Le théorème de Riemann-Roch

Tuteur : Benjamin SCHRAEN

Gabriel RIBEIRO

École Polytechnique

5 mai 2020

Plan

Un peu d'histoire

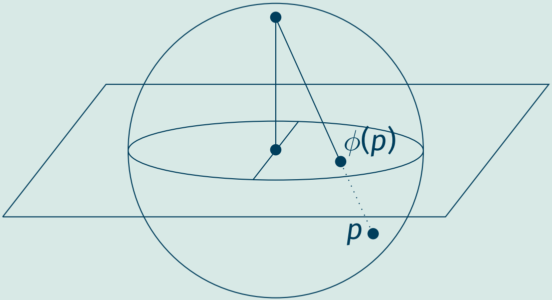
Définition - Surface de Riemann

Une *surface de Riemann* est un espace topologique (séparé, connexe, compact) localement homéomorphe à $\mathbb{C}$.

Définition - Surface de Riemann

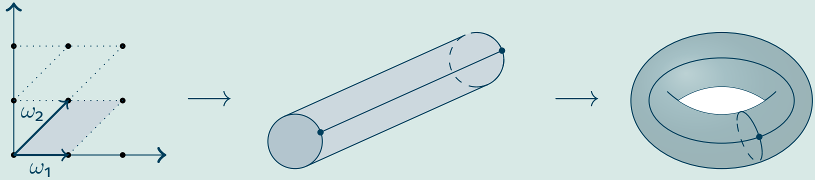
Une *surface de Riemann* est un espace topologique (séparé, connexe, compact) localement homéomorphe à $\mathbb{C}$.

Sphère de Riemann



Tores complexes

Étant donné un réseau $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$, on forme le tore $\mathbb{C}/\Lambda$.



Définition - Corps des fonctions méromorphes

Soit X une surface de Riemann. On dénote par $\mathcal{M}(X)$ le corps des fonctions méromorphes.

Définition - Corps des fonctions méromorphes

Soit X une surface de Riemann. On dénote par $\mathcal{M}(X)$ le corps des fonctions méromorphes.

Théorème

La catégorie des surfaces de Riemann est (anti-)équivalente à celle des extensions finies de $\mathbb{C}(t)$.

Bien sûr, $\mathbb{C}$ est un sous-corps de $\mathcal{M}(X)$. Existe-t-il d'autres fonctions méromorphes ?

Bien sûr, $\mathbb{C}$ est un sous-corps de $\mathcal{M}(X)$. Existe-t-il d'autres fonctions méromorphes ? **Oui !**

Théorème d'existence de Riemann

Si $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, il existe $f \in \mathcal{M}(X)$ telle que $f(x_i) = a_i$ pour tout i.

Question : étant donné $x_1, \ldots, x_n \in X$, *combien* de $f \in \mathcal{M}(X)$ ont un pôle / zéro en $x_1, \ldots, x_n$?

Définition - Diviseur

Le *groupe des diviseurs* $\mathrm{Div}(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les points de X.

Définition - Diviseur

Le *groupe des diviseurs* $\mathrm{Div}(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les points de X.

En d'autres termes, un diviseur D est une somme formelle (finie)

$$D = \sum_{p \in X} n_p[p],$$

où $n_p \in \mathbb{Z}$. On dit que $D \geq 0$ si $n_p \geq 0$ pour tout $p \in X$. Aussi, son *degré* $\deg(D)$ est la somme de ses coefficients.

Étant donné une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(X)$, on l'associe le diviseur

$$\mathrm{div}(f) := \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f)[p].$$

Étant donné une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(X)$, on l'associe le diviseur

$$\mathrm{div}(f) := \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f)[p].$$

Observons que

$$\mathrm{div}(f) \geq 2[p] - 3[q]$$

nous dit que f est holomorphe sur $X \setminus \{q\}$, que p est un zéro d'ordre au moins 2 et que q est un pôle d'ordre au plus 3.

Enfin, on définit l'espace vectoriel

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \mathcal{M}(X)^* \mid \operatorname{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

et on dénote $\ell(D)$ sa dimension.

Enfin, on définit l'espace vectoriel

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \mathcal{M}(X)^* \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

et on dénote $\ell(D)$ sa dimension.

La question sur la quantité de fonctions méromorphes avec des pôles/zéros donnés se traduit donc par le problème suivant :

Étant donné un diviseur D, comment calculer $\ell(D)$?

L'inégalité de Riemann

En 1857, Bernhard Riemann a prouvé un premier résultat dans cette direction.

Inégalité de Riemann

On a $\ell(D) \geq \deg(D) - g + 1$, où g est le genre de X.

En 1857, Bernhard Riemann a prouvé un premier résultat dans cette direction.

Inégalité de Riemann

On a $\ell(D) \geq \deg(D) - g + 1$, où g est le genre de X.

Alors comment peut-on interpréter l'*erreur*

$$\ell(D) - \deg(D) + g - 1$$

de façon à obtenir une égalité ?

Sept ans plus tard, Gustav Roch, un élève de Riemann, a trouvé une interprétation à ce terme.

Sept ans plus tard, Gustav Roch, un élève de Riemann, a trouvé une interprétation à ce terme.

Si ω est une forme différentielle sur X, on l'associe un diviseur de la même manière que l'on le fait avec les fonctions méromorphes :

$$\mathrm{div}(\omega) := \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(\omega)[p].$$

On dit alors qu'un tel diviseur est un *diviseur canonique*.

Le théorème que Roch a alors prouvé est le suivant :

Théorème de Riemann-Roch

Si K est un diviseur canonique, $\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) - g + 1$.

La version algébrique de Riemann-Roch

Quels sont les analogues algébriques ?

Surface de Riemann $X \iff$ courbe projective régulière C sur $\overline{k}$

Quels sont les analogues algébriques ?

Surface de Riemann $X \iff$ courbe projective régulière C sur $\overline{k}$

Corps de fonctions méromorphes $\mathcal{M}(X) \iff$ corps de fonctions rationnelles $\overline{k}(C)$

Quels sont les analogues algébriques ?

Surface de Riemann $X \iff$ courbe projective régulière C sur $\overline{k}$

Corps de fonctions méromorphes $\mathcal{M}(X) \iff$ corps de fonctions rationnelles $\overline{k}(C)$

Théorème

La catégorie des courbe projective régulière C sur $\overline{k}$ est équivalente à celle des extensions finies de $\mathbb{C}(t)$.

Quels sont les analogues algébriques ?

Tout comme avant :

Définition - Diviseur

Le *groupe des diviseurs* $\mathrm{Div}(C)$ est le groupe abélien libre engendré par les points de C.

Définition - Forme différentielle

L'espace des *formes différentielles* Ω_C est le $\overline{k}(C)$-e.v. engendré par les symboles dx, pour $x \in \overline{k}(C)$, tels que

(i) $d(x+y) = dx + dy$ pour tout $x, y \in \overline{k}(C)$;

(ii) $d(xy) = xdy + ydx$ pour tout $x, y \in \overline{k}(C)$;

(iii) $da = 0$ pour tout $a \in \overline{k}$.

Définition - Forme différentielle

L'espace des *formes différentielles* Ω_C est le $\overline{k}(C)$-e.v. engendré par les symboles dx, pour $x \in \overline{k}(C)$, tels que

(i) $d(x+y) = dx + dy$ pour tout $x, y \in \overline{k}(C)$;

(ii) $d(xy) = xdy + ydx$ pour tout $x, y \in \overline{k}(C)$;

(iii) $da = 0$ pour tout $a \in \overline{k}$.

Tout comme avant, on dit qu'un diviseur de la forme $\mathrm{div}(\omega)$, pour $\omega \in \Omega_C$, est un *diviseur canonique*.

C'est quoi le genre d'une courbe algébrique ?

Dans le cadre d'une surface de Riemann, la théorie de Hodge nous montre que le genre coïncide avec la dimension du espace vectoriel des formes différentielles.

Dans le cadre algébrique, c'est la définition :

$$g := \dim_{\overline{k}} \Omega_C.$$

Tout comme avant, on définit

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \overline{k}(C)^* \mid \operatorname{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Théorème de Riemann-Roch

Si K est un diviseur canonique, $\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) - g + 1$.

Quelques corollaires immédiats

Le cas $D = 0$

Si $D = 0$, le théorème de Riemann-Roch nous dit que

$$\ell(0) - \ell(K) = 1 - g.$$

Le cas $D = 0$

Si $D = 0$, le théorème de Riemann-Roch nous dit que

$$\ell(0) - \ell(K) = 1 - g.$$

Mais $\mathcal{L}(0) = \overline{k}$ et donc $\ell(K) = g$.

Si $D = K$, le théorème de Riemann-Roch nous dit que

$$\ell(K) - \ell(0) = \deg(K) - g + 1.$$

Si $D = K$, le théorème de Riemann-Roch nous dit que

$$\ell(K) - \ell(0) = \deg(K) - g + 1.$$

D'où $\deg(K) = 2g - 2$.

LE CAS $\deg(D) > 2g - 2$

- Observons d'abord que si $\deg(D) > 2g - 2$, alors $\deg(K - D) = \deg(K) - \deg(D) < 0$.

Le cas $\deg(D) > 2g - 2$

- Observons d'abord que si $\deg(D) > 2g - 2$, alors $\deg(K - D) = \deg(K) - \deg(D) < 0$.
- Supposons alors qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{L}(K - D) \setminus \{0\}$.

- Observons d'abord que si $\deg(D) > 2g - 2$, alors $\deg(K - D) = \deg(K) - \deg(D) < 0$.
- Supposons alors qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{L}(K - D) \setminus \{0\}$.
- On peut vérifier que $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ et donc

$$\deg(\mathrm{div}(f) + K - D) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \deg(K - D) \geq 0,$$

ce qui est un absurde !

Le cas $\deg(D) > 2g-2$

- Observons d'abord que si $\deg(D) > 2g-2$, alors $\deg(K-D) = \deg(K) - \deg(D) < 0$.
- Supposons alors qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{L}(K-D) \setminus \{0\}$.
- On peut vérifier que $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ et donc

$$\deg(\mathrm{div}(f) + K - D) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \deg(K-D) \geq 0,$$

  ce qui est un absurde !
- On conclut que $\ell(K-D) = 0$ et donc

$$\ell(D) = \deg(D) - g + 1.$$

Soit C la courbe elliptique définie par

$$y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3).$$

Soit C la courbe elliptique définie par

$$y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3).$$

Tout d'abord, on peut voir que $\deg(dx/y) = 0$ et donc $K = 0$ est un diviseur canonique. Cela implique que

$$g = \ell(K) = \ell(0) = 1.$$

Le cas d'une courbe elliptique

Ensuite, par Riemann-Roch, si $\deg(D) \geq 1$ alors

$$\ell(D) = \deg(D).$$

Ensuite, par Riemann-Roch, si $\deg(D) \geq 1$ alors

$$\ell(D) = \deg(D).$$

Cela implique, en particulier, que $\ell(6[\infty]) = 6$ et donc les sept fonctions

$$1, x, y, x^2, xy, x^3, y^2$$

sont liées.

Ensuite, par Riemann-Roch, si $\deg(D) \geq 1$ alors

$$\ell(D) = \deg(D).$$

Cela implique, en particulier, que $\ell(6[\infty]) = 6$ et donc les sept fonctions

$$1, x, y, x^2, xy, x^3, y^2$$

sont liées.

Ce type de raisonnement implique que une courbe elliptique abstraite est isomorphe à une courbe décrite par une équation de Weierstrass.

L'associativité de la loi de groupe

Commençons par un peu de nomenclature.

Définition - Groupe de Picard

Un diviseur D est dit *principal* si $D = \mathrm{div}(f)$ pour $f \in \overline{k}(C)^*$. Deux diviseurs D_1, D_2 sont *équivalents* si $D_1 - D_2$ est principal. Le quotient de $\mathrm{Div}(C)$ par cette relation d'équivalence est $\mathrm{Pic}(C)$, le *groupe de Picard*.

Commençons par un peu de nomenclature.

Définition - Groupe de Picard

Un diviseur D est dit *principal* si $D = \mathrm{div}(f)$ pour $f \in \overline{k}(C)^*$. Deux diviseurs D_1, D_2 sont *équivalents* si $D_1 - D_2$ est principal. Le quotient de $\mathrm{Div}(C)$ par cette relation d'équivalence est $\mathrm{Pic}(C)$, le *groupe de Picard*.

Enfin, on note par $\mathrm{Div}^0(C)$ (resp. $\mathrm{Pic}^0(C)$) le sous-groupe de $\mathrm{Div}(C)$ (resp. $\mathrm{Pic}(C)$) formé des diviseurs de degré 0.

Lemme

Soit C une courbe elliptique et $p, q \in C$. Alors $[p] \sim [q]$ si et seulement si $p = q$.

Lemme

Soit C une courbe elliptique et $p, q \in C$. Alors $[p] \sim [q]$ si et seulement si $p = q$.

Démonstration : Si $f \in \overline{k}(C)^*$ est telle que $\mathrm{div}(f) = [p] - [q]$, alors $f \in \mathcal{L}([q])$. Mais le théorème de Riemann-Roch nous dit que $\ell([q]) = 1$ et donc $f \in \overline{k}$. $\square$

Théorème

L'application $\kappa : C \to \mathrm{Pic}^0(C)$ définie par

$$p \mapsto \text{classe de } [p] - [\infty]$$

est un isomorphisme de groupes.

Théorème

L'application $\kappa : C \to \mathrm{Pic}^0(C)$ définie par $p \mapsto$ classe de $[p] - [\infty]$ est un isomorphisme de groupes.

Commençons par montrer que κ est une bijection. Si $D \in \mathrm{Div}^0(C)$ est un diviseur de degré 0, le théorème de Riemann-Roch implique que

$$\ell(D + [\infty]) = 1.$$

Théorème

L'application $\kappa : C \to \mathrm{Pic}^0(C)$ définie par $p \mapsto$ classe de $[p] - [\infty]$ est un isomorphisme de groupes.

Soit $f \in \mathcal{L}(D + [\infty]) \setminus \{0\}$. Comme

$$\mathrm{div}(f) \geq -D - [\infty] \qquad \text{et} \qquad \deg(\mathrm{div}(f)) = 0,$$

il existe $p \in C$ tel que $\mathrm{div}(f) = -D - [\infty] - [p]$. D'où $D \sim [p] - [\infty]$.

Théorème

L'application $\kappa : C \to \mathrm{Pic}^0(C)$ définie par $p \mapsto$ classe de $[p] - [\infty]$ est un isomorphisme de groupes.

Ce point p est unique par le lemme. On obtient ainsi un morphisme

$$\sigma : \mathrm{Div}^0(C) \to C.$$

Théorème

L'application $\kappa : C \to \mathrm{Pic}^0(C)$ définie par $p \mapsto$ classe de $[p] - [\infty]$ est un isomorphisme de groupes.

Ce point p est unique par le lemme. On obtient ainsi un morphisme

$$\sigma : \mathrm{Div}^0(C) \to C.$$

Par définition de σ, si $\sigma(D_1) = p_1$ et $\sigma(D_2) = p_2$, alors

$$[p_1] - [p_2] \sim D_1 - D_2$$

et dont $D_1 \sim D_2$ si et seulement si $p_1 = p_2$ (par le lemme).

Théorème

L'application $\kappa : C \to \mathrm{Pic}^0(C)$ définie par $p \mapsto$ classe de $[p] - [\infty]$ est un isomorphisme de groupes.

On en déduit que σ descend vers un morphisme

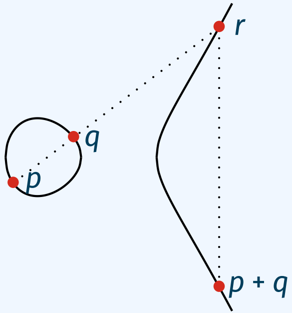
$$\mathrm{Pic}^0(C) \to C,$$

qui est l'inverse de κ. D'où κ est une bijection.

Théorème

L'application $\kappa : C \to \mathrm{Pic}^0(C)$ définie par $p \mapsto$ classe de $[p] - [\infty]$ est un isomorphisme de groupes.

Montrons enfin qu'il s'agit d'un homomorphisme. Soient $p, q \in C$, $f(X, Y, Z) = 0$ la ligne entre p et q, r le troisième point d'intersection et $f'(X, Y, Z) = 0$ la ligne entre r et ∞.



Théorème

L'application $\kappa : C \to \mathrm{Pic}^0(C)$ définie par $p \mapsto$ classe de $[p] - [\infty]$ est un isomorphisme de groupes.

Comme la ligne $Z = 0$ intersecte ∞ avec multiplicité 3, il suit que

$$\mathrm{div}(f/Z) = [p] + [q] + [r] - 3[\infty]$$
$$\mathrm{div}(f'/Z) = [r] + [p + q] - 2[\infty].$$

Une approche algébrique à loi de groupe

Théorème

L'application $\kappa : C \to \mathrm{Pic}^0(C)$ définie par $p \mapsto$ classe de $[p] - [\infty]$ est un isomorphisme de groupes.

Comme la ligne $Z = 0$ intersecte ∞ avec multiplicité 3, il suit que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(f/Z) &= [p] + [q] + [r] - 3[\infty] \\ \mathrm{div}(f'/Z) &= [r] + [p+q] - 2[\infty]. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$[p+q] - [p] - [q] + [\infty] = \mathrm{div}(f'/f) \sim 0$$

et donc $\kappa(p+q) = \kappa(p) + \kappa(q)$.

Généralisations

En géométrie algébrique, il y a une correspondance :

$$\boxed{\text{Diviseurs}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Fibrés en droites}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Faisceaux inversibles}}$$

Réinterprétation du résultat

En géométrie algébrique, il y a une correspondance :

$$\boxed{\text{Diviseurs}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Fibrés en droites}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Faisceaux inversibles}}$$

On peut réécrire le théorème de Riemann-Roch en termes de cohomologie des faisceaux.

Théorème - Riemann-Roch

Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible, alors

$$h^0(C, \mathscr{L}) - h^0(C, \Omega_C \otimes \mathscr{L}^\vee) = \deg(\mathscr{L}) - g + 1,$$

où $h^0(C, \mathscr{F}) := \dim H^0(C, \mathscr{F})$ est la dimension du groupe de cohomologie d'ordre 0 d'un faisceau $\mathscr{F}$.

Dualité de Serre

Comme on a vu, $\deg(K) = 2g - 2$. Dans notre nouvelle langage, cela nous permet d'écrire

$$h^0(C, \mathscr{L}) - \frac{1}{2}\deg(\mathscr{L}) = h^0(C, \Omega_C \otimes \mathscr{L}^\vee) - \frac{1}{2}\deg(\Omega_C \otimes \mathscr{L}^\vee),$$

en faisant de Riemann-Roch un théorème de dualité.

Comme on a vu, $\deg(K) = 2g - 2$. Dans notre nouvelle langage, cela nous permet d'écrire

$$h^0(C, \mathscr{L}) - \frac{1}{2}\deg(\mathscr{L}) = h^0(C, \Omega_C \otimes \mathscr{L}^\vee) - \frac{1}{2}\deg(\Omega_C \otimes \mathscr{L}^\vee),$$

en faisant de Riemann-Roch un théorème de dualité.

Théorème - Dualité de Serre

On a un isomorphisme

$$H^1(C, \mathscr{L}) \cong H^0(C, \Omega_C \otimes \mathscr{L}^\vee)^\vee.$$

D'autres généralisations

Riemann-Roch
en surfaces

Grothendieck-
Riemann-Roch

Thèse de Tate

Théorème
de l'indice
d'Atiyah-Singer

Merci de votre attention !