Le Formalisme Tannakien pour les D-modules

Soutenance de Stage M2

Gabriel Ribeiro

École Polytechnique

Plan

Motivation

Sommes exponentielles

Question fondamentale : pour $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, est-ce que $f = 0$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^n$?

Sommes exponentielles

Question fondamentale : pour $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, est-ce que $f = 0$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^n$?

Variante : est-ce que $f = N$ a des solutions pour N assez grand ?

Question fondamentale : pour $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, est-ce que $f = 0$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^n$?

Variante : est-ce que $f = N$ a des solutions pour N assez grand ?

On considère l'application $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$t \mapsto \mathsf{Sol}(f, p, t) := \#\{\text{solutions de } f \equiv t \pmod{p}\}.$$

Sommes exponentielles

On ne perd aucune information si l'on passe à sa transformée de Fourier

$$\psi \mapsto \sum_{t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \psi(t)\,\mathrm{Sol}(f, p, t) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n} \psi(f(x)).$$

Sommes exponentielles

On ne perd aucune information si l'on passe à sa transformée de Fourier

$$\psi \mapsto \sum_{t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \psi(t)\,\mathrm{Sol}(f, p, t) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n} \psi(f(x)).$$

Comme $\widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, cela s'identifie à

$$t \mapsto \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n} \exp\left(\frac{2\pi i t f(x)}{p}\right).$$

On ne perd aucune information si l'on passe à sa transformée de Fourier

$$\psi \mapsto \sum_{t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \psi(t)\, \mathrm{Sol}(f, p, t) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n} \psi(f(x)).$$

Comme $\widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, cela s'identifie à

$$t \mapsto \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n} \exp\left(\frac{2\pi i t f(x)}{p}\right).$$

On dit qu'il s'agit d'une somme exponentielle.

Interprétation cohomologique

Soit M un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{A}^1$. Dans le cas lisse, on obtient une fonction $\mathrm{tr}_M : \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}_\ell} \cong \mathbb{C}$ en évaluant la représentation ℓ-adique associée en Frob_x et prenant la trace (qui est indépendant du choix du Frobenius) pour tout $x \in \mathbb{F}_p = \mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$.

Soit M un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{A}^1$. Dans le cas lisse, on obtient une fonction $\mathrm{tr}_M : \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}_\ell} \cong \mathbb{C}$ en évaluant la représentation ℓ-adique associée en Frob_x et prenant la trace (qui est indépendant du choix du Frobenius) pour tout $x \in \mathbb{F}_p = \mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$.

Comme avant, on considère sa transformée de Fourier (sous l'identification $\widehat{\mathbb{F}_p} \cong \mathbb{F}_p$)

$$t \mapsto \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \exp\left(\frac{2\pi i t x}{p}\right) \mathrm{tr}_M(x).$$

Interprétation cohomologique

Existe-t-il un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{A}^1$ dont la trace est la somme d'avant ?

Interprétation cohomologique

Existe-t-il un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{A}^1$ dont la trace est la somme d'avant ? **Oui !** C'est la transformée de Fourier-Deligne $\widehat{M}$, qui est lisse sur un ouvert dense U.

Interprétation cohomologique

Existe-t-il un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{A}^1$ dont la trace est la somme d'avant ? **Oui !** C'est la transformée de Fourier-Deligne $\widehat{M}$, qui est lisse sur un ouvert dense U.

La formule des traces implique alors que la trace de $\widehat{\mathsf{R}f_!\underline{\mathbb{Q}_\ell}}$ est la somme exponentielle voulue.

Interprétation cohomologique

On a un groupe algébrique associé à notre somme exponentielle :

$$G_p := \text{clôture de Zariski de } \rho(\pi_1^{\text{geom}}(U)),$$

où $\pi_1^{\text{geom}}(U) = \pi_1(U \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_p}))$ et ρ est la représentation ℓ-adique associée à $\widehat{\mathrm{R}f_!\underline{\mathbb{Q}_\ell}}$ sur U.

C'est le groupe de monodromie.

Et après ?

Le point saillant ici est que les sommes de la forme

$$\psi \mapsto \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \mathrm{tr}_M(x)\psi(x)$$

sont la trace d'un faisceau ℓ-adique dans la droite affine duale que paramétrise les caractères additifs.

Et après ?

Le point saillant ici est que les sommes de la forme

$$\psi \mapsto \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \mathrm{tr}_M(x)\psi(x)$$

sont la trace d'un faisceau ℓ-adique dans la droite affine duale que paramétrise les caractères additifs.

Ce n'est plus vrai lorsque l'on s'intéresse aux caractères multiplicatifs !

Et après ?

Néanmoins, N. Katz a pu étudier les sommes de la forme

$$\chi \mapsto \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \mathrm{tr}_M(x)\chi(x),$$

où maintenant χ est un caractère multiplicatif et M est un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{G}_m$.

Et après ?

Néanmoins, N. Katz a pu étudier les sommes de la forme

$$\chi \mapsto \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \mathrm{tr}_M(x)\chi(x),$$

où maintenant χ est un caractère multiplicatif et M est un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{G}_m$.

L'idée centrale est d'utiliser le formalisme tannakien pour produire les groupes de monodromie.

L'objectif de cette présentation

Notre objectif est alors de comprendre la procédure analogue en caractéristique 0, où nous utilisons des $\mathcal{D}$-modules à la place des faisceaux ℓ-adiques.

Formalisme Tannakien

Histoire

- (1934) Dualité de Pontryagin : nous pouvons récupérer un groupe LCA G à partir de son groupe de caractères $\widehat{G}$.

Histoire

- (1934) Dualité de Pontryagin : nous pouvons récupérer un groupe LCA G à partir de son groupe de caractères $\widehat{G}$.
- (1938) Dualité de Tannaka-Krein : nous pouvons récupérer un groupe compact G à partir de sa catégorie de représentations $\Pi(G)$.

Histoire

- (1934) Dualité de Pontryagin : nous pouvons récupérer un groupe LCA G à partir de son groupe de caractères $\widehat{G}$.
- (1938) Dualité de Tannaka-Krein : nous pouvons récupérer un groupe compact G à partir de sa catégorie de représentations $\Pi(G)$.
- (1960?) Grothendieck : nous pouvons récupérer un groupe algébrique linéaire G à partir de sa catégorie de représentations $\Pi(G)$.

Catégories tannakiennes

Une catégorie tannakienne est une catégorie abélienne k-linéaire C avec :

- un bifoncteur « produit tensoriel » $\otimes$ avec des bonnes propriétés ;
- avec une bonne notion de dualité ;
- avec un foncteur fidèle exact $\omega : \mathsf{C} \to k\textbf{-Vect}$ préservant $\otimes$.

Catégories tannakiennes

Une catégorie tannakienne est une catégorie abélienne k-linéaire $\mathbf{C}$ avec :

- un bifoncteur « produit tensoriel » $\otimes$ avec des bonnes propriétés ;
- avec une bonne notion de dualité ;
- avec un foncteur fidèle exact $\omega : \mathbf{C} \to k\text{-}\mathbf{Vect}$ préservant $\otimes$.

On appelle ω un foncteur fibre.

Exemples triviaux

Espaces vectoriels de dimension finie

La catégorie k-**Vect** des k-espaces vectoriels de dimension finie, avec $\omega = \mathrm{id}$, est tannakienne.

Exemples triviaux

Représentations de dimension finie

Soit G un groupe. La catégorie $\mathsf{Rep}_k(G)$ des représentations de dimension finie de G, avec $\omega =$ foncteur d'oubli, est tannakienne.

Exemple

Systèmes locaux

Soit X un espace topologique connexe et $x \in X$. La catégorie des systèmes locaux $\mathsf{Loc}_k(X)$ de k-espaces vectoriels de dim finie, avec le foncteur fibre

$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x,$$

est tannakienne.

Théorème principal

Théorème principal des cat. tannakiennes

Soit C une catégorie tannakienne sur k. Alors, il existe un schéma en groupes affine G tel que $\mathsf{C} \cong \mathsf{Rep}_k(G)$.

Exemple

Enveloppe algébrique

Soit G un groupe. La catégorie $\mathbf{Rep}_k(G)$ est alors équivalente à la cat. des représentations d'un schéma en groupes G^{alg}.

La categorie engendrée par un élément

Soit (C, ω) une cat. tannakienne et $M \in \mathsf{C}$. On dénote par $\langle M \rangle$ la plus petite sous-catégorie tannakienne de C contenant M.

La categorie engendrée par un élément

Soit (C, ω) une cat. tannakienne et $M \in \mathsf{C}$. On dénote par $\langle M \rangle$ la plus petite sous-catégorie tannakienne de C contenant M.

Le groupe G associé à C agit naturellement sur $\omega(M)$, définissant un morphisme $G \to \mathrm{GL}(\omega(M))$.

La categorie engendrée par un élément

Soit (C, ω) une cat. tannakienne et $M \in \mathsf{C}$. On dénote par $\langle M \rangle$ la plus petite sous-catégorie tannakienne de C contenant M.

Le groupe G associé à C agit naturellement sur $\omega(M)$, définissant un morphisme $G \to \mathrm{GL}(\omega(M))$.

Proposition

L'image G_M de ce morphisme est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(\omega(M))$ et coïncide avec le groupe tannakien de $\langle M \rangle$.

D-modules

Motivation

Soit $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau de fonctions globales de $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$. On dénote $\mathcal{D} := A\langle \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$.

Motivation

Soit $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau de fonctions globales de $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$. On dénote $\mathcal{D} := A\langle \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$.

On veut comprendre les solutions f à l'équation différentielle $Lf = 0$, où $L \in D$ et $f \in A$. D'après Sato, on considère le D-module à gauche $M = D/DL$ et on observe que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_D(M, A) &= \mathrm{Hom}_D(D/DL, A) \\ &\cong \{\varphi \in \mathrm{Hom}_D(D, A) \mid \varphi(L) = 0\} \\ &\cong \{f \in A \mid Lf = 0\}. \end{aligned}$$

Définition

Soit X une variété algébrique lisse sur $\mathbb{C}$. Le faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X$ est le sous-faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres de $\underline{\mathrm{End}}(\mathcal{O}_X)$ engendré par $\mathcal{O}_X$ et Θ_X.

On définit le foncteur de dualité $\mathbb{D}_X : \mathsf{D}^b(\mathcal{D}_X) \to \mathsf{D}^b(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}}$ comme

$$\mathbb{D}_X M^\bullet := \left(\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(M^\bullet, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^\vee\right)[\dim X].$$

On définit le foncteur de dualité $\mathbb{D}_X : \mathsf{D}^b(\mathcal{D}_X) \to \mathsf{D}^b(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}}$ comme

$$\mathbb{D}_X M^\bullet := \left(\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(M^\bullet, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^\vee\right)[\dim X].$$

On dit qu'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent M est holonôme si $\mathbb{D}_X M$ est un complexe concentré en degré 0.

Le formalisme des six foncteurs

Étand donné un morphisme $f : X \to Y$, nous avons six foncteurs $f_*, f^*, f_!, f^!, \otimes, \mathbb{D}$ satisfaisant les adjonctions

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{D}^b_h(\mathcal{D}_X) \arrow[rr, bend right, "f_*"'] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathsf{D}^b_h(\mathcal{D}_Y) \arrow[ll, bend right, "f^*"']
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
\mathsf{D}^b_h(\mathcal{D}_X) \arrow[rr, bend right, "f_!"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathsf{D}^b_h(\mathcal{D}_Y) \arrow[ll, bend right, "f^!"']
\end{tikzcd}.
$$

Étand donné un morphisme $f : X \to Y$, nous avons six foncteurs $f_*, f^*, f_!, f^!, \otimes, \mathbb{D}$ satisfaisant les adjonctions

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D}^b_h(\mathcal{D}_X) \arrow[rr, phantom, "\perp"] \arrow[rr, bend right, "f_*"'] & & \mathsf{D}^b_h(\mathcal{D}_Y) \arrow[ll, bend right, "f^*"'] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathsf{D}^b_h(\mathcal{D}_X) \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[rr, bend right, "f_!"'] & & \mathsf{D}^b_h(\mathcal{D}_Y). \arrow[ll, bend right, "f^!"'] \end{tikzcd}$$

De plus, on a un morphisme « oublie les supports » naturel

$$f_! \to f_*,$$

qui est un isomorphisme si f est propre.

Le groupe tannakien associé à un D-module

Convolution

Soit $m : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ la multiplication et $\mathcal{D}$ le faisceau d'opérateurs différentiels sur $\mathbb{G}_m$.

Convolution

Soit $m : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ la multiplication et $\mathcal{D}$ le faisceau d'opérateurs différentiels sur $\mathbb{G}_m$.

La convolution et la convolution propre de $M^\bullet, N^\bullet \in \mathsf{D}^b_h(\mathcal{D})$ sont définies comme

$$M^\bullet * N^\bullet := m_*(M^\bullet \boxtimes N^\bullet) \qquad \text{et} \qquad M^\bullet *_! N^\bullet := m_!(M^\bullet \boxtimes N^\bullet).$$

Convolution

Proposition

Soient M, N deux $\mathcal{D}$-modules holonômes. Si l'application d'oubli des supports

$$m_*(M \boxtimes N) \to m_!(M \boxtimes N)$$

est un isomorphisme, alors $M * N \cong M *_! N$ est un $\mathcal{D}$-module holonôme.

Modules négligeables

On dit qu'un $\mathcal{D}$-module holonôme M est négligeable si $\chi(\mathbb{G}_m, M) = 0$.

Modules négligeables

On dit qu'un $\mathcal{D}$-module holonôme M est négligeable si $\chi(\mathbb{G}_m, M) = 0$.

La sous-catégorie pleine **Neg** composé par ces modules est épaisse et donc on considère la catégorie quotient $\mathcal{D}$-**hMod**/**Neg**.

Modules négligeables

On dit qu'un $\mathcal{D}$-module holonôme M est négligeable si $\chi(\mathbb{G}_m, M) = 0$.

La sous-catégorie pleine **Neg** composé par ces modules est épaisse et donc on considère la catégorie quotient $\mathcal{D}$-**hMod**/**Neg**.

Les deux notions de convolution descendent au quotient $\mathcal{D}$-**hMod**/**Neg**, où elles coïncident.

La catégorie P

On dénote par P la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$-hMod composée des $\mathcal{D}$-modules holonômes M tels que pour tout $\mathcal{D}$-module holonôme N, les deux convolutions $M * N$ et $M *_! N$ sont dans $\mathcal{D}$-hMod.

La catégorie P

On dénote par P la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$-**hMod** composée des $\mathcal{D}$-modules holonômes M tels que pour tout $\mathcal{D}$-module holonôme N, les deux convolutions $M * N$ et $M *_! N$ sont dans $\mathcal{D}$-**hMod**.

Dans cette catégorie on peut définir une convolution intermédiaire

$$M *_{\text{int}} N := \mathrm{im}\left(M *_! N \to M * N\right).$$

Les deux approches coïncident

Proposition

La composition de l'inclusion $\mathsf{P} \to \mathcal{D}\text{-}\mathsf{hMod}$ avec l'application quotient $\mathcal{D}\text{-}\mathsf{hMod} \to \mathcal{D}\text{-}\mathsf{hMod}/\mathsf{Neg}$ est une équivalence de catégories.

Les deux approches coïncident

Proposition

La composition de l'inclusion $\mathsf{P} \to \mathcal{D}\text{-}\mathsf{hMod}$ avec l'application quotient $\mathcal{D}\text{-}\mathsf{hMod} \to \mathcal{D}\text{-}\mathsf{hMod}/\mathsf{Neg}$ est une équivalence de catégories.

De plus, sous cette équivalence, l'image de la convolution intermédiaire sur P est envoyée à la convolution sur le quotient $\mathcal{D}\text{-}\mathsf{hMod}/\mathsf{Neg}$.

Théorème principal

Théorème principal

Le foncteur $M \mapsto H^0(\mathbb{A}^1, j_! M)$, où $j : \mathbb{G}_m \to \mathbb{A}^1$ est l'inclusion, définit un foncteur fibre donnant à P une structure de catégorie tannakienne.

Merci