Présentation EDMH

Gabriel Ribeiro

25 Mai 2021

Études au Brésil (IME et IMPA)

IME

- Article publié dans une revue militaire brésilienne
- Algèbres et groupes de Lie

Études au Brésil (IME et IMPA)

IME

- Article publié dans une revue militaire brésilienne
- Algèbres et groupes de Lie

IMPA

- Invité à faire le master
- Cours de combinatoire (niveau M1)

- Projet sur l'espace de modules des différentielles abéliennes avec C. Matheus

- Projet sur l’espace de modules des différentielles abéliennes avec C. Matheus
- Démonstration adélique de Riemann-Roch avec G. Chenevier et B. Schraen

- Projet sur l'espace de modules des différentielles abéliennes avec C. Matheus
- Démonstration adélique de Riemann-Roch avec G. Chenevier et B. Schraen
- Stage M1 sur la thèse de Tate et le groupe fondamental étale avec A. Ducros

Cycle Ingénieur Polytechnicien

- Projet sur l'espace de modules des différentielles abéliennes avec C. Matheus
- Démonstration adélique de Riemann-Roch avec G. Chenevier et B. Schraen
- Stage M1 sur la thèse de Tate et le groupe fondamental étale avec A. Ducros
- M2 Arithmétique, Analyse, Géométrie à Orsay

Objectif : comprendre les nombreux prérequis du sujet de thèse et effectuer quelques calculs simples.

Stage M2 avec Javier Fresán

Objectif : comprendre les nombreux prérequis du sujet de thèse et effectuer quelques calculs simples.

- Variétés abéliennes
- D-modules et faisceaux pervers
- Weil II
- Cohomologie étale
- Formalisme tannakien
- Théorie de Galois différentielle

Question fondamentale : pour $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, est-ce que $f = 0$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^n$?

Sommes exponentielles

Question fondamentale : pour $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, est-ce que $f = 0$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^n$?

Variante : est-ce que $f = N$ a des solutions pour N assez grand ?

Sommes exponentielles

Question fondamentale : pour $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, est-ce que $f = 0$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^n$?

Variante : est-ce que $f = N$ a des solutions pour N assez grand ?

On considère l'application $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$t \mapsto \mathsf{Sol}(f, p, t) := \#\{\text{solutions de } f \equiv t \pmod{p}\}.$$

On ne perd aucune information si l'on passe à sa transformée de Fourier

$$\psi \mapsto \sum_{t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \psi(t)\,\mathrm{Sol}(f,p,t) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n} \psi(f(x)).$$

On ne perd aucune information si l'on passe à sa transformée de Fourier

$$\psi \mapsto \sum_{t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \psi(t)\,\mathrm{Sol}(f,p,t) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n} \psi(f(x)).$$

Comme $\widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, cela s'identifie à

$$t \mapsto \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n} \exp\left(\frac{2\pi i t f(x)}{p}\right).$$

On ne perd aucune information si l'on passe à sa transformée de Fourier

$$\psi \mapsto \sum_{t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \psi(t)\,\mathrm{Sol}(f, p, t) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n} \psi(f(x)).$$

Comme $\widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, cela s'identifie à

$$t \mapsto \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n} \exp\left(\frac{2\pi i t f(x)}{p}\right).$$

On dit qu'il s'agit d'une somme exponentielle.

L’analogue en caractéristique 0

L’analogue en caractéristique 0 de la somme exponentielle qu’on vient de voir est une intégrale de la forme

$$t \mapsto \int e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x.$$

L'analogue en caractéristique 0

L'analogue en caractéristique 0 de la somme exponentielle qu'on vient de voir est une intégrale de la forme

$$t \mapsto \int e^{tf(x)} \,\mathrm{d}x.$$

Ces intégrales satisfont des équations différentielles qui ont un invariant naturel : le groupe de Galois différentiel G_{gal}.

L’analogue en caractéristique 0

L’analogue en caractéristique 0 de la somme exponentielle qu’on vient de voir est une intégrale de la forme

$$t \mapsto \int e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Ces intégrales satisfont des équations différentielles qui ont un invariant naturel : le groupe de Galois différentiel G_{gal}.

Peut-on de la même façon associer un groupe algébrique à nos sommes exponentielles en caractéristique p ?

Interprétation cohomologique

Soit M un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{A}^1$. Dans le cas lisse, on obtient une fonction $\mathrm{tr}_M : \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}_\ell} \cong \mathbb{C}$ en évaluant la représentation ℓ-adique associée en Frob_x et prennant la trace (qui est indépendant du choix du Frobenius) pour tout $x \in \mathbb{F}_p = \mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$.

Interprétation cohomologique

Soit M un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{A}^1$. Dans le cas lisse, on obtient une fonction $\mathrm{tr}_M : \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}_\ell} \cong \mathbb{C}$ en évaluant la représentation ℓ-adique associée en Frob_x et prennant la trace (qui est indépendant du choix du Frobenius) pour tout $x \in \mathbb{F}_p = \mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$.

Comme avant, on considère sa transformée de Fourier (sous l'identification $\widehat{\mathbb{F}_p} \cong \mathbb{F}_p$)

$$t \mapsto \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \exp\left(\frac{2\pi i t x}{p}\right) \mathrm{tr}_M(x).$$

Interprétation cohomologique

Existe-t-il un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{A}^1$ dont la trace est la somme d'avant ?

Interprétation cohomologique

Existe-t-il un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{A}^1$ dont la trace est la somme d'avant ? **Oui !** C'est la transformée de Fourier-Deligne $\widehat{M}$, qui est lisse sur un ouvert dense U.

Interprétation cohomologique

Existe-t-il un faisceau ℓ-adique sur $\mathbb{A}^1$ dont la trace est la somme d'avant ? **Oui !** C'est la transformée de Fourier-Deligne $\widehat{M}$, qui est lisse sur un ouvert dense U.

La formule des traces implique alors que la trace de $\widehat{\mathsf{R}f_!\underline{\mathbb{Q}_\ell}}$ est la somme exponentielle voulue.

Interprétation cohomologique

Le groupe algébrique associé à notre somme exponentielle est alors

$$G_p := \text{clôture de Zariski de } \rho(\pi_1^{\mathrm{geom}}(U)),$$

où $\pi_1^{\mathrm{geom}}(U) = \pi_1(U \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_p}))$ et ρ est la représentation ℓ-adique associée à $\widehat{\mathrm{R}f_!\underline{\mathbb{Q}_\ell}}$ sur U.

Interprétation cohomologique

Le groupe algébrique associé à notre somme exponentielle est alors

$$G_p := \text{clôture de Zariski de } \rho(\pi_1^{\text{geom}}(U)),$$

où $\pi_1^{\text{geom}}(U) = \pi_1(U \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_p}))$ et ρ est la représentation ℓ-adique associée à $\widehat{\mathsf{R}f_!\underline{\mathbb{Q}_\ell}}$ sur U.

Théorème (Katz)[1]

Sous certaines conditions les groupes G_p et G_{gal} sont isomorphes pour p assez grand.

[1] N. M. Katz. *Exponential sums and differential equations*, volume 124 d'Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

Objectifs de la thèse

D'après les travaux récents de A. Forey, J. Fresán et E. Kowalski[2], on dispose d'un groupe tannakien pour tout faisceau pervers sur un groupe algébrique sur $\mathbb{F}_p$, généralisant le groupe G_p sur $\mathbb{A}^1$.

[2] A. Forey, J. Fresán et E. Kowalski. Generic vanishing, tannakian categories, and equidistribution. Preprint.

Objectifs de la thèse

D'après les travaux récents de A. Forey, J. Fresán et E. Kowalski[2], on dispose d'un groupe tannakien pour tout faisceau pervers sur un groupe algébrique sur $\mathbb{F}_p$, généralisant le groupe G_p sur $\mathbb{A}^1$.

- Un premier objectif de ma thèse serait de prouver un théorème analogue au résultat de Katz mais sur $\mathbb{G}_m$.

[2] A. Forey, J. Fresán et E. Kowalski. Generic vanishing, tannakian categories, and equidistribution. Preprint.

Objectifs de la thèse

D'après les travaux récents de A. Forey, J. Fresán et E. Kowalski[2], on dispose d'un groupe tannakien pour tout faisceau pervers sur un groupe algébrique sur $\mathbb{F}_p$, généralisant le groupe G_p sur $\mathbb{A}^1$.

- Un premier objectif de ma thèse serait de prouver un théorème analogue au résultat de Katz mais sur $\mathbb{G}_m$.
- Un deuxième objectif serait de comprendre les groupes tannakiens associés à d'autres groupes algébriques. En particulier, aux variétés abéliennes.

[2] A. Forey, J. Fresán et E. Kowalski. Generic vanishing, tannakian categories, and equidistribution. Preprint.

Objectifs de la thèse

Comme dirait Katz : « much remains to be done! »

Questions ?