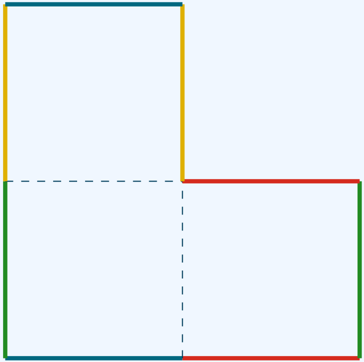
Volumes de Masur-Veech des Espaces de Modules

Gabriel RIBEIRO

École Polytechnique

14 mai 2019



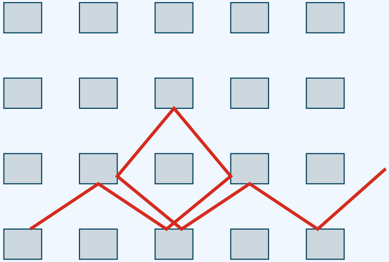
Plan

- Une Motivation Physique
- Surfaces de Riemann
- Théorie de Teichmüller
- Calcul d’un Volume de Masur-Veech
- Une Nouvelle Approche aux Volumes

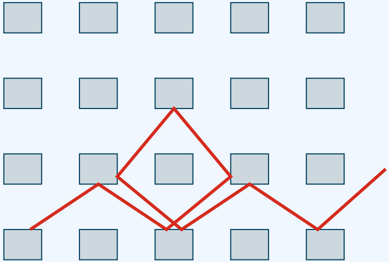
Une Motivation Physique

Le modèle d'Ehrenfest (1912)

Considérons un billard sur le plan avec des obstacles rectangulaires $\mathbb{Z}^2$-périodiques.



Considérons un billard sur le plan avec des obstacles rectangulaires $\mathbb{Z}^2$-périodiques.



Le *taux de diffusion* de ce système est défini comme :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\log(\text{distance après le temps } t)}{\log t}.$$

Lors de l'estimation par une marche aléatoire :

$$\sqrt{\mathbb{E}[|X_t^2|]} = \sigma \cdot t^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \text{taux de diffusion} = \frac{1}{2}.$$

Le modèle d'Ehrenfest (1912)

Lors de l'estimation par une marche aléatoire :

$$\sqrt{\mathbb{E}[|X_t^2|]} = \sigma \cdot t^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \text{taux de diffusion} = \frac{1}{2}.$$

Conjecture - Hardy, Weber (1980)

Le taux de diffusion pour le modèle d'Ehrenfest n'est pas 1/2.

Le modèle d'Ehrenfest (1912)

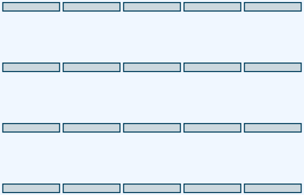
Théorème - Delecroix, Hubert, Lelièvre (2014)

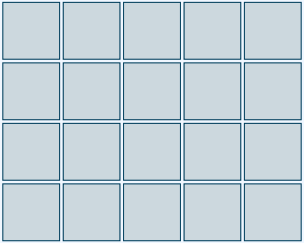
Le taux de diffusion pour le modèle d'Ehrenfest est $2/3$.

Le modèle d'Ehrenfest (1912)

Théorème - Delecroix, Hubert, Lelièvre (2014)

Le taux de diffusion pour le modèle d'Ehrenfest est $2/3$.





Théorème - Delecroix, Hubert, Lelièvre (2014)

Le taux de diffusion pour le modèle d'Ehrenfest est $2/3$.

Ce $2/3$ est un volume de Masur-Veech !

Surfaces de Riemann

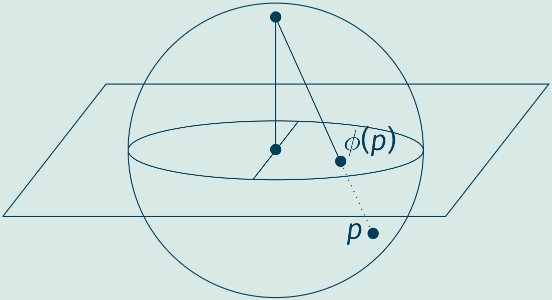
Définition - Surface de Riemann

Une *surface de Riemann* est un espace topologique (séparé, connexe) localement homéomorphe à $\mathbb{C}$.

Définition - Surface de Riemann

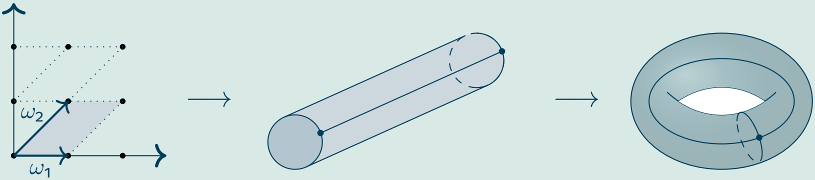
Une *surface de Riemann* est un espace topologique (séparé, connexe) localement homéomorphe à $\mathbb{C}$.

Sphère de Riemann



Tores complexes

Étant donné un réseau $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$, on forme le tore $\mathbb{C}/\Lambda$.



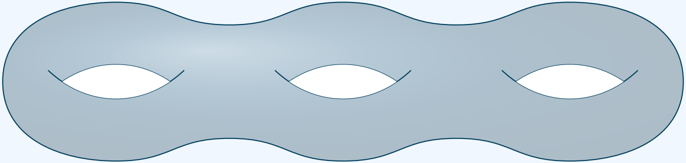
Tout tore complexe est équivalent à $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$, où $\mathrm{Im}\, \tau > 0$.

Une première approche : **équivalentes** $\iff$ **homéomorphes**.

Une première approche : **équivalentes** $\iff$ **homéomorphes**.

Théorème

Soit X une surface de Riemann compacte. Alors il existe un unique entier $g \geq 0$ tel que X soit homéomorphe à un tore à g trous. On appelle cet entier le *genre* de X.



Cette classification est trop grossière : on oublie la structure complexe.

Cette classification est trop grossière : on oublie la structure complexe.

Une seconde approche : **équivalentes** $\iff$ **biholomorphes**.

Définition - Espace de modules

L'*espace de modules* $\mathcal{M}_g$ est l'ensemble des classes de biholomorphisme de surfaces de genre g.

Théorème d'uniformisation - Poincaré, Koebe

- Si $g = 0$, il n'y a qu'une surface de Riemann : la sphère de Riemann.
- Si $g = 1$, toute surface de Riemann est biholomorphe à un tore complexe.

Théorème d'uniformisation - Poincaré, Koebe

- Si $g = 0$, il n'y a qu'une surface de Riemann : la sphère de Riemann.
- Si $g = 1$, toute surface de Riemann est biholomorphe à un tore complexe.

En général, pour $g > 1$, $\mathcal{M}_g$ est localement isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^{3g-3}$.

Théorie de Teichmüller

En pratique, $\mathcal{M}_g$ a une construction technique lui conférant une topologie. En effectuant une petite modification, on obtient :

Définition - $\mathcal{H}_g$

L'*espace de modules des différentielles abéliennes* $\mathcal{H}_g$ est l'espace de toutes les paires (X, ω), où ω est une 1-forme holomorphe et X est une surface de Riemann de genre g, quotienté par un groupe approprié.

Stratification

L'espace $\mathcal{H}_g$ est une union disjointe de composants de différentes dimensions!

L'espace $\mathcal{H}_g$ est une union disjointe de composants de différentes dimensions !

Définition - Strate

On dénote par $\mathcal{H}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}_g$ composé des paires (X, ω) telles que ω a des zéros d'ordre $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ (par ordre décroissant).

L'espace $\mathcal{H}_g$ est une union disjointe de composants de différentes dimensions!

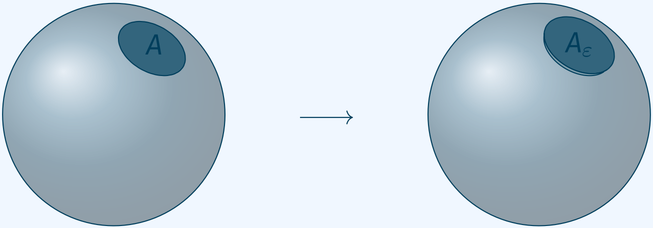
Définition - Strate

On dénote par $\mathcal{H}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}_g$ composé des paires (X, ω) telles que ω a des zéros d'ordre $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ (par ordre décroissant).

Par un théorème de Riemann et Hurwitz, on a toujours

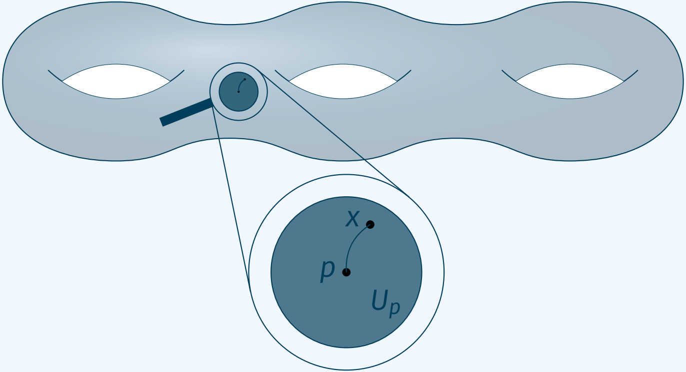
$$\kappa_1 + \ldots + \kappa_n = 2g - 2.$$

Tout comme $\mathcal{M}_g$ est loc. isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^{3g-3}$, $\mathcal{H}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ est loc. isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^{2g+n-1}$. On peut donc utiliser la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^d$ pour définir une mesure de surface sur une hyper-surface de $\mathcal{H}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$.

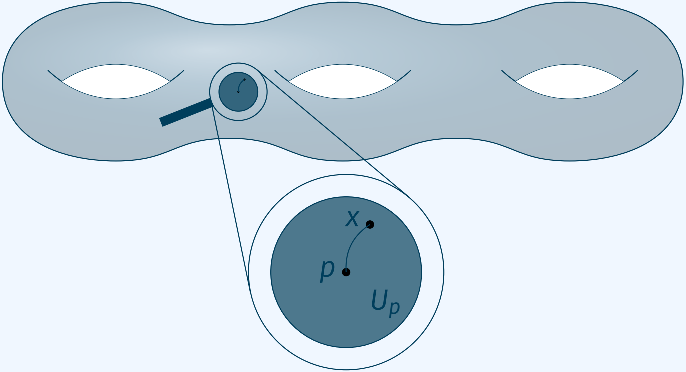


On note cette mesure par $\mathrm{Vol}(\mathcal{H}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n))$.

Étant donné une paire (X, ω), on prend un voisinage U_p de $p \in X$ et on considère l'application $\varphi_p : U_p \to \mathbb{C}$, $\varphi_p(x) := \int_p^x \omega$.

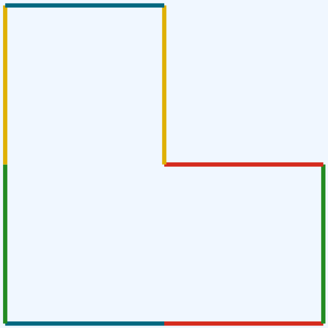


Étant donné une paire (X, ω), on prend un voisinage U_p de $p \in X$ et on considère l'application $\varphi_p : U_p \to \mathbb{C}$, $\varphi_p(x) := \int_p^x \omega$.

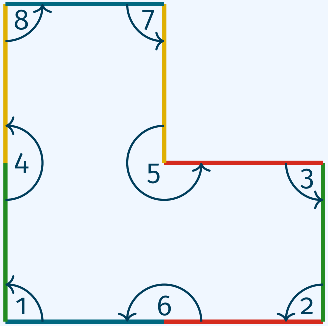


$$\int_p^x \omega = \int_q^x \omega + \int_p^q \omega \quad \Rightarrow \quad \varphi_p \circ \varphi_q^{-1}(z) = z + \int_p^q \omega.$$

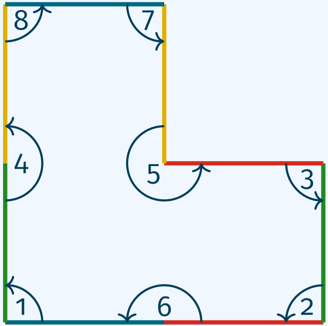
On considère un cas particulier de surface de translation : les *surfaces à petits carreaux*.



On considère un cas particulier de surface de translation : les *surfaces à petits carreaux*.



On considère un cas particulier de surface de translation : les *surfaces à petits carreaux*.

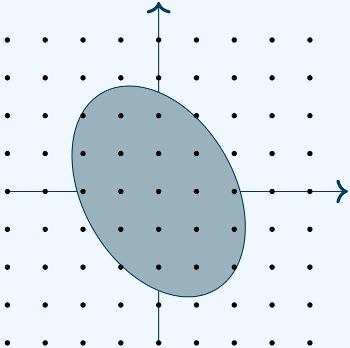


X a des singularités coniques d'angles $2\pi(\kappa_1 + 1), \ldots, 2\pi(\kappa_n + 1)$

$$\Rightarrow \quad X \in \mathcal{H}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n).$$

L'Approche Géométrique aux Volumes de Teichmüller

Cette méthode, remontant à Gauss, consiste à approximer la mesure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ par le nombre de points entiers qu'il contient.



$$\#\{\text{points entiers contenus dans } rA\} \sim \mathrm{Vol}(rA) = \mathrm{Vol}(A)r^n$$

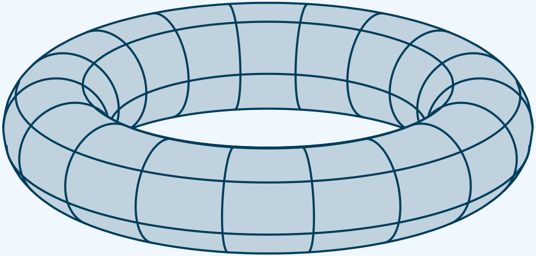
Théorème

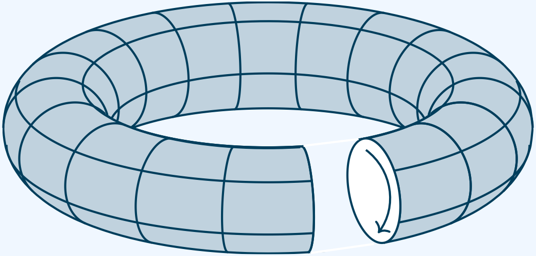
Soit $m(r)$ le nombre de surfaces à petits carreaux avec des singularités coniques d'angles $2\pi(\kappa_1 + 1), \ldots, 2\pi(\kappa_n + 1)$ que peuvent être construites avec au plus r carrés. Alors,

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{H}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)) = 2(2g + n - 1)c,$$

où c est telle que $m(r) \sim c \cdot r^{2g+n-1}$ lorsque r tend vers l'infini.

Il suffit de compter le nombre de façons de paver un tore topologique avec au plus r carrés de telle sorte que les tores complexes résultants ne soient pas isomorphes.





$$\sum_{\substack{v,h\in\mathbb{N}\\ vh\leq r}} v = \sum_{\substack{v,h\in\mathbb{N}\\ v\leq r/h}} v = \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{\lfloor r/h\rfloor} v \sim \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{h^2} = \frac{r^2}{2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^2} = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\mathrm{Vol}(\mathcal{H}(0)) = \frac{\pi^2}{3}.}$$

Cette méthode nous permet de calculer d'autres volumes pour κ petit. On peut également montrer que

$$\boxed{\mathrm{Vol}(\mathcal{H}(2)) = \frac{\pi^4}{120}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{Vol}(\mathcal{H}(1,1)) = \frac{\pi^4}{270}}.$$

Cette méthode nous permet de calculer d'autres volumes pour κ petit. On peut également montrer que

$$\boxed{\mathrm{Vol}(\mathcal{H}(2)) = \frac{\pi^4}{120}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{Vol}(\mathcal{H}(1,1)) = \frac{\pi^4}{270}}.$$

Conjecture

Les volumes de Teichmüller sont toujours des multiples rationnels de π^{2g}. En d'autres termes,

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{H}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n))\pi^{-2g} \in \mathbb{Q},$$

où $\kappa_1 + \cdots + \kappa_n = 2g - 2$.

L'Approche Algébrique aux Volumes de Teichmüller

Pourquoi une nouvelle approche ?

- Le calcul des volumes pour $g > 0$ devient des comptes sur les fonctions multi-zêta :

$$\zeta(s_1, \ldots, s_\ell) := \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_\ell \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_\ell^{s_\ell}}.$$

L'étude de ces fonctions est très actuelle, ce qui rend leur utilisation difficile.

Pourquoi une nouvelle approche ?

- Le calcul des volumes pour $g > 0$ devient des comptes sur les fonctions multi-zêta :

$$\zeta(s_1, \ldots, s_\ell) := \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_\ell \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_\ell^{s_\ell}}.$$

  L'étude de ces fonctions est très actuelle, ce qui rend leur utilisation difficile.

- L'approche initiale n'est pas systématique : elle nécessite de nouveaux calculs combinatoires pour chaque volume. Il est donc difficile de calculer ces volumes sur l'ordinateur.

On considère le nombre $\mathcal{C}_d(\kappa)$ de surfaces à petits carreaux avec singularités coniques donnés qui peuvent être construites avec d carrés.

- La série génératrice $q \mapsto \sum_{d=0}^{\infty} q^d \mathcal{C}_d(\kappa)$ est *quasi-modulaire*.

On considère le nombre $\mathcal{C}_d(\kappa)$ de surfaces à petits carreaux avec singularités coniques donnés qui peuvent être construites avec d carrés.

- La série génératrice $q \mapsto \sum_{d=0}^{\infty} q^d \mathcal{C}_d(\kappa)$ est *quasi-modulaire*.

Cela nous permet de conclure que :

Théorème

Les volumes de Masur-Veech sont toujours des multiples rationnels de π^{2g}.

Merci de votre attention !

Diapositive extra 1 - L'approche algébrique

Cette approche est basée sur une certaine forme multilinéaire

$$\langle \cdot | \dots | \cdot \rangle_h : \Lambda^* \times \cdots \times \Lambda^* \to \mathbb{C}[h^{-1}],$$

où Λ^* est une algèbre similaire à celle des fonctions symétriques.
Cette forme est telle que

$$\langle f_{\kappa_1+1} | \dots | f_{\kappa_n+1} \rangle_h = \mathrm{Vol}(\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)) \frac{(2g+n-2)!}{2h^{2g+n-1}} + \cdots ,$$

où les f_k sont des fonctions dérivées de la théorie des représentations du groupe symétrique et les points représentent les termes de degré inférieur en h^{-1}.

Diapositive extra 2 - L'approche algébrique

Le calcul de cette forme est basé sur les étapes suivantes :

- On écrit les fonctions f_k en termes des fonctions p_k définies par

$$p_k(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \left[(x_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k\right] + (1 - 2^{-k})\zeta(-k),$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann.

Diapositive extra 2 - L'approche algébrique

Le calcul de cette forme est basé sur les étapes suivantes :

- On écrit les fonctions f_k en termes des fonctions p_k définies par

$$p_k(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \left[(x_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k \right] + (1 - 2^{-k})\zeta(-k),$$

  où ζ est la fonction zêta de Riemann.
- En utilisant la multilinéarité de $\langle \cdot | \ldots | \cdot \rangle_h$, il suffit de calculer $\langle p_{\kappa_1} | \ldots | p_{\kappa_n} \rangle_h$, qui est de la forme

$$\langle p_{\kappa_1} | \ldots | p_{\kappa_n} \rangle_h = \frac{\langle\!\langle \kappa \rangle\!\rangle}{h^{2g-1}} + \cdots ,$$

  où les $\langle\!\langle \kappa \rangle\!\rangle$ sont des constantes que l'on appelle des *cumulants élémentaires*.

Diapositive extra 2 - L'approche algébrique

Le calcul de cette forme est basé sur les étapes suivantes :

- On écrit les fonctions f_k en termes des fonctions p_k définies par

$$p_k(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \left[(x_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k \right] + (1 - 2^{-k})\zeta(-k),$$

  où ζ est la fonction zêta de Riemann.
- En utilisant la multilinéarité de $\langle \cdot | \ldots | \cdot \rangle_h$, il suffit de calculer $\langle p_{\kappa_1} | \ldots | p_{\kappa_n} \rangle_h$, qui est de la forme

$$\langle p_{\kappa_1} | \ldots | p_{\kappa_n} \rangle_h = \frac{\langle\!\langle \kappa \rangle\!\rangle}{h^{2g-1}} + \cdots ,$$

  où les $\langle\!\langle \kappa \rangle\!\rangle$ sont des constantes que l'on appelle des *cumulants élémentaires*.
- Enfin, on calcule les cumulants $\langle\!\langle \kappa \rangle\!\rangle$ en termes des valeurs de la fonction zêta aux entiers positives paires.

Diapositive extra 3 - L'approche géométrique