Le groupe fondamental étale

Tuteur : Antoine DUCROS

Gabriel RIBEIRO

École Polytechnique

4 septembre 2020

Plan

Pourquoi la théorie classique ne fonctionne pas

Définition - Point générique

Soit X un espace topologique. On dit que $p \in X$ est un *point générique* si $\overline{\{p\}} = X$.

Définition - Point générique

Soit X un espace topologique. On dit que $p \in X$ est un *point générique* si $\overline{\{p\}} = X$.

Théorème

Tout schéma intègre admet un point générique.

Théorème

Tout espace X qui admet un point générique p est contractile.

Théorème

Tout espace X qui admet un point générique p est contractile.

En fait, l'application $f : X \times [0, 1] \to X$ définie par

$$f(x, 0) = x \qquad \text{et} \qquad f(x, t) = p, \text{ pour } t > 0$$

est une rétraction par déformation.

Théorème

Tout espace X qui admet un point générique p est contractile.

En fait, l'application $f : X \times [0, 1] \to X$ définie par

$$f(x, 0) = x \qquad \text{et} \qquad f(x, t) = p, \text{ pour } t > 0$$

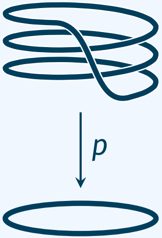
est une rétraction par déformation.

En particulier, le groupe fondamental topologique d'un schéma intègre est trivial.

Réinterprétation de la théorie topologique

Soit $p : Y \to X$ un revêtement topologique, $x \in X$ et $y \in p^{-1}(x)$ un point de la fibre de x.

Rappelons qu'étant donné un lacet $\gamma : [0,1] \to X$ basé en x, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma} : [0,1] \to Y$ à homotopie près tel que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = y$.



On définit ainsi l'action de monodromie.

Définition - Action de monodromie

Étant donné $\alpha \in \pi_1(X, x)$ représenté par un lacet γ, on définit l'*action de monodromie* de $\pi_1(X, x)$ sur la fibre $p^{-1}(x)$ comme $\alpha \cdot y := \tilde{\gamma}(1)$. Cette définition ne dépend pas du choix de γ.

Théorème - Classification des revêtements

Supposons X connexe et localement simplement connexe et fixons $x \in X$. Alors le foncteur fibre Fib_x défini par

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Revêtements} \\ \text{de } X \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \pi_1(X,x)\text{-} \\ \text{ensembles} \end{array} \right\} \\ (p : Y \to X) & \longmapsto & p^{-1}(x) \end{array}$$

est une équivalence de catégories.

Le foncteur Fib_x est représentable par le revêtement universel $\tilde{X}$ et donc le lemme de Yoneda implique que

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Fib}_x) \cong \mathrm{Aut}(\tilde{X}|X)^{\mathrm{op}} \cong \pi_1(X, x).$$

On pourrait alors définir le groupe fondamental comme étant $\mathrm{Aut}(\mathrm{Fib}_x)$.

Théorème - Classification des revêtements finis

Supposons X connexe et fixons $x \in X$. Alors le foncteur fibre Fib_x restreint à la catégorie des revêtements finis de X

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Revêtements} \\ \text{finis de } X \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \widehat{\pi_1(X,x)}\text{-ensembles} \\ \text{continus} \end{array} \right\},$$

où $\widehat{\pi_1(X,x)}$ est le complété profini de $\pi_1(X,x)$, est une équivalence de catégories.

Théorème - Classification des revêtements finis

Supposons X connexe et fixons $x \in X$. Alors le foncteur fibre Fib_x restreint à la catégorie des revêtements finis de X

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Revêtements} \\ \text{finis de } X \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \widehat{\pi_1(X,x)}\text{-ensembles} \\ \text{continus} \end{array} \right\},$$

où $\widehat{\pi_1(X,x)}$ est le complété profini de $\pi_1(X,x)$, est une équivalence de catégories.

Ici, encore, on a $\mathrm{Aut}(\mathrm{Fib}_x) \cong \widehat{\pi_1(X,x)}$.

Le groupe fondamental étale

Revêtements étales

En géométrie algébrique, on remplace la notion de revêtement topologique par celle de *revêtement étale*.

$$\boxed{\text{Revêtement topologique}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Revêtement étale}}$$

La condition de « trivialité » locale de la définition topologique est remplacée par une condition algébrique analogue, à savoir qu'un certain discriminant ne s'annule pas localement.

Définition - Groupe fondamental étale

Soit X un schéma connexe et $\overline{x}$ un point géométrique (i.e. un morphisme $\operatorname{Spec}\Omega \to X$, où Ω est un corps algébriquement clos). Comme avant on construit un foncteur fibre $\mathrm{Fib}_{\overline{x}}$ de la catégorie des revêtements étales finis de X vers la catégorie des ensembles finis. Alors le *groupe fondamental* $\pi_1(X, \overline{x})$ est défini comme étant $\mathrm{Aut}(\mathrm{Fib}_{\overline{x}})$.

Définition - Groupe fondamental étale

Soit X un schéma connexe et $\overline{x}$ un point géométrique (i.e. un morphisme $\operatorname{Spec}\Omega \to X$, où Ω est un corps algébriquement clos). Comme avant on construit un foncteur fibre $\mathrm{Fib}_{\overline{x}}$ de la catégorie des revêtements étales finis de X vers la catégorie des ensembles finis. Alors le *groupe fondamental* $\pi_1(X, \overline{x})$ est défini comme étant $\mathrm{Aut}(\mathrm{Fib}_{\overline{x}})$.

En fait, $\pi_1(X, \overline{x})$ admet une topologie naturelle qui en fait un groupe profini et il agit continûment sur $\mathrm{Fib}_{\overline{x}}(Y)$ pour tout revêtement étale fini $Y \to X$.

Théorème - Classification des revêtements étales

Supposons X un schéma connexe et $\overline{x}$ un point géométrique de X. Alors le foncteur fibre $\mathrm{Fib}_{\overline{x}}$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Revêtements} \\ \text{étales finis} \\ \text{de } X \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \pi_1(X, \overline{x})\text{-} \\ \text{ensembles} \\ \text{continus} \end{array} \right\}$$

induit une équivalence de catégories.

Théorie des corps

Soit L/k une extension de corps. Alors $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} k$ est un revêtement étale fini si et seulement si L est une extension finie séparable de k.

Théorie de Galois

Soit k un corps et $X = \operatorname{Spec} k$. Dans ce cas, un point géométrique $\overline{x}$ correspond au choix d'une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Alors $\pi_1(X, \overline{x}) \cong \operatorname{Gal}(k_s | k)$ est le groupe de Galois absolu de k, où k_s est la fermeture séparable de k dans $\overline{k}$.

Théorie de Galois

Soit k un corps et $X = \operatorname{Spec} k$. Dans ce cas, un point géométrique $\overline{x}$ correspond au choix d'une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Alors $\pi_1(X, \overline{x}) \cong \mathrm{Gal}(k_s|k)$ est le groupe de Galois absolu de k, où k_s est la fermeture séparable de k dans $\overline{k}$.

Compte tenu de cet exemple, le théorème fondamental de la théorie de Galois est un cas particulier de la classification des revêtements finis étales.

Théorie algébrique des nombres

Soient $K \subset L$ des corps de nombres et $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_L$ sont leurs anneaux d'entiers. Alors $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_L \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ est un revêtement étale si et seulement si l'extension L/K est non ramifiée. De plus, tout revêtement étale connexe de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ est de cette forme. Par le théorème de Minkowski, $\pi_1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})$ est trivial.

Droite affine / projective

Soit k un corps. Alors $\pi_1(\mathbb{P}^1_k) \cong \pi_1(\operatorname{Spec} k) \cong \operatorname{Gal}(k_s|k)$. Si de plus car $k = 0$, alors $\pi_1(\mathbb{A}^1_k) \cong \pi_1(\operatorname{Spec} k) \cong \operatorname{Gal}(k_s|k)$.

Droite affine / projective

Soit k un corps. Alors $\pi_1(\mathbb{P}^1_k) \cong \pi_1(\operatorname{Spec} k) \cong \operatorname{Gal}(k_s|k)$. Si de plus car $k = 0$, alors $\pi_1(\mathbb{A}^1_k) \cong \pi_1(\operatorname{Spec} k) \cong \operatorname{Gal}(k_s|k)$.

En particulier, $\pi_1(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) = \pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \{1\}$ comme attendu.

Un théorème de Vistoli

En fait, tout groupe profini est le π_1 d'un schéma connexe.[1]

1. Voir bit.ly/3lEdUH9. (Réponse d'Angelo Vistoli sur MathOverflow.)

Le cas d'un schéma sur $\mathbb{C}$

L'analytifié (cas affine)

Soit X un schéma affine de type fini sur $\mathbb{C}$ (i.e. de la forme $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$).
Étant donné une surjection $\varphi : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$, on obtient une inclusion [2]

$$X(\mathbb{C}) = \operatorname{Specm} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I \hookrightarrow \operatorname{Specm} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{C}^n,$$

où $X(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points $\mathbb{C}$-rationnels de X.

2. Par le lemme de Zariski.

L'analytifié (cas affine)

Soit X un schéma affine de type fini sur $\mathbb{C}$ (i.e. de la forme $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$).
Étant donné une surjection $\varphi : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$, on obtient une inclusion [2]

$$X(\mathbb{C}) = \operatorname{Specm} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I \hookrightarrow \operatorname{Specm} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{C}^n,$$

où $X(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points $\mathbb{C}$-rationnels de X.

On obtient alors une topologie analytique sur $X(\mathbb{C})$.

2. Par le lemme de Zariski.

Définition - Analytifié

Soit X un schéma localement de type fini sur $\mathbb{C}$. Comme X est recouvert par des ouverts affines, en « recollant » les topologies analytiques de ces ouverts on obtient une topologie analytique sur $X(\mathbb{C})$. L'espace topologique obtenu est l'*analytifié* de X et est désigné par X^{an}.

Si $Y \to X$ est un revêtement étale de X, il n'est pas difficile de montrer que $Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ est un revêtement topologique de X^{an}.

Si $Y \to X$ est un revêtement étale de X, il n'est pas difficile de montrer que $Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ est un revêtement topologique de X^{an}.

La question inverse est beaucoup plus difficile : est-ce que tout revêtement topologique $Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ est l'analytifié d'un revêtement étale ?

La réponse est oui !

Théorème - GAGA

Soit X un schéma localement de type fini sur $\mathbb{C}$. Alors le foncteur d'analytification induit une équivalence de catégories

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Revêtements}\\ \text{étales finis}\\ \text{de } X\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Revêtements}\\ \text{topologiques}\\ \text{finis de } X^{\mathrm{an}}\end{array}\right\}.$$

En particulier, pour un point $\mathbb{C}$-rationnel $\overline{x}$, $\pi_1(X, \overline{x}) \cong \widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}, \overline{x})}$.

En particulier, si X est une courbe propre (projective), lisse et connexe de genre g sur $\mathbb{C}$, le théorème précédent implique que $\pi_1(X)$ est le complété profini de

$$\Gamma_g := \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

En particulier, si X est une courbe propre (projective), lisse et connexe de genre g sur $\mathbb{C}$, le théorème précédent implique que $\pi_1(X)$ est le complété profini de

$$\Gamma_g := \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

Un théorème de Serre et Lang nous permet d'étendre ce résultat au cas d'une courbe sur un corps algébrique clos de caractéristique 0 quelconque.

Et en caractéristique première ?

Et en caractéristique première ? Ce fut le premier grand succès de la théorie des schémas !

Théorème - Grothendieck

Soit X une courbe propre, lisse et connexe de genre g sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Alors

$$\pi_1(X)^{(p')} \cong \widehat{\Gamma_g}^{(p')},$$

où (p') désigne le quotient maximal d'ordre premier à p.

Les domaines de recherche qui en découlent

Étant donné une catégorie **C** et un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$, Grothendieck a découvert un ensemble d'axiomes qui garantissent que **C** soit équivalente à la catégorie des Aut(F)-ensembles continus.[3]

3. Dans ce cas, Aut(F) admet une topologie naturelle qui en fait un groupe profini.

Considérons la généralisation de la dualité de Pontryagin ci-dessous.

Théorème - Dualité de Tannaka-Krein

Soit G un groupe compact. Alors G est déterminé par sa catégorie de représentations $\Pi(G)$.

Considérons la généralisation de la dualité de Pontryagin ci-dessous.

Théorème - Dualité de Tannaka-Krein

Soit G un groupe compact. Alors G est déterminé par sa catégorie de représentations $\Pi(G)$.

En utilisant la notion de catégorie tannakienne, qui est une sorte de variante « linéaire » de la notion de catégorie galoisienne, Grothendieck a pu prouver un analogue de ce théorème pour les groupes algébriques.

Ce résultat peut permettre de construire le groupe de Galois motivique. Cela peut, entre autres, éclairer la conjecture de Hodge.

Ce résultat peut permettre de construire le groupe de Galois motivique. Cela peut, entre autres, éclairer la conjecture de Hodge.
En outre, le formalisme Tannakien a des applications dans le programme de Langlands.

Merci de votre attention !