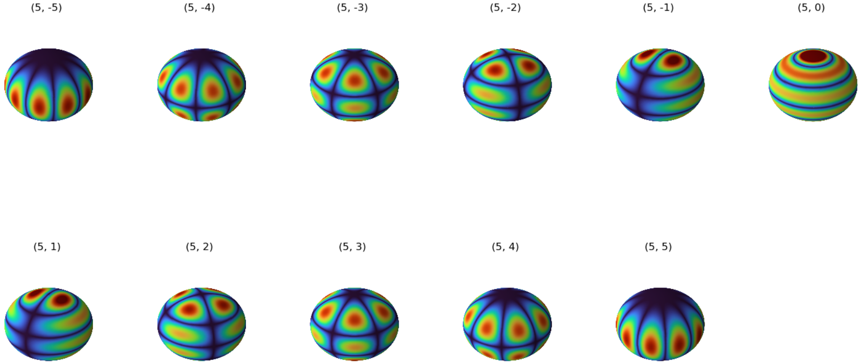
(iii) **Temps long:** *existence globale, propriété de récurrence, turbulence faible,...?*

* (Bourgain '96) résolution du problème de la mesure de Gibbs sur $\mathbb{T}^2$.
* (Deng–Nahmod–Yue '19-'20) avec non-linéarité générale.

(Burq, N.C, Sun, Tzvetkov '24): problème de la mesure de pour NLS **posée sur** $\mathbb{S}^2$.

Concentration de fonctions propres:

Sur $\mathbb{S}^2$, harmoniques sphériques de degré 5:



* *Propagation de structures aléatoires hors équilibre.*

  $\rightarrow$ **Notion de quasi-invariance**

* *Mieux comprendre les systèmes dynamiques effectifs.*

  $\rightarrow$ **Combiner les approches hamiltoniennes et statistiques.**

* *Équations cinétiques ?*

∗ *Propagation de structures aléatoires hors équilibre.*

$\rightarrow$ **Notion de quasi-invariance**

∗ *Mieux comprendre les systèmes dynamiques effectifs.*

$\rightarrow$ **Combiner les approches hamiltoniennes et statistiques.**

∗ *Équations cinétiques ?*

Merci pour votre attention