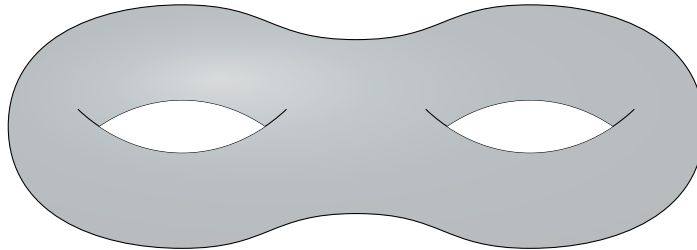


INTRODUCTION

PRÉSENTATION DU SUJET

La classification des objets d'une théorie est l'un des objectifs centraux de la recherche en mathématiques. On voudrait avoir une notion d'équivalence entre les objets d'étude et ensuite décrire aussi explicitement que possible les classes d'équivalence. Dans ce rapport, on étudiera les *surfaces de Riemann* (en particulier, celles qui sont compactes), qui sont le cadre naturel pour étudier le comportement global des fonctions holomorphes.

Au fond, une surface de Riemann est une surface topologique bidimensionnelle dotée d'une structure complexe qui permet de définir les fonctions holomorphes et méromorphes.



Une première approche à la classification des surfaces de Riemann compactes serait de considérer que deux surfaces sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme entre elles. Dans ce cas, l'ensemble des classes d'équivalence est très simple : les surfaces non équivalentes sont paramétrées par un entier g mesurant le nombre de trous. On dit que cet entier est le *genre* de la surface. Par exemple, dans l'image ci-dessus, on voit une surface de genre 2.

Bien que cette classification soit certainement utile, elle ignore complètement la structure complexe dont sont dotées ces surfaces. Pour une notion plus fine d'équivalence, considérons l'ensemble des surfaces de Riemann de genre g et disons que deux de ces surfaces sont équivalentes s'il existe un biholomorphisme entre elles. L'ensemble des classes d'équivalence ainsi obtenu s'appelle l'*espace de modules* \mathcal{M}_g .

Il est en fait utile de considérer une légère variante de cet espace. Une *différentielle abélienne* ω est un objet s'exprimant localement sous la forme $f dz$ pour une fonction holomorphe f . On considère ensuite l'espace de toutes les paires (X, ω) , où X est une surface de Riemann compacte de genre g et ω est une différentielle abélienne sur X . En quotientant cet espace par un groupe de difféomorphismes approprié, on obtient \mathcal{H}_g , l'*espace de modules des différentielles abéliennes*, l'objet principal de ce rapport.

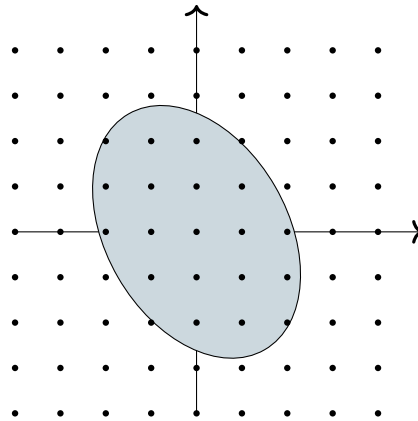
En étudiant la géométrie de cet espace, on constate qu'il est constitué de nombreuses pièces (appelées *strates*) de dimensions différentes. En d'autres mots,

$$\mathcal{H}_g = \coprod \mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n),$$

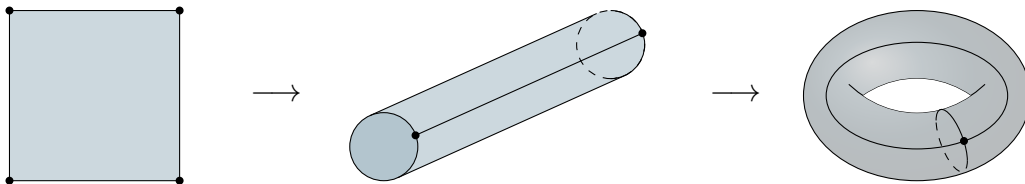
où $\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ est le sous-ensemble de \mathcal{H}_g composé des différentielles abéliennes qui ont des zéros d'ordre $\kappa_1, \dots, \kappa_n$. (Puisque $\kappa_1 + \dots + \kappa_n = 2g - 2$, cette décomposition est toujours finie.)

On peut naturellement identifier $\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ à un ouvert de \mathbb{C}^{2g+n-1} , ce qui nous donne une mesure canonique μ sur les strates. Malheureusement, la mesure de $\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ est toujours infinie, ce qui ne nous permet pas d'obtenir des informations à partir des valeurs de $\mu(\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n))$. On définit donc une hypersurface $\mathcal{H}_1(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, similaire à la sphère unité de \mathbb{R}^n , dont on va calculer la mesure superficielle $\mu_1(\mathcal{H}_1(\kappa_1, \dots, \kappa_n))$. Ces valeurs s'appellent *volumes de Masur-Veech*, en référence à Howard Masur et William Veech, qui ont prouvé qu'ils sont toujours finis.

Pour calculer ces volumes, on utilise une idée remontant à Gauss qui consiste à approximer la mesure d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^n par le nombre de points entiers qu'il contient.



Nos analogues à des points entiers sont appelés des *surfaces à petits carreaux*. Ce sont des surfaces de Riemann obtenues à partir d'une collection finie de carrés unitaires de \mathbb{R}^2 après l'identification des paires de côtés parallèles. L'exemple canonique est celui du tore.



L'étude de ces surfaces établit un pont entre géométrie et combinatoire, nous permettant de faire des calculs discrets pour calculer les volumes de Mesur-Veech.

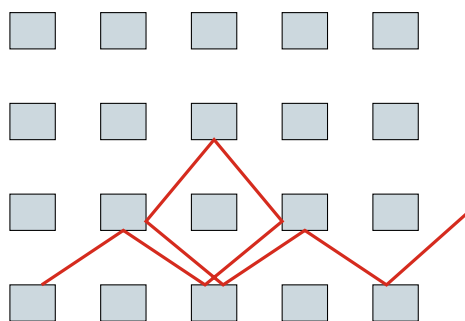
MOTIVATION ET APPLICATIONS

Tout d'abord, le fait que ce sujet soit l'un des principaux domaines de recherche de 6 lauréats Fields¹ au cours des 15 dernières années montre qu'il s'agit d'un domaine très actif et

1. Jean-Christophe Yoccoz, Maxim Kontsevich, Curtis McMullen, Andrei Okounkov, Artur Ávila et Maryam Mirzakhani.

attractif. Les techniques utilisées dans l'étude des volumes de Masur-Veech (et plus généralement dans la théorie de Teichmüller) proviennent de plusieurs domaines des mathématiques : de la combinatoire et de la théorie des représentations, comme on le voit dans ce rapport, mais aussi de la dynamique, de la géométrie algébrique, de la géométrie plane, etc.

Une autre motivation intéressante vient de la physique. Dans leur étude des gaz de Lorenz, Paul et Tatyana Ehrenfest [6] ont présenté un modèle consistant d'une table de billard $X_{a,b}$ obtenue à partir du plan \mathbb{R}^2 en plaçant des obstacles rectangulaires (dont les côtés sont parallèles aux axes) de dimensions a et b centrées en chaque point de \mathbb{Z}^2 .



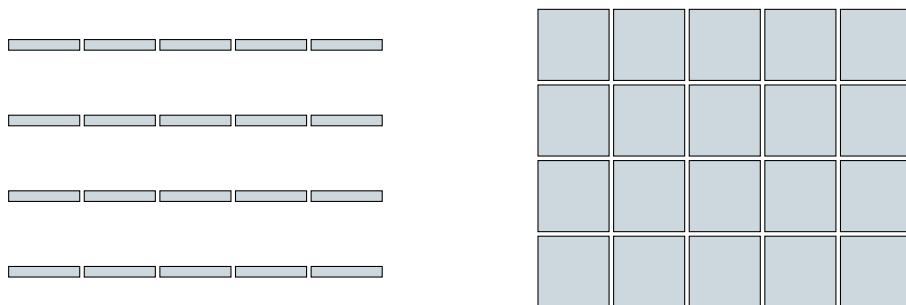
Partant d'un point $x \in X_{a,b}$, on joue une boule de billard sous l'angle θ avec vitesse unitaire. On dénote par $\phi_\theta^t(x)$ la position de cette balle après un temps t . Le taux de diffusion d'une trajectoire donnée est défini comme

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|\phi_\theta^t(x) - x\|}{\log t}.$$

En considérant une marche aléatoire, le théorème central limite impliquerait un taux de diffusion de $1/2$. Cependant, en 1980, Hardy et Weber [13] ont conjecturé que cela ne serait pas le cas pour le modèle d'Ehrenfest. Ils avaient raison. Delecroix, Hubert et Lelièvre [5] ont prouvé en 2014 que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|\phi_\theta^t(x) - x\|}{\log t} = \frac{2}{3}$$

pour presque tous a, b, θ et x . Autrement dit, le taux de diffusion ne dépend pas de la forme de la table de billard !



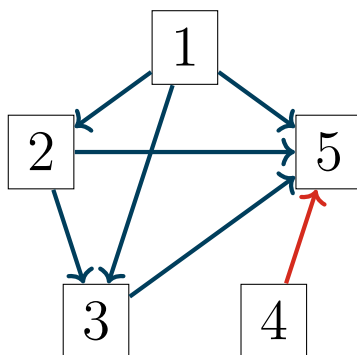
Encore plus surprenant est le fait que la seule démonstration connue de ce résultat est fortement liée aux volumes de Masur-Veech.

INDICATIONS POUR LA LECTURE DU RAPPORT

Notre espoir avec ce rapport est qu'il soit utile pour quelqu'un qui souhaite apprendre les bases de la théorie de Teichmüller, des surfaces de Riemann ou de la théorie des représentations d'un groupe fini. Au cours de ce projet, notre difficulté principale a été de trouver des références adéquates à notre niveau mathématique. On espère donc que ce rapport permettra à un autre groupe d'aller plus loin que ce que nous dans ces sujets magnifiques.

Ce rapport ne requiert pas de connaissances au delà des bases de l'analyse complexe, de la théorie des groupes et des anneaux et de la théorie de la mesure. Une certaine connaissance des variétés est sûrement utile mais absolument pas nécessaire.

L'interdépendance logique entre les chapitres est illustrée dans le diagramme suivant.



De cette manière, quelqu'un peut apprendre la théorie des surfaces de Riemann ou la théorie des représentations d'un groupe fini à partir de ce rapport sans étudier le reste. Dans tous les cas, il est conseillé au lecteur de ne pas sauter l'annexe. Son contenu est utilisé dans la totalité de ce texte.

REMERCIEMENTS

Avant de commencer le rapport, nous tenions à remercier Carlos Matheus Silva Santos, notre tuteur dans ce travail, qui a passé d'innombrables heures à nous enseigner et à nous faire plusieurs suggestions qui se sont révélées indispensables.

Nous voudrions également remercier Stéphane Bijakowski, qui nous a fait part de plusieurs critiques constructives de notre soutenance initiale et des ébauches du rapport, qui revêtaient une importance primordiale pour la qualité du rapport et de la soutenance finale.

Enfin, nous tenons à remercier à Rafael Padovani qui a réalisé la couverture, au binet TypographiX qui nous a fourni le prototype du layout utilisé dans ce rapport et à l'École Polytechnique pour avoir rendu possible ce projet extrêmement gratifiant.

TABLE DES MATIÈRES

1	Surfaces de Riemann	1
1.1	Définitions de base et exemples	1
1.2	Fonctions et applications holomorphes	4
1.3	Classification topologique des surfaces compactes	10
1.4	La caractéristique d'Euler	12
1.5	Le groupe fondamental	16
1.6	Le théorème d'uniformisation	20
1.7	Formes différentielles	21
1.8	Intégration dans les surfaces de Riemann	25
1.9	Homologie et cohomologie	27
2	Théorie de Teichmüller	33
2.1	L'espace de modules des tores	33
2.2	L'espace de Teichmüller des surfaces compactes	37
2.3	Différentielles abéliennes et stratification	39
2.4	Surfaces de translation	40
2.5	Surfaces à petits carreaux	41
2.6	La mesure de Masur-Veech	43
3	L'Approche Géométrique aux Volumes de Teichmüller	47
3.1	La méthode	47
3.2	Calcul du volume de $\mathcal{H}_1(0)$	48
3.3	Calcul du volume de $\mathcal{H}_1(2)$	50
3.4	Autres résultats	54
4	Représentations Linéaires des Groupes Finis	55
4.1	Définitions de base et exemples	55
4.2	Sous-représentations	57
4.3	Représentations irréductibles	59
4.4	Construction de nouvelles représentations	60
4.5	Théorie des caractères	62
4.6	Exemples	67
4.7	Représentations induites	71
4.8	Les représentations du groupe symétrique	74
4.9	Le treillis de Young	82
4.10	La formule de Frobenius	84

5	L'Approche Algébrique aux Volumes de Teichmüller	91
5.1	Aperçu de la méthode	91
5.2	Calcul du volume de $\mathcal{H}_1(3, 1)$	92
5.3	Le terme de poids maximum de f_m	93
5.4	La forme multilinéaire	95
5.5	Les cumulants élémentaires	97
A	Préliminaires Algébriques	99
A.1	Catégories	99
A.2	Objets terminaux et problèmes universels	103
A.3	Limite projective	110
A.4	Produit tensoriel	112
A.5	Puissance extérieure et symétrie	114
A.6	Algèbres sur un corps commutatif	117
A.7	Actions de groupes	122
	Références	129

1

SURFACES DE RIEMANN

1.1 DÉFINITIONS DE BASE ET EXEMPLES

Soit X un espace topologique. L'idée de base d'une surface de Riemann est qu'il s'agit d'un espace qui ressemble localement à un ouvert du plan complexe, où on a tous les outils puissants de l'analyse complexe. La formalisation de cette idée est ce que l'on appelle une « carte ».

Définition 1.1 — Carte. Une carte sur X est un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow U$, où $U \subset X$ est ouvert dans X et $U \subset \mathbb{C}$. On dit que la carte φ est centrée en $p \in U$ si $\varphi(p) = 0$.

Suppose que $\varphi : U \rightarrow U$ et $\psi : V \rightarrow V$ sont deux cartes. Puisque $U \cap V$ est ouvert dans U et φ est un homéomorphisme,² $\varphi(U \cap V)$ est ouvert dans \mathbb{C} . De même, $\psi(U \cap V)$ est ouvert dans \mathbb{C} .

La définition suivante sera motivée plus tard :

Définition 1.2 — Cartes compatibles. Deux cartes $\varphi : U \rightarrow U$ et $\psi : V \rightarrow V$ sont compatibles si

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

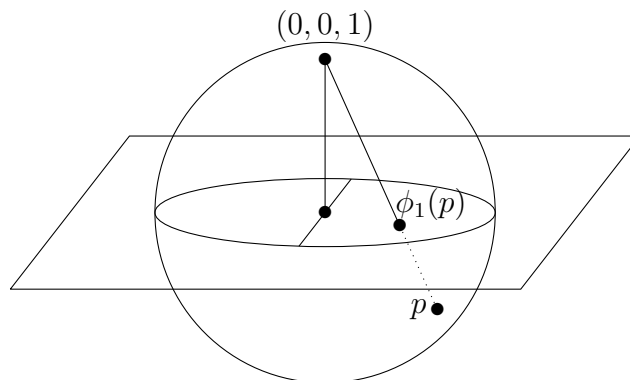
est holomorphe. On dit que $\varphi \circ \psi^{-1}$ et $\psi \circ \varphi^{-1}$ sont des fonctions de transition.

On observe que cette définition est symétrique parce que $\psi \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ \psi^{-1})^{-1}$ et l'inverse d'une bijection holomorphe est aussi holomorphe.

Exemple 1.1 Soit S^2 la sphère unité dans \mathbb{R}^3 :

$$S^2 = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + w^2 = 1\}.$$

On considère le plan $w = 0$ comme le plan complexe \mathbb{C} , avec $(x, y, 0)$ comme $z = x + yi$. Soit $\phi_1 : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par projection de $(0, 0, 1)$.



2. Tout homéomorphisme est ouverte.

Plus précisément,

$$\phi_1(x, y, w) = \frac{x}{1-w} + i \frac{y}{1-w}.$$

L'inverse de ϕ_1 est

$$\phi_1^{-1}(z) = \left(\frac{2\Re(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\Im(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

On peut faire la même chose depuis le pôle sud. Formellement, on définit $\phi_2 : S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ par projection puis conjugaison complexe :

$$\phi_2(x, y, w) = \frac{x}{1+w} - i \frac{y}{1+w}.$$

L'inverse de ϕ_2 est

$$\phi_2^{-1}(z) = \left(\frac{2\Re(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{-2\Im(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1} \right).$$

Le domaine commun est $S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$, et est envoyé bijectivement dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par ϕ_1 et ϕ_2 . La fonction de transition entre ces cartes est $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = 1/z$, qui est holomorphe. Ainsi, les deux cartes sont compatibles.

Notez que dans cet exemple, chaque point de la sphère se trouve dans au moins un des deux cartes. Autrement dit, chaque point de S^2 a une voisinage qui ressemble au plan complexe. C'est ça que l'on attend d'une surface de Riemann.

Définition 1.3 — Atlas. Un atlas \mathcal{A} sur X est une collection $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de cartes compatibles par paires dont les domaines recouvrent X . C'est-à-dire que

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Un atlas \mathcal{A} est dit *maximal* s'il n'est pas contenu dans un atlas plus grand. En d'autres termes, si \mathcal{A} est un autre atlas contenant \mathcal{A} , alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

On voit que les cartes ϕ_1 et ϕ_2 , définies dans l'exemple 1.1, forment un atlas $\{\phi_1, \phi_2\}$ de S^2 . Toutefois, cet atlas n'est pas maximal.

On dit que deux atlas \mathcal{A} et \mathcal{A} sont équivalentes si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}$ est aussi un atlas. Alors, étant donné un atlas \mathcal{A} , l'ensemble

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{A}} \mathcal{A}$$

est un atlas maximal qui contient \mathcal{A} . En fait, il est unique. Car si $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, \mathcal{A} et \mathcal{A} sont équivalentes et alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. On conclut que pour avoir un atlas maximal, il ne faut plus qu'avoir un atlas quelconque. Enfin, on peut définir une surface de Riemann !

Définition 1.4 — Surface de Riemann. Une surface de Riemann est un espace topologique séparé et connexe X , avec un atlas maximal.

- *Le lecteur astucieux, qui connaît la définition d'une variété abstraite, peut se poser la question suivante : « On ne doit pas imposer que X soit à base dénombrable ? » La réponse est que cela est toujours vrai. Un théorème due à Radó dit que toute surface de Riemann est à base dénombrable.*

On a alors plusieurs exemples de surfaces de Riemann. Le plus simple est le plan complexe.

Exemple 1.2 — Plan complexe. Le plan complexe \mathbb{C} , avec l'atlas $\{\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$ est une surface de Riemann.

Exemple 1.3 — Sphère de Riemann. Soit $X = S^2$, avec l'atlas défini dans l'exemple 1.1. C'est une surface de Riemann compact $\widehat{\mathbb{C}}$ que l'on appelle *sphère de Riemann*. Habituellement, on associe chaque point z du plan complexe au point $\phi_1^{-1}(z)$ de la sphère de Riemann et on appelle le seul point de $\widehat{\mathbb{C}}$ non associé ∞ .

Exemple 1.4 — Graphes de fonctions holomorphes. Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On considère le graphe X de f ,

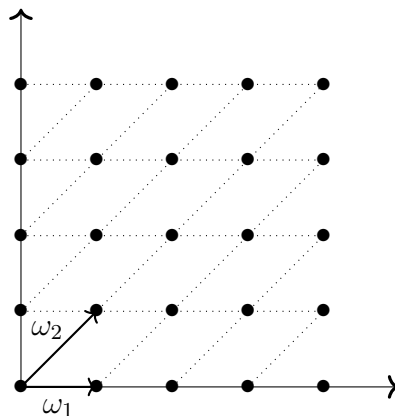
$$X = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in U\},$$

et la projection

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow U \\ (z, f(z)) &\mapsto z. \end{aligned}$$

On observe que π est un homéomorphisme dont l'inverse est $z \mapsto (z, f(z))$. On conclut que π est une carte sur X et donc X est une surface de Riemann.

Exemple 1.5 — Tores complexes. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau i.e. un sous-groupe discret de la forme $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, où ω_1 et ω_2 sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} .



Soit $X = \mathbb{C}/\Lambda$ le groupe quotient, avec la projection $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$. Notons que l'on peut imposer la topologie quotient à X . C'est-à-dire, un ensemble $U \subset X$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans \mathbb{C} . Avec cette topologie π est continue. Ce qui implique que X est connexe (parce que \mathbb{C} l'est). On appelle l'ensemble

$$P := \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]\}$$

le parallélogramme fondamental. On observe que l'image de $\pi|_P$ est X . On en déduit que X est compact.

On va alors construire un atlas pour X . Le réseau Λ est un sous-ensemble discret de \mathbb{C} , il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $|\omega| > 2\varepsilon$ pour tout $\omega \in \Lambda$ non nul. Ce choix de ε assure $D(z, \varepsilon)$ ne peut contenir deux points différant du réseau.

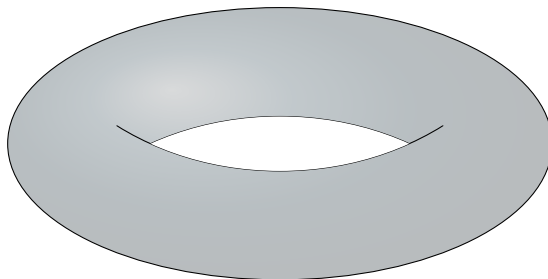
Soit $D_{z_0} := D(z_0, \varepsilon)$ et on considère les fonctions $\pi|_{D_{z_0}} : D_{z_0} \rightarrow \pi(D_{z_0})$. Il est clair que $\pi|_{D_{z_0}}$ est surjective, continue et ouverte. Notre choix de ε assure que $\pi|_{D_{z_0}}$ est injective aussi. On conclut que $\pi|_{D_{z_0}}$ est un homéomorphisme.

Enfin, pour chaque $z_0 \in \mathbb{C}$, on définit φ_{z_0} par l'inverse de $\pi|_{D_{z_0}}$. On a montré que $\mathcal{A} := \{\varphi_{z_0} \mid z_0 \in \mathbb{C}\}$ est un ensemble de cartes. Pour montrer que ces cartes sont compatibles, soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et soit $W = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2})$. Si W est vide, on a rien à prouver. Sinon, considérons

$$T := \varphi_{z_2} \circ \varphi_{z_1}^{-1} = \varphi_{z_2} \circ \pi : \varphi_{z_1}(W) \rightarrow \varphi_{z_2}(W).$$

On doit montrer que T est holomorphe. Pour cela, on observe que $\pi \circ T = (\pi \circ \varphi_{z_2}) \circ \pi = \pi$. C'est-à-dire, $T(z)$ et z ont la même image par π . Donc, $T(z) - z \in \Lambda$. Puisque $T(z) - z$ est continue et Λ est discrète, $T(z) - z$ est localement constante. On conclut que T est holomorphe.

Cette surface de Riemann est généralement décrite comme un tore, obtenu en collant les côtés parallèles de P .



Comme on le verra dans les sections suivantes, toute surface de Riemann peut être obtenue selon une procédure très similaire.

1.2 FONCTIONS ET APPLICATIONS HOLOMORPHES

Soit X une surface de Riemann, p un point de X et f une fonction sur X définie autour de p . Pour vérifier si f a une propriété particulière en p , on utilisera des cartes pour transporter la fonction au voisinage d'un point du plan complexe et on vérifiera la propriété dessus. Dans cette section, on précisera cette notion.

La seule chose à laquelle il faut faire attention, c'est que la propriété que l'on vérifie doit être indépendante de la carte choisie.

Définition 1.5 — Fonctions holomorphes. On dit qu'une fonction $f : W \rightarrow \mathbb{C}$, où $W \subset X$, est holomorphe en $p \in W$ si pour toute carte $\varphi : U \rightarrow U$, avec $p \in U$, $f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe en $\varphi(p)$. On dit qu'une fonction est holomorphe sur un ensemble si elle est holomorphe en chaque élément de cet ensemble.

On notera l'espace des fonctions holomorphes sur $W \subset X$ par $\text{Hol}(W)$. C'est ici que l'on justifie la définition de cartes compatibles.

Proposition 1.1 Soit $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie autour de $p \in X$. S'il existe une carte $\varphi : U \rightarrow U$, avec $p \in U$, telle que $f \circ \varphi^{-1}$ soit holomorphe en $\varphi(p)$, f est holomorphe en p .

Démonstration. Soit ψ une autre carte quelconque dont le domaine contient p . On doit montrer que $f \circ \psi^{-1}$ est holomorphe en $\psi(p)$. Mais

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}).$$

Donc, $f \circ \psi^{-1}$ est une composition de fonctions holomorphes et donc holomorphe. \square

Comme dans le cas des fonctions holomorphes définies dans le plan complexe, si f et g sont holomorphes, $f + g$, fg et f/g (étant donné que g ne s'annule pas) le sont également.

Exemple 1.6 Soit $X = \widehat{\mathbb{C}}$, le sphère de Riemann, et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. On a que f est holomorphe en ∞ si et seulement si $f(1/z)$ est holomorphe en $z = 0$.

Les concepts associés aux fonctions méromorphes se généralisent également de la même manière aux surfaces de Riemann.

Définition 1.6 Soit f une fonction holomorphe définie dans un voisinage pointé de $p \in X$.

- a) On dit que f a une singularité apparente en p si pour toute carte $\varphi : U \rightarrow U$, avec $p \in U$, $f \circ \varphi^{-1}$ a une singularité apparente en $\varphi(p)$.
- b) On dit que f a un pôle en p si pour toute carte $\varphi : U \rightarrow U$, avec $p \in U$, $f \circ \varphi^{-1}$ a un pôle en $\varphi(p)$.
- c) On dit que f a une singularité essentielle en p si pour toute carte $\varphi : U \rightarrow U$, avec $p \in U$, $f \circ \varphi^{-1}$ a une singularité essentielle en $\varphi(p)$.

Comme avant, il suffit de vérifier les énoncés ci-dessus pour une seule carte.

Proposition 1.2 Avec les notations ci-dessus, f a une singularité apparente (resp. pôle, singularité essentielle) si et seulement s'il existe une carte $\varphi : U \rightarrow U$, avec $p \in U$, telle que $f \circ \varphi^{-1}$ ait une singularité apparente (resp. pôle, singularité essentielle) en $\varphi(p)$.

On peut alors définir une fonction méromorphe.

Définition 1.7 On dit qu'une fonction $f : W \rightarrow \mathbb{C}$, où $W \subset X$, est méromorphe en $p \in W$ si elle est holomorphe, a une singularité apparente, ou a un pôle en p . On dit qu'une fonction est méromorphe sur un ensemble si elle est méromorphe en chaque élément de cet ensemble.

Exemple 1.7 Soit Λ un réseau, $X = \mathbb{C}/\Lambda$ et $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ la projection sur le quotient. Soit $f : W \rightarrow \mathbb{C}$, où $W \subset X$, une fonction méromorphe. Alors $g := f \circ \pi$ est méromorphe en $\pi^{-1}(W)$ et Λ -périodique. C'est-à-dire, $g(z + \omega) = g(z)$ pour tout $z \in \pi^{-1}(W)$ et $\omega \in \Lambda$.

Une fonction méromorphe Λ -périodique est appelé *fonction elliptique*. On a alors une correspondance entre fonctions elliptiques sur \mathbb{C} et fonctions méromorphes sur \mathbb{C}/Λ .

Certains théorèmes concernant les fonctions holomorphes et méromorphes sont immédiatement hérités des théorèmes correspondants concernant les fonctions définies sur des ouverts dans le plan complexe.

Théorème 1.3 — Principe des zéros isolés. Soit f une fonction méromorphe définie sur un ouvert connexe W d'une surface de Riemann X . Si f n'est pas identiquement nulle, les zéros et les pôles de f forment un sous-ensemble sans point d'accumulation de W .

Le théorème ci-dessus a une implication immédiate pour les surfaces compactes.

Corollaire 1.4 Soit f une fonction méromorphe non nulle sur une surface de Riemann compacte X . Alors f a un nombre fini de zéros et de pôles.

Démonstration. Soit S l'ensemble de zéros et pôles de f . Puisque S n'a pas de point d'accumulation, S est fermé et donc compact (puisque X l'est). Comme

$$\{\{x\} \subset X \mid x \in S\}$$

est un recouvrement ouvert de S , il existe une sous-recouvrement finie. Le résultat suit. \square

Théorème 1.5 — Principe du prolongement analytique. Supposons que f et g soient deux fonctions méromorphes définies sur un ouvert connexe W d'une surface de Riemann X . Supposons que $f = g$ sur un sous-ensemble $S \subset W$ qui a un point d'accumulation dans W . Alors $f = g$ sur W .

Théorème 1.6 — Principe du maximum. Soit f holomorphe sur un ouvert connexe W d'une surface de Riemann X . Supposons qu'il existe un point $p \in W$ tel que $|f(x)| \leq |f(p)|$ pour tout $x \in W$. Alors f est constante sur W .

Théorème 1.7 — Théorème de l'application ouverte. Soit f holomorphe non-constante sur un ouvert connexe W d'une surface de Riemann X . Alors f est une application ouverte.

On a le corollaire suivant, qui est un théorème ne concernant que les surfaces de Riemann, en ce sens qu'il n'existe pas d'analogue précis pour les fonctions sur le plan complexe.

Corollaire 1.8 Soit X une surface de Riemann compacte. Supposons que f soit holomorphe sur tout X . Alors f est une fonction constante.

Démonstration. La fonction f est continue, donc $|f|$ atteint une valeur maximale M . Soit p un point sur la surface avec $|f(p)| = M$. Alors $|f|$ atteint un maximum local en p , est donc constante dans un voisinage de p . Par conséquent, l'ensemble des x tels que $|f(x)| = M$ est ouvert. Comme il est également fermé (par continuité) ce doit être toute la surface (par connexité). Alors $f(X)$ est contenue dans un cercle de rayon M , ce qui contredit le théorème de l'application ouverte. \square

- *Pourquoi cette preuve ne fonctionne-t-elle pas pour un sous-ensemble compact K de \mathbb{C} ? Dans ce cas, on ne peut pas garantir que l'ensemble des points où la fonction atteint son module maximum est ouvert dans K . Pensez à la fonction identité restreinte au disque unité, par exemple. Dans le cas d'une surface de Riemann, l'existence de cartes autour de tout point résout ce problème.*

Ce théorème montre que, si les fonctions C^∞ sont immensément utiles dans l'étude des variétés différentielles, les fonctions holomorphes ne le sont pas énormément dans l'étude des surfaces compactes de Riemann : elles sont trop restrictives. Ce problème sera bientôt résolu en considérant les différentielles holomorphes.

On définit alors des applications entre deux surfaces de Riemann X et Y .

Définition 1.8 — Applications holomorphes. On dit qu'une applications $f : W \rightarrow Y$, où $W \subset X$, est holomorphe en $p \in W$ si pour toutes les cartes $\varphi : U \rightarrow U$, avec $p \in U$, et $\psi : V \rightarrow V$, avec $f(p) \in V$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe en $\varphi(p)$. On dit qu'une application est holomorphe sur un ensemble si elle est holomorphe en chaque élément de cet ensemble.

On appellera constamment des applications holomorphes entre des surfaces de Riemann des *revêtements holomorphes*.³ Une application holomorphe bijective dont l'application réciproque est également holomorphe est appelée *biholomorphe*.

On notera l'espace des applications holomorphes entre $W \subset X$ et Y par $\text{Hol}(W; Y)$. Comme auparavant, il est possible de vérifier l'homomorphisme d'une application avec n'importe quelle paire de cartes. Les applications holomorphes entre les surfaces de Riemann se comportent comme prévu.

Proposition 1.9 Soient X, Y, Z des surfaces de Riemann.

- a) Si $f : X \rightarrow Y$ est holomorphe, alors f est \mathcal{C}^∞ .
- b) Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont holomorphes, alors la composition $g \circ f : X \rightarrow Z$ est holomorphe aussi.

On présente ici quelques généralisations des théorèmes classiques sur les fonctions holomorphes sur le plan complexe.

Théorème 1.10 — Théorème de l'application ouverte. Soit $f : X \rightarrow Y$ un revêtement holomorphe entre des surfaces de Riemann. Alors f est une application ouverte.

Théorème 1.11 Soit $f : X \rightarrow Y$ une bijection holomorphe entre des surfaces de Riemann. Alors, l'application réciproque f^{-1} est aussi holomorphe.

En d'autres termes, ce théorème dit que pour qu'une application soit biholomorphe, il suffit qu'elle soit holomorphe et bijective.

Théorème 1.12 — Principe du prolongement analytique. Supposons que f et g soient deux applications holomorphes entre des surfaces de Riemann X et Y . Supposons que $f = g$ sur un sous-ensemble $S \subset X$ qui a un point d'accumulation dans X . Alors $f = g$.

Théorème 1.13 Soit $f : X \rightarrow Y$ un revêtement holomorphe entre des surfaces de Riemann X et Y . Alors, pour chaque $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est un sous-ensemble de X sans point d'accumulation.

3. Hors du contexte des surfaces de Riemann, ce que nous appelons un revêtement est généralement appelé un revêtement *ramifié*.

On a aussi une généralisation du corollaire 1.8 aux applications holomorphes :

Théorème 1.14 Soit X une surface de Riemann compacte et $f : X \rightarrow Y$ un revêtement holomorphe. Alors Y est compacte et f est surjective.

Démonstration. Puisque f est holomorphe et que X est ouvert en lui-même, $f(X)$ est ouvert dans Y par le théorème d'application ouverte. D'autre part, puisque X est compact, $f(X)$ est compact et puisque Y est séparé, $f(X)$ est fermé dans Y . D'où, $f(X) = Y$. \square

De même que les endomorphismes diagonalisables qui peuvent être exprimés sous une forme simple en prenant une base bien choisie, les revêtements holomorphes peuvent être exprimés sous une forme simple en prenant des cartes bien choisies.

Théorème 1.15 — Structure locale des revêtements holomorphes. Soit $f : X \rightarrow Y$ un revêtement holomorphe entre des surfaces de Riemann et soit $p \in X$. Alors il existe deux cartes $\varphi : U \rightarrow U$ et $\psi : V \rightarrow V$ centrées en p et $f(p)$, respectivement, et un unique entier positif m tels que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^m.$$

Démonstration. Étant donné une carte $\psi : V \rightarrow V$ centrée en $f(p)$, on choisit une carte $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ quelconque centrée en p . Alors la série entière de $\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ est

$$\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(w) = \sum_{k=m} c_k w^k,$$

où $c_m \neq 0$ et $m \geq 1$ (car $\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(0) = 0$). Ainsi, il suit que $\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(w) = w^m S(w)$, où S est holomorphe en 0 et $S(0) \neq 0$. Dans ce cas, il existe une fonction R , holomorphe dans un voisinage de 0, telle que $R(w)^m = S(w)$ et donc $\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(w) = (wR(w))^m$.

Soit $T(w) = wR(w)$. Puisque $T(0) = R(0) \neq 0$, on a que T est inversible dans un voisinage de 0. On en déduit que $\varphi := T \circ \tilde{\varphi}$ est une carte centrée en p . Comme

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \circ T^{-1},$$

on conclut que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^m$. \square

Définition 1.9 Soit $f : X \rightarrow Y$ un revêtement holomorphe entre des surfaces de Riemann et soit $p \in X$. On dit que l'entier m du théorème 1.15 est la *multiplicité* de f en p et on le dénote $\text{Mult}_p(f)$.

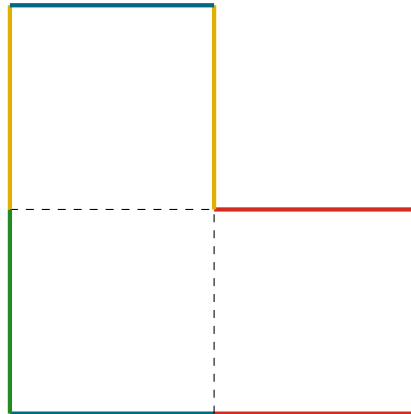
Si $\text{Mult}_p(f) \geq 2$, on dit que f est *ramifié* en p et que p est un *point de ramification* pour f . Dans ce cas, on appelle $f(p)$ un *point de branchement*.

Dans le cas de surfaces définies à partir d'un quotient, on dira qu'un point de la surface est un point de branchement s'il s'agit d'un point de branchement pour l'application quotient.

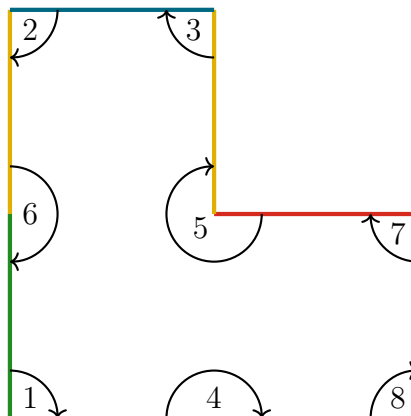
Selon le principe des zéros isolés, l'ensemble des points de ramification est discret. Si la surface de Riemann X est compacte, cet ensemble est fini. Dans ce cas l'ensemble de points de branchement est aussi fini.

Un moyen simple de calculer la multiplicité d'une application $f : X \rightarrow Y$ en un point $p \in X$ consiste à dessiner un petit lacet autour de p dans X . Si l'image de ce lacet par f tourne m fois autour de $f(p)$ dans Y , alors la multiplicité de f en p est m .

Exemple 1.8 On peut faire des constructions analogues à celle de l'exemple 1.5 avec des quotients plus complexes. Par exemple, considérons l'ensemble ci-dessous, composé par 3 carrés unités dans le plan complexe, dont les côtés de même couleur sont identifiés par translation.



Soit C l'ensemble des carrés et L la surface de Riemann obtenue par l'identification des côtés. Il est évident que tous les points à l'intérieur des carrés et que tous les intérieurs des côtés ne sont pas des points de ramification. Comme tous les sommets sont équivalents (ils ont la même image pour l'application quotient), il suffit de vérifier si un sommet quelconque est un point de ramification. On fait donc un petit lacet autour du sommet inférieur gauche, en numérotant les étapes nécessaires pour revenir au même point.



On observe que l'angle total parcouru est de 6π , ce qui implique une multiplicité de l'application quotient à ce sommet égale à 3. Il suit que les sommets sont des points de ramification.

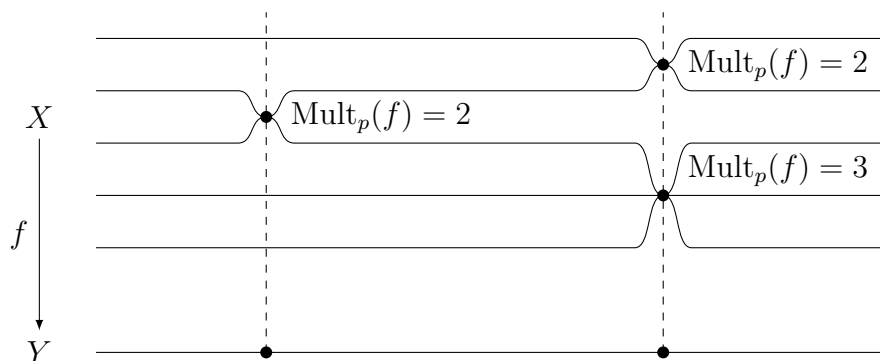
Soit X une surface de Riemann compacte et $f : X \rightarrow Y$ un revêtement holomorphe. Le théorème 1.14 dit que nécessairement Y est compact et que f est surjective. On se demande donc dans quelle mesure f est loin d'être une bijection. C'est-à-dire que si $y \in Y$, on cherche la taille de $f^{-1}(y)$. Comme d'habitude, compter les éléments en tenant compte de la multiplicité nous donne une belle formule.

Théorème 1.16 Soit $f : X \rightarrow Y$ un revêtement holomorphe entre deux surfaces de Riemann compactes. Alors l'entier

$$\sum_{p \in f^{-1}(y)} \text{Mult}_p(f)$$

ne dépend pas de $y \in Y$. Cet entier est appelé le *degré* de f et est dénoté $\deg(f)$.

Dans les conditions de ce théorème, l'ensemble des points de branchement est fini et donc presque tous (c'est-à-dire tous sauf un nombre fini) les points ont exactement $\deg(f)$ images réciproques.



Puisque la multiplicité d'un revêtement holomorphe en un point p est toujours positive, on a le corollaire ci-dessous.

Corollaire 1.17 Soit $f : X \rightarrow Y$ un revêtement holomorphe entre deux surfaces de Riemann compactes. Alors f a degré 1 si et seulement si f est une bijection.

1.3 CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES SURFACES COMPACTES

L'un des principaux objectifs de notre étude est de trouver des relations d'équivalence adéquates aux surfaces de Riemann compactes, puis de décrire les classes d'équivalence. Une première tentative, plus superficielle, consisterait à dire que deux surfaces de Riemann sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme (c'est-à-dire une bijection continue dont la réciproque est aussi continue) entre elles. C'est cette approche que l'on adoptera dans cette section.

Un objet essentiel sera le polygone défini ci-dessous.

Définition 1.10 Soit $g \geq 0$ un entier. Pour $g \geq 1$ on définit F_g comme le polygone dont les arêtes sont nommées

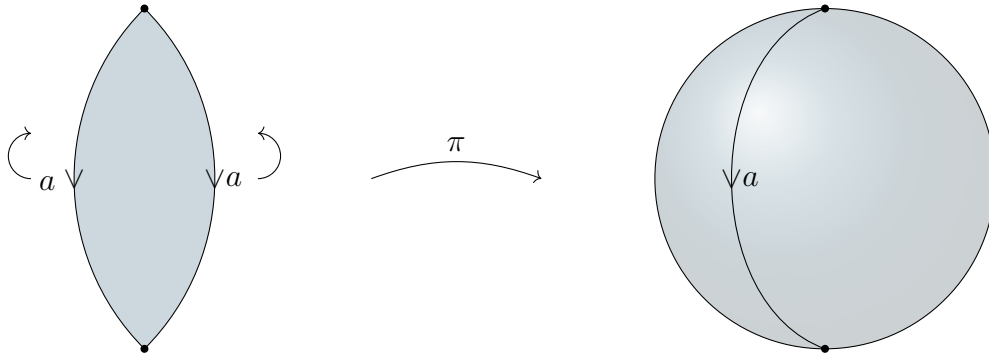
$$a_1, b_1, a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, a_g, b_g.$$

Les arêtes a_i, b_i sont parcourues dans le sens anti-horaire et les arêtes a_i, b_i dans le sens horaire. Pour $g = 0$, on définit F_0 comme le polygone à deux arêtes a, a .

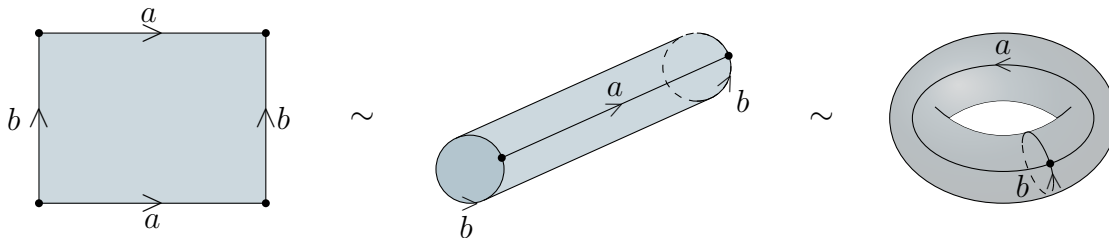
Enfin, on note $|F_g|$ la surface (topologique) obtenue en identifiant a_i avec a_i et b_i avec b_i en tenant compte de leurs orientations respectives.

CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES SURFACES COMPACTES

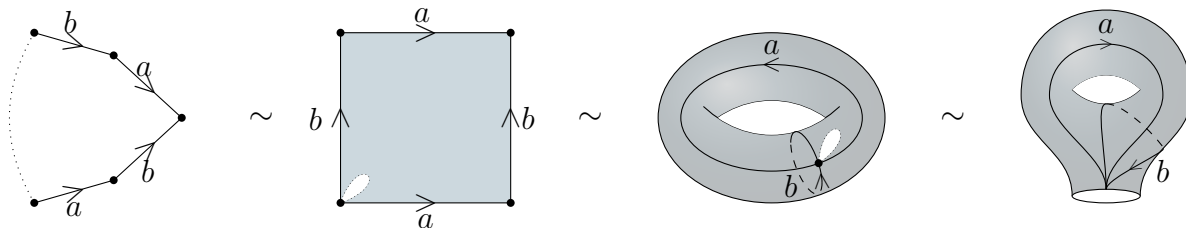
Pour comprendre les surfaces $|F_g|$, on va les « construire ». Premièrement, si $g = 0$, la surface obtenue en quotientant est le sphère de Riemann :



Pour $g = 1$, on obtient un tore :



Pour $g \geq 2$, on se rend compte que la transformation $g \mapsto g + 1$ équivaut à mettre une anse sur la surface $|F_g|$.



On conclut que $|F_g|$ est une sphère avec g anses. De manière équivalente, pour $g = 0$, $|F_g|$ est une sphère et, pour $g \geq 1$, un tore avec g trous.

L'importance de ces surfaces réside dans le fait que toute surface de Riemann compacte est homéomorphe à $|F_g|$ pour un certain entier $g \geq 0$. De plus, deux de ces surfaces sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même g .

Théorème 1.18 Soit X une surface de Riemann compacte. Alors, il existe un unique entier $g \geq 0$ tel que X soit homéomorphe à $|F_g|$. On dit que cet entier g est le *genre* de X . Enfin, deux surfaces n'ayant pas le même genre ne sont pas homéomorphes.

Ce théorème résout notre problème décrit au début de la section. Si l'on considère deux surfaces de Riemann compactes comme équivalentes si elles sont homéomorphes, alors l'ensemble des classes d'équivalence est exactement l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} .

Cette classification, bien que simple, est trop faible : elle ignore complètement la structure complexe des surfaces de Riemann. Dans le chapitre suivant, on dira que deux surfaces de Riemann avec le même genre g sont équivalentes si elles sont biholomorphes. L'ensemble des classes d'équivalence est l'espace de modules \mathcal{M}_g , dont la géométrie sera étudiée. On verra que si $g = 0$, il n'y a qu'une surface de Riemann à biholomorphisme près : la sphère de Riemann. Pour $g = 1$, toute surface est biholomorphe à un tore complexe et si $g > 1$, l'ensemble des classes d'équivalence est continu et de dimension $3g - 3$.

1.4 LA CARACTÉRISTIQUE D'EULER

Dans les 2 prochaines sections, on présentera quelques outils fondamentaux de la topologie algébrique. L'accent sera mis principalement sur le développement de l'intuition de ces outils plutôt que sur le lien logique entre les résultats. Pour cette raison, plusieurs énoncés seront omis. Le lecteur intéressé peut trouver les démonstrations dans [19].

Soit X une surface de Riemann compacte. Une *triangulation* de X est une décomposition de X en sous-ensembles fermés, chacun homéomorphe à un triangle, de sorte que deux triangles quelconques soient disjoints, ou ne se rencontrent qu'à un seul sommet ou ne se rencontrent que le long d'une seule arête.

Un corollaire direct du théorème 1.18 est le fait que chaque surface compacte de Riemann possède une triangulation finie.

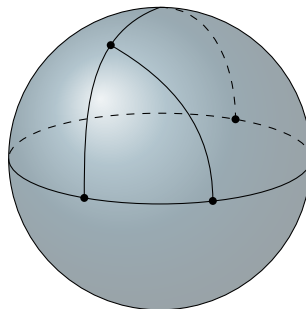
Proposition 1.19 Toute surface de Riemann compacte X admet une triangulation finie.

Les triangulations sont importantes car elles permettent de définir la caractéristique d'Euler d'une surface compacte de Riemann.

Définition 1.11 — Caractéristique d'Euler. Étant donné une triangulation de X , avec v sommets, a arêtes et t triangles. La *caractéristique d'Euler* de X est le nombre entier $\chi(X) = v - a + t$.

Un fait topologique important est que la caractéristique d'Euler est indépendante de la triangulation choisie, ce qui justifie notre notation qui ne la prend pas en compte.

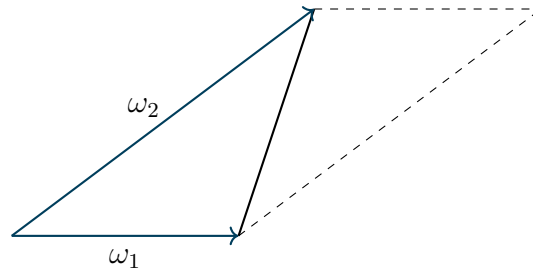
Exemple 1.9 La sphère de Riemann a caractéristique d'Euler 2. Pour montrer cela, on observe la triangulation ci-dessous.



Cette triangulation a 4 sommets, 6 arêtes et 4 triangles. D'où, $\chi(\widehat{\mathbb{C}}) = 4 - 6 + 4 = 2$.

Pour calculer la caractéristique d'Euler d'un tore complexe, on pourrait afficher une triangulation explicite d'un tore. Cependant, il est plus facile de voir cela en utilisant son parallélogramme fondamental.

Exemple 1.10 Les tores complexes ont caractéristique d'Euler 0. Étant donné un tore complexe C/Λ , on peut calculer sa caractéristique d'Euler en triangulant son parallélogramme fondamental. Pour cela, on dessine une diagonale de ω_1 à ω_2 .



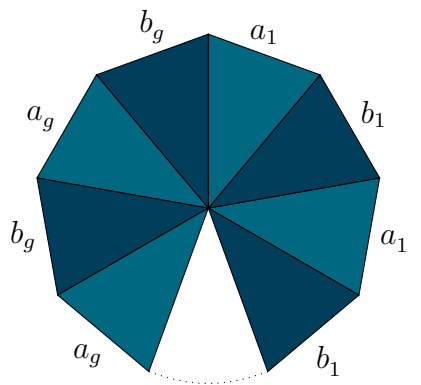
On a $v = 1$ car tout point du réseau est équivalent à 0, $a = 3$ car les arêtes opposés du parallélogramme sont équivalents et $t = 2$. Alors, $\chi(C/\Lambda) = 1 - 3 + 2 = 0$.

En fait, on peut généraliser cette méthode pour trouver la caractéristique d'Euler de toute surface de Riemann compacte !

Théorème 1.20 Soit X une surface de Riemann compacte de genre g . Alors la caractéristique d'Euler de X est

$$\chi(X) = 2 - 2g.$$

Démonstration. Si $g \geq 1$, il suffit de trianguler le polygone F_g :



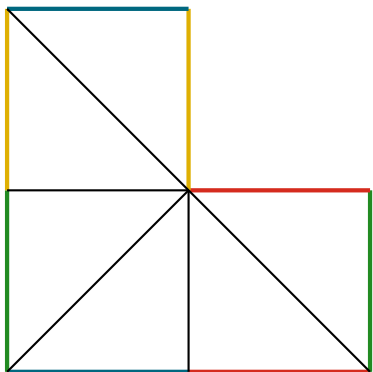
Cette triangulation a $4g$ arêtes internes, qui correspondent à $4g$ arêtes sur X . Cependant, des $4g$ arêtes latérales, seules $2g$ sont distinctes sur X . Tous les $4g$ triangles de F_g deviennent des triangles distinctes dans X . Enfin, comme tous les sommets latéraux sont identifiés, la triangulation de X n'a que 2 sommets. On en déduit que

$$\chi(X) = 2 - (4g + 2g) + 4g = 2 - 2g.$$

Puisque le théorème est trivialement vrai dans le cas $g = 0$, le résultat suit. □

En revanche, on peut utiliser le théorème 1.20 pour calculer le genre de certaines surfaces.

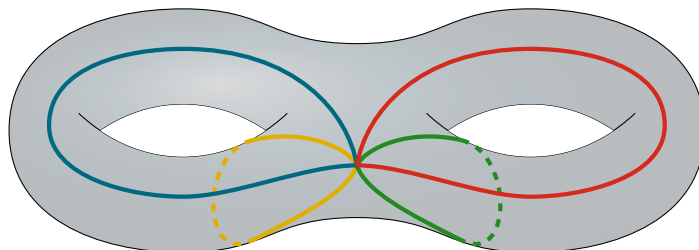
Exemple 1.11 Soit X la surface de Riemann de l'exemple 1.8. Pour calculer le genre de X , on va la trianguler de la façon suivante :



Comme tous les sommets sont équivalents, cette triangulation n'a qu'un seul sommet. On a une arête latérale de chaque couleur plus les 5 arêtes des triangles et le nombre de triangles est certainement 6. On conclut que

$$\chi(X) = 1 - 9 + 6 = -2.$$

D'où le genre de X est 2. C'est-à-dire que topologiquement cette surface de Riemann est un tore à deux trous,



ce qui n'est pas évident du tout.

La constance du degré pour un revêtement holomorphe, combinée à la théorie de la caractéristique d'Euler, nous donne une formule importante reliant les genres du domaine et de l'image avec le degré et la multiplicité du revêtement.

Théorème 1.21 — Riemann-Hurwitz. Soit $f : X \rightarrow Y$ un revêtement holomorphe entre des surfaces de Riemann compactes de genre g et g , respectivement. Alors,

$$2g - 2 = \deg(f)(2g - 2) + \sum_p (Mult_p(f) - 1).$$

- Notez que puisque f est une application entre des surfaces de Riemann compactes, l'ensemble des points de ramification de f est fini et donc la somme qui apparaît dans la formule de Riemann-Hurwitz l'est également.

Démonstration. Prenons une triangulation de Y , de sorte que chaque point de branchement de f soit un sommet. Supposons qu'il y ait v sommets, a arêtes et t triangles. Soulevons cette triangulation à X via l'application f et supposons qu'il y ait v sommets, a arêtes et t triangles sur X . Notez que chaque point de ramification de f est un sommet sur X .

Puisque les points de ramification sont les sommets des triangles, $t = \deg(f)t$ et $a = \deg(f)a$. On peut compter le nombre d'images réciproques d'un point $y \in Y$ quelconque comme

$$|f^{-1}(y)| = \sum_{p \in f^{-1}(y)} 1 = \deg(f) - \sum_{p \in f^{-1}(y)} (\text{Mult}_p(f) - 1).$$

Par conséquent, le nombre total de sommets de X est

$$\begin{aligned} v &= \sum_{\substack{y \in Y \\ \text{sommet}}} \left[\deg(f) - \sum_{p \in f^{-1}(y)} (\text{Mult}_p(f) - 1) \right] \\ &= \deg(f)v - \sum_{\substack{y \in Y \\ \text{sommet}}} \sum_{p \in f^{-1}(y)} (\text{Mult}_p(f) - 1) \\ &= \deg(f)v - \sum_{\substack{p \in X \\ \text{sommet}}} (\text{Mult}_p(f) - 1). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -\chi(X) \\ &= -v + a - t \\ &= -\deg(f)v + \sum_{\substack{p \in X \\ \text{sommet}}} (\text{Mult}_p(f) - 1) + \deg(f)a - \deg(f)t \\ &= -\deg(f)\chi(Y) + \sum_{\substack{p \in X \\ \text{sommet}}} (\text{Mult}_p(f) - 1) \\ &= \deg(f)(2g - 2) + \sum_{p \in X} (\text{Mult}_p(f) - 1), \end{aligned}$$

où la dernière égalité vaut parce que tout point de ramification est un sommet de X . \square

Outre que la formule de Riemann-Hurwitz est très pratique pour calculer le genre de certaines surfaces, elle a le corollaire suivant d'une grande utilité.

Corollaire 1.22 En utilisant la notation du théorème précédent :

1. On a toujours $g \geq g$. En particulier, si $g = 0$ alors $g = 0$;
2. Si $g = 0$ et $g > 0$, alors f est ramifié;
3. Si $g = 1$, f n'est pas ramifié si et seulement si $g = 1$;
4. Si f n'est pas ramifié et $g > 1$, alors soit $g = g$ et $\deg(f) = 1$, soit $g > g$.

Dans plusieurs situations, il est utile de « percer » les surfaces de Riemann pour les rendre plus « bien comportées ». Plus précisément, si X est une surface de Riemann compacte, on

considère $X \setminus P$, où P est un ensemble discret (généralement donné par les points de ramification d'un certain revêtement holomorphe). Bien entendu, $X \setminus P$ est un sous-ensemble ouvert de X et constitue donc une surface de Riemann en soi. On dira que les surfaces de Riemann ainsi obtenues sont des *surfaces de Riemann perforées*.

1.5 LE GROUPE FONDAMENTAL

La topologie algébrique est l'étude des règles reliant les espaces topologiques aux objets d'une catégorie algébrique donnée \mathbf{C} telles que les morphismes dans \mathbf{Top} (les applications continues), la catégorie des espaces topologiques, soient liés aux morphismes de \mathbf{C} (les homomorphismes), en préservant les notions de composition et d'isomorphisme. Ces règles sont officiellement connues sous le nom de *foncteurs*. Dans cette section, on étudiera l'un des principaux foncteurs de la topologie algébrique : le groupe fondamental. On verra cet objet dans le contexte des surfaces de Riemann, mais il existe avec peu ou pas de modification dans les espaces topologiques généraux. Le lecteur intéressé par ce contexte plus général peut consulter le livre [14].

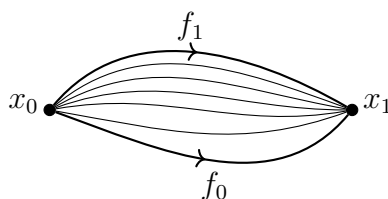
Le groupe fondamental sera défini en termes de déformations de chemins sur la surface de Riemann. On rappelle qu'un chemin dans X est une application continue $f : I \rightarrow X$ où I est l'intervalle unitaire $[0, 1]$.

Définition 1.12 — Homotopie. Soit X une surface de Riemann. Une *homotopie* de chemins dans X est une famille $f_t : I \rightarrow X$, $0 \leq t \leq 1$, telle que

1. Les points $f_t(0) = x_0$ et $f_t(1) = x_1$ sont indépendantes de t ;
2. L'application associée $F : I \times I \rightarrow X$, définie par $F(s, t) = f_t(s)$ est continue.

Lorsque deux chemins f_0 et f_1 sont reliés par une homotopie f_t , ils sont dits *homotopes*.

L'homotopie est la formalisation de la notion intuitive d'une déformation continue d'un chemin.



Exemple 1.12 — Homotopies Linéaires. Deux chemins f_0, f_1 quelconques dans \mathbb{C} ayant la même origine x_0 ainsi que la même extrémité x_1 sont homotopes par l'homotopie

$$f_t(s) := (1 - t)f_0(s) + tf_1(s).$$

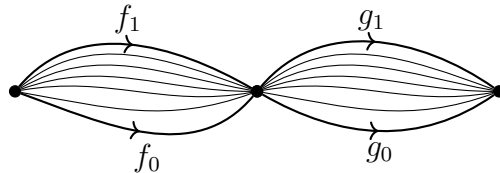
Plus généralement, tous les chemins dont l'origine et l'extrémité sont fixées dans un sous-ensemble convexe de \mathbb{C} sont homotopes.

La relation d'homotopie dans les chemins avec des origines et extrémités fixes forme une relation d'équivalence. On notera la classe d'équivalence d'un chemin f pour $[f]$ et l'appellera la *classe d'homotopie* de f .

Étant donné deux chemins $f, g : I \rightarrow X$ tels que $f(1) = g(0)$, il existe un *chemin produit* qui traverse d'abord f puis g , défini par la formule

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Ce produit est compatible avec les classes d'homotopie. Autrement dit, si f_0, f_1 sont homotopes par l'homotopie f_t et g_0, g_1 sont homotopes par l'homotopie g_t , alors $f_t \cdot g_t$ est une homotopie reliant $f_0 \cdot g_0$ et $f_1 \cdot g_1$.



En particulier, si l'on limite notre attention aux chemins f dont l'origine et l'extrémité sont égaux (c'est-à-dire tels que $f(0) = f(1)$), ce produit est toujours bien défini. Ces chemins sont appelés *lacets* et le point commun $x_0 = f(0) = f(1)$ est appelé le *point de base*.

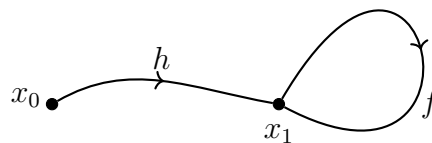
On peut maintenant définir le groupe fondamental, introduit en 1895 par Henri Poincaré dans son article *Analysis Situs*[23] qui a révolutionné les mathématiques.

Définition 1.13 — Groupe fondamental. Soit X une surface de Riemann et x_0 un point de X . L'ensemble de toutes les classes d'homotopie $[f]$ des lacets $f : I \rightarrow X$ au point de base x_0 est noté $\pi_1(X, x_0)$ et est appelé le *groupe fondamental* de X basé en x_0 . La structure de groupe est donné par $[f][g] := [f \cdot g]$.

Le fait que $\pi_1(X, x_0)$ soit un groupe est une simple vérification des axiomes. Étant donné un élément $[f]$ de $\pi_1(X, x_0)$, son inverse est donné par $[s \mapsto f(1 - s)] =: [\bar{f}]$. L'identité du groupe est certainement le lacet constante égal à x_0 .

L'index 1 du groupe fondamental provient du fait que $\pi_1(X, x_0)$ n'est que le premier élément d'une suite de groupes $\pi_n(X, x_0)$, appelés *groupes d'homotopie*, définis de manière analogue, mais en utilisant le cube n -dimensionnel I^n à la place de I .

Une requête naturelle est la dépendance de $\pi_1(X, x_0)$ sur le point de base x_0 . Puisque $\pi_1(X, x_0)$ concerne uniquement la composante connexe par arcs de x_0 , il n'existe une relation entre $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ que s'il existe un chemin $h : I \rightarrow X$ reliant x_0 et x_1 .



Dans ce cas, pour chaque lacet f basé en x_1 , le lacet $(h \cdot f) \cdot \bar{h}$ est basée en x_0 . En fait, cette application définit un isomorphisme de groupe.

Proposition 1.23 Soit x_0, x_1 des points d'une surface de Riemann X reliés par un chemin $h : I \rightarrow X$. Alors, l'application

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_1) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [f] &\mapsto [h \cdot f \cdot \bar{h}] \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

- *Formellement, il faudrait écrire $[(h \cdot f) \cdot \bar{h}]$, car le produit des chemins n'est pas associatif. Cependant, $(h \cdot f) \cdot \bar{h}$ est clairement homotope à $h \cdot (f \cdot \bar{h})$, ce qui rend la distinction inutile dans le contexte des classes d'équivalence.*

Démonstration. Soit P_h cette application. D'abord, P_h est un homomorphisme parce que

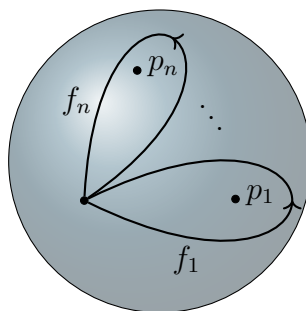
$$P_h([f][g]) = P_h([f \cdot g]) = [h \cdot f \cdot g \cdot \bar{h}] = [h \cdot f \cdot \bar{h} \cdot h \cdot g \cdot \bar{h}] = P_h([f])P_h([g]).$$

Aussi, P_h est un isomorphisme parce que $P_{\bar{h}}$ est son inverse. \square

Ainsi, comme toute surface de Riemann X est connexe par arcs, le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est indépendant du choix du point de base à isomorphisme près. On note donc $\pi_1(X, x_0)$ tout simplement par $\pi_1(X)$.

Ci-dessous, on présente quelques croquis de démonstration de certains groupes fondamentaux. Dans toutes les « démonstrations », on montrera que $\pi_1(X)$ est un groupe généré par un ensemble d'éléments et satisfaisant une relation donnée. Cependant, on ne va pas montrer qu'il s'agissait de la seule relation satisfaite par ces éléments. Néanmoins cela sera vrai dans les deux cas.

Exemple 1.13 — Sphère à n trous. Soit $X = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ la sphère de Riemann perforée à n trous. Le groupe fondamental $\pi_1(X)$ est généré par les classes d'homotopie des lacets f_1, f_2, \dots, f_n contournant chacun l'un des trous.



La courbe $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ peut être contractée en un point, ce qui implique la relation

$$[f_1][f_2] \dots [f_n] = \text{id}$$

dans $\pi_1(X)$. On en déduit que $\pi_1(X) = \langle g_1, \dots, g_n \mid g_1 \cdots g_n = e \rangle$.

Exemple 1.14 — Surface de genre g . Pour calculer le groupe fondamental d'une surface de Riemann X de genre g , considérons le polygone F_g . Puisque tous les sommets de F_g sont équivalents, les arêtes $a_1, b_1, a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, a_g, b_g$ de F_g forment des lacets dans X . Aussi, on sait que a_i et a_i ont une orientation opposée et que en parcourant tous les arêtes, on revient au point d'origine. On conclut que $\pi_1(X)$ est le groupe engendré par $2g$ éléments $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ satisfaisant la relation

$$[A_1, B_1][A_2, B_2] \dots [A_g, B_g] = e,$$

où $[A_i, B_i] = A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1}$ est le commutateur de A_i et B_i . En particulier, le groupe fondamental des tores complexes

Comme il a été dit au début de cette section, en plus du groupe fondamental étant une règle qui identifie chaque espace topologique à un groupe, on peut aussi identifier chaque application continue à un homomorphisme.

Supposons $\varphi : X \rightarrow Y$ est une application continue entre des surfaces de Riemann telle que $\varphi(x_0) = y_0$. Alors φ induit un homomorphisme $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, défini en composant les lacets $f : I \rightarrow X$ basés en x_0 avec φ , c'est-à-dire, $\varphi([f]) := [\varphi \circ f]$.

Les deux propriétés fondamentales de l'homomorphisme induit sont :⁴

- Si $\psi : X \rightarrow Y$ et $\varphi : Y \rightarrow Z$ sont des applications continues telles que $\psi(x_0) = y_0$ et $\varphi(y_0) = z_0$, alors $(\varphi \circ \psi) = \varphi \circ \psi$;
- L'identité $\text{id}_X : X \rightarrow X$ de X induit l'identité $\text{id}_{\pi_1(X, x_0)} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ de $\pi_1(X, x_0)$. C'est-à-dire que $\text{id}_{\pi_1(X, x_0)} = (\text{id}_X)$.

Une application immédiate de ces propriétés est le fait fondamental que si φ est un homéomorphisme, alors φ est un isomorphisme de groupes. C'est ce qui fournit la grande utilité de la topologie algébrique. Montrer que deux espaces topologiques sont homéomorphes est généralement simple : il suffit d'afficher un homéomorphisme. Par contre, il est difficile de montrer que deux espaces topologiques ne sont **pas** homéomorphes. Cependant, on a maintenant un moyen systématique de procéder : si les groupes fondamentaux de deux espaces topologiques sont différents, ils ne sont pas homéomorphes !

Exemple 1.15 Les considérations ci-dessus permettent de montrer facilement que deux surfaces de Riemann compactes sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même genre. En fait, soit X une surface de genre g et soit $\pi_1(X)$ son groupe fondamental (calculé dans l'exemple 1.14). L'abélianisé d'un groupe G est le groupe $G/[G, G]$, où $[G, G]$ est le sous-groupe de G engendré par $[g_1, g_2]$ où $g_1, g_2 \in G$. Dans notre cas, $G = \pi_1(X)$ et alors,

$$\frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]} = Z^{2g}.$$

On sait déjà que deux surfaces de Riemann compactes homéomorphes ont le même genre. Puisque deux surfaces de genre différent ont un groupe fondamental abélianisé différent, elles ne sont pas homéomorphes.

4. Ces propriétés font du groupe fondamental un foncteur (covariant) de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégorie des groupes.

1.6 LE THÉORÈME D'UNIFORMISATION

À ce stade, on peut déjà faire de grands progrès dans la classification des surfaces de Riemann compactes à biholomorphisme près. Le théorème ci-dessous est l'un des résultats les plus importants de la théorie des surfaces de Riemann.

Théorème 1.24 — Théorème d'uniformisation (Poincaré - Koebe). Soit X une surface de Riemann simplement connexe. Alors X est biholomorphe à l'une des trois surfaces suivantes :

- Le plan complexe \mathbb{C} ;
- Le disque unité \mathbb{D} ;
- La sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

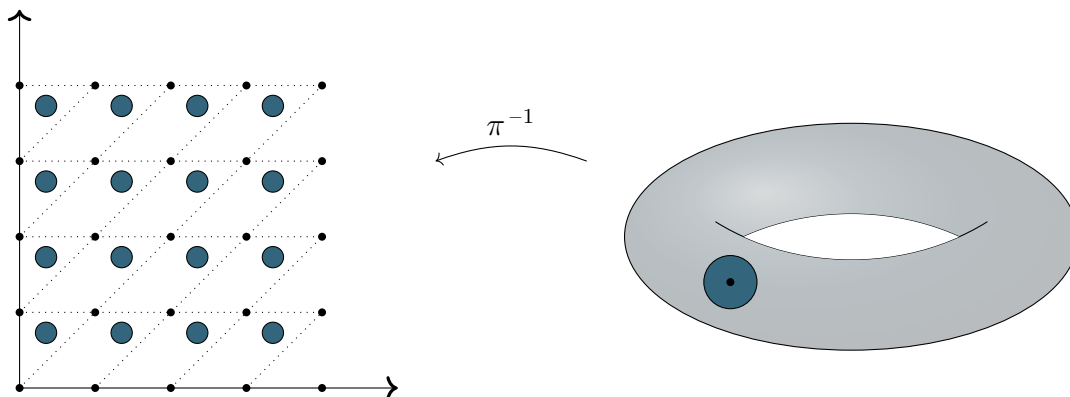
Puisqu'une surface de Riemann compacte est simplement connexe si et seulement si elle est de genre 0, ce théorème implique tout de suite qu'il n'existe qu'une surface de Riemann compacte de genre 0 à biholomorphisme près. Pour classer les autres surfaces compactes, il faudra associer une surface simplement connexe à chacune d'elles. Heureusement, il existe un moyen canonique de le faire, que l'on va maintenant étudier.

Définition 1.14 — Revêtement d'une surface. Soit X une surface de Riemann. Un *revêtement* de X est une surface de Riemann \tilde{X} , avec une application continue $p : \tilde{X} \rightarrow X$ telle que tout point $x \in X$ ait un voisinage $U \subset X$ tel que $p^{-1}(U)$ soit une union (non vide) d'ouverts disjoints dans \tilde{X} , chacun d'eux étant envoyé de manière homéomorphe sur U par p .

- *Il est important de distinguer la notion analytique de revêtement holomorphe de la notion topologique de revêtement. En fait, un revêtement holomorphe est un revêtement au sens de la définition 1.14 si et seulement si il n'est pas ramifié.*

En effet, on a déjà rencontré des revêtements !

Exemple 1.16 Soit $X = \mathbb{C}/\Lambda$ un tore complexe et $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ l'application quotient. Alors \mathbb{C} (avec cet application) est un revêtement de X !



C'est exactement le fait que \mathbb{C} est simplement connexe, alors que X ne l'est pas, qui nous permettra d'utiliser le théorème 1.24 pour classer les surfaces compactes.

L'exemple 1.16 n'est pas particulier : toute surface de Riemann X a un revêtement simplement connexe.

Théorème 1.25 — Revêtement universel. Soit X une surface de Riemann. Alors il existe un revêtement simplement connexe (\tilde{X}, p) de X . En outre, p est une application holomorphe et \tilde{X} est universel en ce sens que si (Y, q) est un autre revêtement de X alors il existe un revêtement $f : \tilde{X} \rightarrow Y$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \\
 \downarrow f & \nearrow q & \\
 Y & &
 \end{array}$$

commute. On dit que \tilde{X} est le *revêtement universel* de X .

Comme on pouvait s'y attendre, le revêtement universel est unique à isomorphisme près.⁵ L'étude des revêtements est profonde et intéressante. Cependant, pour notre étude, on n'aura besoin que des propriétés fondamentales suivantes :

- Le groupe fondamental $\pi_1(X)$ agit de façon naturelle sur \tilde{X} ;
- Il y a un biholomorphisme entre $\tilde{X}/\pi_1(X)$ et X .

Le lecteur intéressé à étudier ces aspects plus en détail est invité à lire le chapitre 4 de [24]. Quoiqu'il en soit, le point important est que ces considérations permettent de conclure le théorème suivant.

Théorème 1.26 — Uniformisation des surfaces de Riemann compactes. Soit X une surface de Riemann compacte et soit g son genre. Alors,

- Si $g = 0$, X est biholomorphe à la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$;
- Si $g = 1$, X est biholomorphe à un tore complexe \mathbb{C}/Λ ;
- Si $g \geq 2$, X est biholomorphe au quotient D/G , où G est un groupe fini.

1.7 FORMES DIFFÉRENTIELLES

La force de l'analyse complexe repose sur deux piliers : la rigidité des fonctions holomorphes, ce qui nous permet d'obtenir de bons résultats en calcul différentiel, et la compatibilité de ces résultats avec les intégrales de chemin. On souhaiterait transporter ces résultats au contexte des surfaces de Riemann. Cependant, on verra que le concept de fonction holomorphe n'est pas la généralisation idéale, ce qui nous amènera à étudier les formes différentielles.

⁵ Cela signifie que si $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ et $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ sont deux revêtements universels de X , alors il existe un homéomorphisme $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tel que $p_2 \circ f = p_1$. (Rappelez la catégorie de l'exemple A.2.)

Soit X une surface de Riemann et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On peut penser à f comme étant une collection de fonctions holomorphes $f_\alpha := f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ sur des ouverts du plan complexe, où $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ sont des cartes d'un atlas de X . Ces fonctions sont compatibles dans le sens suivant : si $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ et $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ sont des cartes, alors

$$f_\beta(z) = f_\alpha(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z))$$

pour tout $z \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. Puisque f est une fonction holomorphe, on attendrait à ce que sa dérivée f' le soit aussi. Cependant, la fonction f ne satisfait pas la condition de compatibilité que l'on vient d'écrire. En fait, le théorème de dérivation des fonctions composées montre que

$$f'_\beta(z) = f'_\alpha(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z))(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})'(z).$$

Un problème similaire se produit lors de la tentative d'intégration d'une fonction méromorphe. La définition naturelle de $\int_\gamma f$, où γ est un chemin dans X , serait

$$\int_\gamma f := \int_{\varphi_\alpha \circ \gamma} f_\alpha(z) dz.$$

Cette définition a plusieurs problèmes. Même si le chemin γ est suffisamment petit pour qu'il soit dans U_α , la valeur de l'intégrale dépend du choix de la carte φ_α , ce qui n'est certainement pas souhaitable.

Pour résoudre tous ces problèmes, on va utiliser un nouvel objet dans X : les formes différentielles.

Définition 1.15 — 1-formes différentielles. Une *1-forme holomorphe* ω sur X est une collection d'expressions $f_\alpha dz_\alpha$ pour chaque carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ de X , où f_α sont des fonctions holomorphes sur $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, qui obéissent aux conditions de compatibilité

$$f_\beta(z) = f_\alpha(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z))(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})'(z)$$

pour tout pair de cartes $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ et $z \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. De même, si les f_α sont des fonctions méromorphes, on dit que ω est une *1-forme méromorphe*.

Il existe deux méthodes de base pour créer des 1-formes holomorphes. L'une consiste à commencer par une fonction holomorphe h et à former sa différentielle dh qui, pour chaque carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ de X , est donné par la formule

$$(dh)_\alpha := (h \circ \varphi_\alpha^{-1})' dz_\alpha = h'_\alpha dz_\alpha.$$

Une autre façon est de commencer avec une 1-forme holomorphe existante ω et de la multiplier par une fonction holomorphe h pour donner une nouvelle 1-forme holomorphe qui, pour chaque carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ de X , est donné par la formule

$$(h\omega)_\alpha := (h \circ \varphi_\alpha^{-1}) f_\alpha dz_\alpha = h_\alpha f_\alpha dz_\alpha.$$

Bien entendu, ces constructions permettent également de construire des 1-formes méromorphes. Les 1-formes holomorphes et les 1-formes méromorphes forment des \mathbb{C} -espaces vectoriels, notés, respectivement, par $\Omega(X)$ et $M\Omega(X)$.

Il sera généralement utile d'affaiblir les définitions et d'envisager les 1-formes qui ne sont que \mathbb{C} -linéaires. Dans ce cas, au lieu d'écrire les fonctions en termes de parties réelle et imaginaire de z , on écrira les fonctions en termes de z et de \bar{z} , ce qui est toujours possible.

Définition 1.16 Une 1-forme C^∞ ω sur X est une collection d'expressions $f_\alpha dz_\alpha + g_\alpha d\bar{z}_\alpha$ pour chaque carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ de X , où f_α et g_α sont des fonctions C^∞ sur $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, qui obéissent aux conditions de compatibilité

$$f_\beta(z, \bar{z}) = f_\alpha(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z), \overline{\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z)}) (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(z)$$

et

$$g_\beta(z, \bar{z}) = g_\alpha(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z), \overline{\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z)}) (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(z)$$

pour tout pair de cartes $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ et $z \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Puisque cette définition implique que les parties dz et $d\bar{z}$ d'une 1-forme C^∞ se transforment indépendamment, si ω est de la forme $f_\alpha dz_\alpha$ pour une carte φ_α , alors ω a cette forme pour tous les cartes. Dans ce cas, on dira que ω est de type $(1, 0)$. De même, une 1-forme C^∞ de la forme $g_\alpha d\bar{z}_\alpha$ est dite de type $(0, 1)$. Il est clair que toute 1-forme holomorphe est de type $(1, 0)$.

On note par $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel constitué par les 1-formes C^∞ , par $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel constitué par les 1-formes de type $(1, 0)$ et, de même, par $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel constitué par les 1-formes de type $(0, 1)$. Bien sûr, $\mathcal{E}^{(1)}(X) = \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$.

La principale motivation pour définir les objets que l'on étudie dans cette section est la volonté de généraliser les intégrales de ligne aux surfaces de Riemann. Par exemple, on peut voir les conditions de compatibilité qui apparaissent dans les définitions des 1-formes différentielles en tant que manifestation du théorème de changement de variable dans les intégrales de ligne. Pour étudier les intégrales de surface, on a besoin d'une notion de « produit » de 1-formes à satisfaisant la condition de compatibilité

$$f_\alpha(z, \bar{z}) = f_\alpha(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z), \overline{\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z)}) \left\| (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(z) \right\|^2.$$

Heureusement, ce produit n'est rien d'autre que le produit extérieur !

Définition 1.17 — 2-formes différentielles. Une 2-forme C^∞ η sur X est un élément de $\Lambda^2 \mathcal{E}^{(1)}(X)$. De manière équivalente, une 2-forme C^∞ η sur X est une collection d'expressions $f_\alpha dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$ pour chaque carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ de X , où f_α sont des fonctions C^∞ sur $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, qui obéissent aux conditions de compatibilité

$$f_\alpha(z, \bar{z}) = f_\alpha(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z), \overline{\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z)}) \left\| (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(z) \right\|^2$$

pour tout pair de cartes $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ et $z \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. De même, si les fonctions f_α sont holomorphes / méromorphes, on dira que η est une 2-forme holomorphe / méromorphe.

Désormais on omettra systématiquement l'indice α dans la notation d'une forme différentielle à la condition qu'il n'y ait aucune possibilité de confusion. Par exemple, on notera une 2-forme tout simplement par $\eta = f dz \wedge d\bar{z}$.

Tout comme on a défini la différentielle d'une fonction holomorphe, on peut généraliser cette construction et définir la *dérivée extérieure* d'une forme différentielle.

Définition 1.18 — Dérivée extérieure. La dérivée extérieure d est l'opérateur linéaire qui associe à une fonction C^1 f la 1-forme

$$df := \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

à une 1-forme C^1 $\omega = f dz + g d\bar{z}$ la 2-forme

$$d\omega := \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}$$

et à une 2-forme η la valeur $d\eta := 0$.

D'après le théorème de Schwarz, il est clair que pour tout fonction f , $d(df) = 0$. Ce fait est généralement dénoté par l'équation $d^2 = 0$.

Le lecteur attentif a peut-être vu que l'équation définissant $d\omega$ ressemble aux équations de Cauchy-Riemann. En fait, la dérivée extérieure d'une 1-forme holomorphe est toujours zéro :

$$\omega = f dz \quad \text{avec } f \text{ holomorphe} \quad \implies \quad d\omega = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = 0.$$

Les 1-formes dont la dérivée extérieure est nulle sont si spéciales qu'elles méritent un nom.

Définition 1.19 — 1-formes exactes et fermées. Soit ω une 1-forme C^1 . On dit que ω est *fermée* si $d\omega = 0$ et que ω est *exacte* s'il existe une fonction C^1 f telle que $\omega = df$.

Bien sûr, comme $d^2 = 0$, toute forme exacte est fermée. Aussi, de la discussion précédente, on conclut qu'une forme de type $(1, 0)$ est fermée si et seulement si elle est holomorphe.

Finalement, il existe un moyen canonique d'envoyer des formes différentielles d'une surface de Riemann à l'autre : le tiré-en-arrière. (« Pullback » en anglais.)

Définition 1.20 — Tiré-en-arrière d'une fonction. Soit $F : X \rightarrow Y$ une application holomorphe non-constante entre des surfaces de Riemann. Si $h : Y \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction C^1 sur Y , la fonction $F^*h := h \circ F : X \rightarrow \mathbb{C}$ est appelé le *tiré-en-arrière* de h par F .

Pour définir le tiré-en-arrière des formes différentielles, on fixe une carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U_\alpha$ dans X telle que $F(U_\alpha)$ soit contenu dans le domaine V_β d'une carte $\psi_\beta : V_\beta \rightarrow V_\beta$ en Y . On note $h := \psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ l'écriture locale de F dans ces cartes.

Définition 1.21 — Tiré-en-arrière des formes différentielles. Soit ω une 1-forme C^1 sur Y définie localement par $\omega_\beta = f_\beta dz_\beta + g_\beta d\bar{z}_\beta$. Alors, la 1-forme C^1 sur X définie localement par

$$(F^*\omega)_\alpha := (F^*f)_\alpha h dw_\alpha + (F^*g)_\alpha \bar{h} d\bar{w}_\alpha$$

est appelé le *tiré-en-arrière* de ω par F . De même, si η est une 2-forme C^1 définie localement par $\eta_\beta = f_\beta dz_\beta \wedge d\bar{z}_\beta$, la 2-forme C^1 sur X définie localement par

$$(F^*\eta)_\alpha := (F^*f)_\alpha \|h\| dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\alpha$$

est appelé le *tiré-en-arrière* de η par F .

Le tiré-en-arrière commute avec la dérivée extérieure. C'est-à-dire que si f est une fonction C^1 et ω est une 1-forme C^0 , on a

$$F^*(df) = d(F^*f) \quad \text{et} \quad F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Il est également clair que le tiré-en-arrière préserve les classifications des 1-formes : si ω est holomorphe, alors $F^*\omega$ l'est aussi. Il en va de même pour les 1-formes méromorphes et de type $(1, 0)$ ou $(0, 1)$.

1.8 INTÉGRATION DANS LES SURFACES DE RIEMANN

À cet état, on sait déjà tout ce qu'il faut pour étudier les intégrales sur les surfaces de Riemann.

Définition 1.22 — Intégrale de chemin. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin différentiable dans une surface de Riemann X et $\omega = f dz + g d\bar{z}$ une 1-forme C^0 sur X . Si l'image de γ est contenue dans le domaine d'une seule carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U_\alpha$, on définit l'intégrale de ω sur γ par

$$\int_\gamma \omega := \int_{\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1}} f_\alpha dz + g_\alpha d\bar{z}.$$

Si l'image de γ n'est pas contenue dans aucune carte, on partitionne $[0, 1] = [0, a_1] \cup \dots \cup [a_n, 1]$ de sorte que les restrictions $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ aient des images suffisamment petites. L'intégrale d'une 1-forme méromorphe est définie d'une manière analogue, il faut juste que le chemin γ n'intersecte pas les pôles de f .

Les conditions de compatibilité des 1-formes sont exactement ce dont on avait besoin pour que l'intégrale ne dépende pas des cartes choisies. Le lecteur peut également vérifier que l'intégrale est indépendante de la partition de $[0, 1]$ choisie.

Plus généralement, on peut envisager des combinaisons linéaires formelles de chemins avec des coefficients entiers. C'est-à-dire des objets du type

$$\gamma := \sum_{i=1}^n c_i \gamma_i,$$

où $c_i \in \mathbb{Z}$ et γ_i sont des chemins. On dit alors que γ est une 1-chaîne. L'intégrale d'une 1-chaîne est définie par linéarité

$$\int_\gamma \omega := \sum_{i=1}^n c_i \int_{\gamma_i} \omega.$$

Les 1-chaînes forment un groupe abélien que l'on dénote par C_1 .

On aimerait également définir les intégrales de surface dans un fermé D de X . Tout comme il fallait partitionner $[0, 1]$ dans la définition de l'intégrale de chemin pour assurer que chaque partie du chemin est contenue dans le domaine d'une seule carte, il faudra partitionner D . Il y a deux façons habituelles de procéder : on peut utiliser les partitions de l'unité par rapport à la couverture ouverte donnée par les cartes ou l'on peut trianguler D . La première approche

est plus habituelle dans le contexte des variétés abstraites mais pour notre portée, la seconde approche est plus appropriée.

Définition 1.23 — Intégrale de surface. Soit D un fermé triangulable d'une surface de Riemann X et $\eta = f dz \wedge d\bar{z}$ une 2-forme C^1 . Si D est contenu dans le domaine d'une seule carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U_\alpha$, on définit l'intégrale de η sur D par

$$\int_D \eta := \int_{\varphi_\alpha(D)} f_\alpha dz \wedge d\bar{z}_\alpha = -2i \int_{\varphi_\alpha(D)} f_\alpha(x + iy, x - iy) dx dy,$$

où la dernière intégrale est une intégrale de surface dans $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Si D n'est pas contenu dans le domaine d'aucune carte, on triangule D pour que chaque triangle soit suffisamment petit.

Notez que, puisque $dz \wedge d\bar{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = (-2i) dx \wedge dy$, dans la définition de l'intégrale, on a fait rien d'autre que « effacer les symboles \wedge ».

Tout comme on a fait avec les chemins, on peut envisager des combinaisons linéaires formelles de fermés triangulables avec des coefficients entiers. C'est-à-dire des objets du type

$$D := \sum_{i=1}^n c_i D_i,$$

où $c_i \in \mathbb{Z}$ et D_i sont des fermés triangulables. On dit alors que D est une 2-chaîne. L'intégrale d'une 2-chaîne est définie par linéarité

$$\int_D \eta := \sum_{i=1}^n c_i \int_{D_i} \eta.$$

Les 2-chaînes forment un groupe abélien que l'on dénote par C_2 . Par complétude, on définit les 0-chaînes comme étant des combinaisons linéaires formelles de points de X . Le groupe abélien formé par les 0-chaînes est noté C_0 .

Maintenant, si T est un triangle dans X complètement contenu dans le domaine d'une carte, on peut construire un chemin ∂T en traversant la frontière de T dans le sens anti-horaire, paramétrée par la longueur de l'arc. Cela donne un chemin fermé ∂T sur X . Si D est un fermé triangulable dans X , on peut décomposer D en triangles $\{T_i\}_{i=1, \dots, n}$ et définir

$$\partial D := \sum_{i=1}^n \partial T_i,$$

qui est une 1-chaîne sur X , appelée la *frontière* de D . De même, on définit la frontière d'une 2-chaîne par linéarité.

Par souci d'exhaustivité, la frontière d'un chemin γ est définie comme étant $\gamma(1) - \gamma(0)$. On définit la frontière d'une 1-chaîne en étendant par linéarité. Aussi, on définit la frontière d'une 0-chaîne comme étant la valeur 0.

On peut dorénavant écrire la version de surface de Riemann du théorème de Stokes, une vaste généralisation du théorème fondamental du calcul.

Théorème 1.27 — Théorème de Stokes. Soit D une 2-chaîne dans une surface de Riemann X et ω une 1-forme C^1 sur X . Alors,

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

Démonstration. Par linéarité, il suffit de supposer que D est un triangle inclus dans le domaine d'une carte. Dans ce cas, le théorème devient simplement le théorème de Green dans \mathbb{R}^2 . \square

Tout comme dans le plan complexe, une intégrale ne change pas lorsque l'on choisit des chemins homotopes.

Proposition 1.28 Soient γ_0 et γ_1 des chemins homotopes sur une surface de Riemann X . Alors, si ω est une 1-forme C^1 fermée (c'est-à-dire que $d\omega = 0$), alors

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Démonstration. Soit $F : I \times I \rightarrow X$ l'application associée à l'homotopie reliant γ_0 et γ_1 . Alors, si D est l'image de F , D est triangulable et $\partial D = \gamma_1 - \gamma_0$. Le théorème de Stokes implique donc que

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = 0$$

puisque ω est fermée. \square

Comme toute 1-forme holomorphe est fermée, la proposition précédente s'applique toujours dans le cadre des 1-formes holomorphes.

1.9 HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE

À la base, la topologie algébrique est divisée en deux études principales : l'homologie et l'homotopie. La section 1.5 était une introduction à l'objet homologique le plus simple (et, sans doute, le plus important) de tous : le groupe fondamental. On va maintenant nous concentrer sur l'autre côté de la topologie algébrique.

Lorsque l'on définit la frontière d'une chaîne, il y a 3 opérateurs dénotés généralement de la même manière :

$$C_2 \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} 0.$$

On va les différencier momentanément :

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Une observation importante est que la frontière de la frontière est toujours zéro. C'est-à-dire que $\partial_1 \circ \partial_2 = \partial_0 \circ \partial_1 = 0$. Cela implique notamment que $\text{im } \partial_2$ n'est pas simplement un sous-groupe de C_1 , mais également un sous-groupe de $\ker \partial_1$. Cela motive la définition du groupe d'homologie.

Définition 1.24 — Homologie. Soit X une surface de Riemann. On définit le *groupe d'homologie* de X comme étant le groupe abélien

$$H_1(X) := \frac{\ker \partial_1}{\text{im } \partial_2}.$$

Les éléments du noyau $\ker \partial_1$ s'appellent des *cycles* et les éléments de l'image $\text{im } \partial_2$ s'appellent des *bords*.

A priori, le groupe d'homologie peut sembler un peu effrayant. On verra cependant qu'il s'agit d'un objet bien connu!

Théorème 1.29 Soit X une surface de Riemann. Alors on a un isomorphisme de groupes

$$H_1(X) \cong \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}.$$

Croquis de démonstration. L'idée principale de la démonstration de ce théorème est de fixer un point $x_0 \in X$ et de voir les lacets dans $\pi_1(X, x_0)$ comme des cycles dans $\ker \partial_1$. On obtient ainsi un homéomorphisme $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$. Ce morphisme est surjectif et a pour noyau le sous-groupe dérivé de $\pi_1(X, x_0)$. Le résultat découle alors du premier théorème d'isomorphisme. \square

Ce théorème nous permet d'afficher facilement quelques exemples de groupe d'homologie.

Exemple 1.17 — Sphère à n trous. Soit $X = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ la sphère de Riemann perforée à n trous. Dans l'exemple 1.13 on a calculé

$$\pi_1(X) = \langle g_1, \dots, g_n \mid g_1 \cdots g_n = e \rangle.$$

L'abélianisé de $\pi_1(X)$ est donc tout simplement le groupe abélien engendré par les cycles f_1, \dots, f_{n-1} . Il n'est pas nécessaire de mettre f_n car la somme de tous les f_i est une bord et est donc égale à l'élément neutre de $H_1(X)$.

Exemple 1.18 — Surface de genre g . En fait, on a déjà calculé le groupe d'homologie d'une surface de Riemann compacte X de genre g dans l'exemple 1.15! On a

$$H_1(X) = \mathbb{Z}^{2g}.$$

Le groupe $H_1(X)$ est engendré par les cycles $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ qui sont les images de arêtes de F_g par l'application quotient. On dit que ces cycles sont la *base canonique* de cycles.

Considérons une 1-forme \mathbb{C} -fermée ω . L'intégration de ω nous donne un homomorphisme du groupe de cycles à \mathbb{C}

$$\begin{aligned} \ker \partial_1 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \gamma &\mapsto \int_{\gamma} \omega. \end{aligned}$$

Par le théorème de Stokes,

$$\int_{\partial D} \omega = 0$$

pour tout bord $\partial D \in \text{im } \partial_2$. La propriété universelle des quotients implique donc que cet homéomorphisme induit un homéomorphisme

$$\int_{-} \omega : H_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$$

que l'on appellera l'*homomorphisme de période* de ω . On peut considérer que son domaine est soit le groupe d'homologie, soit le groupe fondamental, selon les besoins.

La motivation de ce nom est le fait que si $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ est la base canonique de cycles, les valeurs

$$A_i := \int_{a_i} \omega, \quad B_i := \int_{b_i} \omega$$

sont appelées *périodes* de ω . Clairement, l'intégrale de ω dans tout chemin fermé peut être écrite en termes des périodes. Le fait étonnant est que les intégrales de surface peuvent également être exprimées en termes de périodes !

Théorème 1.30 — Relations bilinéaires de Riemann. Soit X une surface de Riemann compacte de genre g avec base canonique de cycles $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$. Soient aussi ω, ω deux 1-formes C avec périodes A_i, B_i, A_i, B_i . Alors

$$\int_X \omega \wedge \omega = \sum_{i=1}^g (A_i B_i - A_i B_i).$$

Le lecteur intéressé peut trouver une démonstration de ce résultat dans [3].

L'opérateur de frontière ∂ et la dérivée extérieure sont similaires à bien des égards : les deux agissent sur 3 espaces différents de telle sorte que l'application successive de ces opérateurs donne toujours la valeur zéro. Autrement dit, d^2 et ∂^2 sont égaux à l'opérateur nul. On va maintenant faire une construction analogue à l'homologie en utilisant la dérivée extérieure. Comme précédemment, il sera utile de distinguer les trois dérivées extérieures :

$$\mathcal{E}^{(0)}(X) \xrightarrow{d_0} \mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d_1} \mathcal{E}^{(2)}(X) \xrightarrow{d_2} 0,$$

où $\mathcal{E}^{(k)}(X)$ est le \mathbb{C} -espace vectoriel constitué par les k -formes C avec la convention qu'une 0-forme C est simplement une fonction C . Notez que l'ordre des flèches est inversé par rapport au cas d'homologie, ce qui motive le préfixe « co- » dans la définition suivante.

Définition 1.25 — Cohomologie. Soit X une surface de Riemann. On définit la *cohomologie* de X comme étant le \mathbb{C} -espace vectoriel

$$H^1(X) := \frac{\ker d_1}{\text{im } d_0} = \frac{\{1\text{-formes fermées}\}}{\{1\text{-formes exactes}\}}.$$

Bien sûr, comme tout 1-forme exacte est fermée, cet espace est bien défini. En général, une forme fermée n'a pas besoin d'être exacte. La cohomologie mesure exactement combien l'espace des formes fermées est plus grand par rapport à l'espace des formes exactes.

- *En fait, il existe plusieurs notions équivalentes de cohomologie sur une surface de Riemann. Celle que l'on vient de définir s'appelle la cohomologie de De Rham. Comme la plupart des autres théories de la cohomologie ne produisent que des groupes, il est de coutume de dire que $H^1(X)$ est le groupe de cohomologie de X même s'il a beaucoup plus de structure.*

De même que l'homologie est étroitement liée au groupe fondamental, la cohomologie l'est également.

Théorème 1.31 Soit X une surface de Riemann. Alors on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$H^1(X) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(X), \mathbb{C}).$$

Croquis de démonstration. Soit $x_0 \in X$. Étant donné une classe de cohomologie $[\omega] \in H^1(X)$, on définit l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \mathbb{C} \\ [\gamma] &\mapsto \int_{\tilde{\gamma}} \omega, \end{aligned}$$

où $\tilde{\gamma}$ est un chemin différentiable dans la classe d'homologie $[\gamma]$. L'application linéaire $\Phi : H^1(X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(X), \mathbb{C})$ ainsi définie est un isomorphisme. \square

Le calcul explicite des groupes de cohomologie est généralement très difficile. L'objet qui nous aide à les calculer est la suite de Mayer-Vietoris, qui dépasse notre cadre. Heureusement, le théorème ci-dessus est suffisant pour calculer les groupes de cohomologie de certains espaces.

Exemple 1.19 — Sphère de Riemann. Soit $X = \hat{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann. Puisque $\hat{\mathbb{C}}$ est simplement connexe, son groupe fondamental est trivial et donc $\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(\hat{\mathbb{C}}), \mathbb{C})$ l'est également. On en déduit que $H^1(\hat{\mathbb{C}})$ est l'espace vectoriel trivial et donc dans $\hat{\mathbb{C}}$ toute 1-forme fermée est exacte.

Exemple 1.20 — Surface de genre g . Soit X une surface de Riemann compacte de genre g . Comme \mathbb{C} est un groupe abélien, $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ est dans le noyau de tout homomorphisme $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$. La propriété universelle du quotient implique donc que

$$\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(X), \mathbb{C}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(H_1(X), \mathbb{C}).$$

Comme $H_1(X)$ est isomorphe (comme groupe) à Z^{2g} , il suit que $H^1(X) \cong \mathbb{C}^{2g}$.

Pour conclure ce chapitre, on verra une variante simple de la notion de cohomologie. Soit $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ un sous-ensemble fini de X . On définit $\mathcal{E}^{(k)}(X, P)$ comme étant le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}^{(k)}(X)$ donné par les k -formes qui s'annulent sur P . Ces sous-espaces sont compatibles avec la dérivée extérieure en ce sens que la dérivée extérieure d'un élément de $\mathcal{E}^{(k)}(X, P)$ est un élément de $\mathcal{E}^{(k+1)}(X, P)$. Cela nous permet de définir une cohomologie basée sur la suite

$$\mathcal{E}^{(0)}(X, P) \xrightarrow{d_0} \mathcal{E}^{(1)}(X, P) \xrightarrow{d_1} \mathcal{E}^{(2)}(X, P) \xrightarrow{d_2} 0.$$

Pour faciliter la notation, on notera momentanément $d_k|_{\mathcal{E}^{(k)}(X, P)}$ par d_k^P .

Définition 1.26 — Cohomologie relative. Soit X une surface de Riemann et P un sous-ensemble fini de X . On définit la *cohomologie relative de X modulo P* comme étant le \mathbb{C} -espace vectoriel

$$H^1(X, P) := \frac{\ker d_1^P}{\operatorname{im} d_0^P} = \frac{\{1\text{-formes fermées qui s'annulent sur } P\}}{\{1\text{-formes exactes qui s'annulent sur } P\}}.$$

Une propriété fondamentale de la cohomologie relative est le fait que si X est une surface de Riemann compacte de genre g , alors $H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\})$ est naturellement isomorphe à \mathbb{C}^{2g+n-1} , comme indique la proposition suivante.

Proposition 1.32 Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et $\{p_1, \dots, p_n\} \subset X$. Alors l'application

$$[\omega] \mapsto \left(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, \int_{\gamma_2} \omega, \dots, \int_{\gamma_n} \omega \right),$$

où A_i et B_i sont des périodes de ω et γ_i sont des chemins reliant p_1 à p_i , est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\})$ et \mathbb{C}^{2g+n-1} .

Bien que la cohomologie relative soit un objet très courant dans la topologie algébrique, les ouvrages qui étudient la théorie de De Rham ne citent généralement pas la cohomologie relative. Le livre [11] est une belle exception.

2

THÉORIE DE TEICHMÜLLER

2.1 L'ESPACE DE MODULES DES TORES

La théorie de Teichmüller est, de manière générale, l'étude des collections de surfaces de Riemann. Étant donné un genre g , on aimerait paramétrer les différentes structures complexes pouvant être placées sur une surface topologique de genre g . Comme indiqué dans le chapitre précédent, l'espace de modules de surfaces de genre g , \mathcal{M}_g , est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence biholomorphe de surfaces de genre g . Dans cette section, on étudie l'exemple type qui nous guidera dans les cas les plus généraux : l'espace de modules des tores.

On se demande quand est-ce que deux tores \mathbb{C}/Λ et \mathbb{C}/Λ' sont biholomorphes. Notons tout d'abord que chaque tore complexe est biholomorphe au tore complexe X_τ défini par le réseau engendré par 1 et τ , où τ est un nombre complexe avec partie imaginaire positive. En effet, si Λ est engendré par ω_1 et ω_2 , alors $z \mapsto z/\omega_1$ est un biholomorphisme qui envoie Λ sur le réseau engendré par 1 et ω_2/ω_1 . Si ce rapport est dans le demi-plan supérieur \mathbb{H} , il s'agit de τ ; sinon, on peut prendre $\tau = -\omega_2/\omega_1$. On obtient ainsi un premier résultat :

Proposition 2.1 Tout tore complexe \mathbb{C}/Λ est biholomorphe à un tore complexe de la forme $X_\tau := \mathbb{C}/(Z \oplus \tau Z)$, où $\tau \in \mathbb{H}$.

Bien que la proposition 2.1 simplifie notre étude, elle ne nous donne pas une manière de dire systématiquement quand \mathbb{C}/Λ et \mathbb{C}/Λ' sont biholomorphes. Pour cela, on a besoin d'un résultat plus fort.

Théorème 2.2 Soient \mathbb{C}/Λ et \mathbb{C}/Λ' deux tores complexes. Alors ils sont biholomorphes si et seulement s'il existe un nombre complexe non-nul γ tel que $\Lambda' = \gamma\Lambda$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un biholomorphisme $f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$. En composant avec une translation appropriée sur \mathbb{C}/Λ' , on peut supposer que $f([0]) = [0]$. Par la formule de Riemann-Hurwitz, f n'est pas ramifié et est donc un revêtement au sens topologique. On en déduit que la composition $f \circ \pi' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$, où $\pi' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$ est l'application quotient, l'est aussi. Par la propriété universelle du revêtement universel (théorème 1.25), il existe un revêtement $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}/\Lambda \\
 \uparrow g & & \uparrow f \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi'} & \mathbb{C}/\Lambda'
 \end{array}$$

commute. Comme toutes les autres applications du diagramme sont holomorphes, g l'est aussi. De plus, puisque $f([0]) = [0]$, $\pi \circ g(0) = [0]$ et donc $g(0)$ est un point du réseau. On peut en fait supposer que $g(0) = 0$ car la composition avec translation par un point du réseau n'affecte pas l'application quotient.

Par commutativité du diagramme, g envoie des points d'un réseau à l'autre. D'où $g(z + \ell) - g(z)$ est toujours un point de Λ , disons $\omega(z, \ell)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $\ell \in \Lambda$. Mais Λ est un ensemble discret et \mathbb{C} est connexe; par conséquent, pour ℓ fixe, $\omega(z, \ell)$ est indépendant de z . On en déduit que $g(z + \ell) = g(z)$ et donc toutes les valeurs de g apparaissent dans le parallélogramme fondamental de Λ . Comme un tel parallélogramme est compacte, g est une fonction entière bornée. Le théorème de Liouville implique qu'il existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $g(z) = \gamma z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il suit que $\gamma\Lambda = \Lambda$.

Inversement, si $\gamma\Lambda = \Lambda$, alors $[z] \mapsto [\gamma z]$ est bien défini et est le biholomorphisme voulu. \square

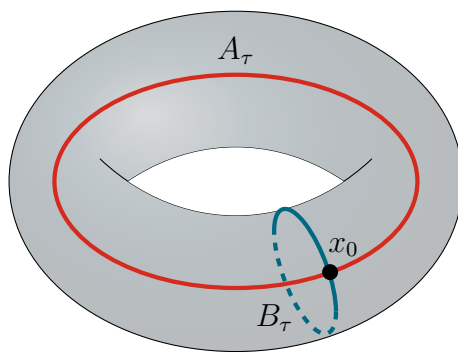
Maintenant on pose la question suivante : quand est-ce que X_τ et $X_{\bar{\tau}}$ sont biholomorphes ? Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait un nombre complexe γ tel que $\gamma(Z \oplus \tau Z) = Z \oplus \tau Z$. Dans ce cas, il doit y avoir des entiers a, b, c, d tels que $\gamma = c + d\tau$ et $\gamma\tau = a + b\tau$. En éliminant γ de ces équations, on obtient que $\tau = (a + b\tau)/(c + d\tau)$. De plus, pour que γ et $\gamma\tau$ engendrent $Z \oplus \tau Z$, le déterminant $ad - bc$ doit être égal à ± 1 . En fait, il doit être égal à 1, car τ et $\bar{\tau}$ se trouvent dans le demi-plan supérieur \mathbb{H} . Ces conditions sont également clairement suffisantes.

En d'autres termes, le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ des matrices 2×2 à coefficients entiers et déterminante unitaire agit sur le demi-plan supérieur \mathbb{H} de sorte que deux tores X_τ et $X_{\bar{\tau}}$ sont biholomorphes si et seulement si τ et $\bar{\tau}$ sont sur la même orbite. On obtient ainsi le résultat voulu.

Théorème 2.3 L'espace de modules des tores \mathcal{M}_1 est identifié au quotient $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$.

En fait, l'espace quotient $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ est une surface de Riemann biholomorphe à \mathbb{C} par le j -invariant de Felix Klein, l'un des objets les plus intéressants de toutes les mathématiques. Pour plus d'informations, voir [16], chapitre 6.

On peut également comprendre cette classification du point de vue du groupe fondamental. Soient X_τ et $X_{\bar{\tau}}$ deux tores complexes et T un tore topologique (c'est-à-dire un tore complexe sans son atlas). Prenons $x_0 = [0]$ comme point de base du groupe fondamental $\pi_1(T, x_0)$ (qui est à la fois le groupe fondamental de X_τ et de $X_{\bar{\tau}}$). Les segments compris entre 0 et 1 et entre 0 et τ dans \mathbb{C} , respectivement, déterminent les lacets A_τ et B_τ dans X_τ .



Les lacets A_τ et B_τ engendrent le groupe fondamental $\pi_1(T, x_0)$. Alors, $Z \oplus \tau Z$ est isomorphe

à $\pi_1(T, x_0)$ sous l'homomorphisme de groupe

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto A_\tau \\ \tau &\mapsto B_\tau. \end{aligned}$$

De même, $Z \oplus \tau Z$ est identifié à $\pi_1(T, x_0)$ sous l'homomorphisme de groupe $1 \mapsto A_\tau, \tau \mapsto B_\tau$. Alors, une application biholomorphe $f : X_\tau \rightarrow X_\tau$ induit un automorphisme $f : \pi_1(T, x_0) \rightarrow \pi_1(T, x_0)$ tel que

$$f([A_\tau]) = [f(A_\tau)] \quad \text{et} \quad f([B_\tau]) = [f(B_\tau)].$$

Cet automorphisme correspond au isomorphisme $\tilde{f} : Z \oplus \tau Z \rightarrow Z \oplus \tau Z$ entre réseaux. On peut considérer ainsi que la différence entre X_τ et X_τ correspond précisément à la différence entre les générateurs canoniques de $\pi_1(X_\tau, x_0)$ et de $\pi_1(X_\tau, x_0)$. Cela motive la définition suivante.

Définition 2.1 — Tore marqué. Soit T un tore topologique. Un *tore marqué* est une paire $(X, \Sigma(p))$, où X est une surface de Riemann dont la surface topologique sous-jacente est T et $\Sigma(p) = \{[A], [B]\}$ est un système de générateurs du groupe fondamental $\pi_1(T, p)$, qui s'appelle une *marquage*.

Pour paramétrer l'ensemble des tores marqués, on a besoin d'une notion d'équivalence dans les tores marqués et, par conséquent, dans les marquages.

D'abord, deux marquages $\Sigma(p) = \{[A], [B]\}$ et $\Sigma(p) = \{[A], [B]\}$ sont équivalents lorsqu'il existe un chemin h de p jusqu'à p tel que l'isomorphisme

$$\begin{aligned} P_h : \pi_1(T, p) &\rightarrow \pi_1(T, p) \\ [f] &\mapsto [h \cdot f \cdot \bar{h}] \end{aligned}$$

vérifie $P_h([A]) = [A]$ et $P_h([B]) = [B]$. Ensuite, deux tores marqués $(X, \Sigma(p))$ et $(Y, \Sigma(p))$, où $\Sigma(p) = \{[A], [B]\}$ et $\Sigma(p) = \{[A], [B]\}$, sont équivalents lorsqu'il existe un biholomorphisme $f : Y \rightarrow X$ tel que $f(\Sigma(p)) := \{f([A]), f([B])\}$ soit équivalent à $\Sigma(p) = \{[A], [B]\}$. On dénote par $[X, \Sigma(p)]$ la classe d'équivalence de $(X, \Sigma(p))$.

Définition 2.2 On définit l'*espace de Teichmüller* \mathcal{T}_1 comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des tores marqués.

Le prochain théorème est la classification que l'on voudrait pour les tores marqués à l'équivalence près.

Théorème 2.4 Pour chaque point $\tau \in \mathbb{H}$, soit $\Sigma_\tau = \{[A_\tau], [B_\tau]\}$ la marquage sur X_τ pour laquelle A_τ et B_τ correspondent à 1 et τ , respectivement. Alors $[X_\tau, \Sigma_\tau] = [X_\tau, \Sigma_\tau]$ dans \mathcal{T}_1 si et seulement si $\tau = \tau$.

Puisque chaque tore marqué est équivalent à $[X_\tau, \Sigma_\tau]$ pour un certain $\tau \in \mathbb{H}$, ce théorème montre que \mathcal{T}_1 est identifié de façon naturelle à \mathbb{H} .

Il y a encore une autre façon d'étudier les tores marqués. Si X et Y sont des surfaces de Riemann, on dit qu'un difféomorphisme $f : X \rightarrow Y$, vu comme une application entre des variétés réelles, *préserve l'orientation* si son déterminant Jacobien est partout positif. Les

équations de Cauchy-Riemann impliquent immédiatement que tout biholomorphisme préserve l'orientation.

Soit S un tore⁶ et $\Sigma = \{[A], [B]\}$ une marquage sur S . Toute paire (X, f) composée d'un tore complexe X et d'un difféomorphisme $f : S \rightarrow X$ qui préserve l'orientation détermine une marquage $f(\Sigma) = \{f([A]), f([B])\}$ sur X . Il découle naturellement de cette définition la question de savoir dans quelles conditions sur les difféomorphismes les tores avec ces marquages sont équivalents.

Proposition 2.5 Soient X, Y deux tores complexes et $f : S \rightarrow X, g : S \rightarrow Y$ deux difféomorphismes qui préservent l'orientation. Alors $[X, f(\Sigma)] = [Y, g(\Sigma)]$ dans \mathcal{T}_1 si et seulement si $g \circ f^{-1}$ est homotope à un biholomorphisme.

Démonstration. Supposons d'abord que $[X, f(\Sigma)] = [Y, g(\Sigma)]$. Soient (S_τ, Σ_τ) et (X_τ, Σ_τ) des tores complexes marqués représentant $[S, \Sigma]$ et $[X, f(\Sigma)] = [Y, g(\Sigma)]$, respectivement. On voit alors f et g comme des difféomorphismes $S_\tau \rightarrow X_\tau$. Comme on a vu dans la preuve du théorème 2.2, par la propriété universelle du revêtement universel (théorème 1.25), il existe des revêtements $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & X_\tau \\ \tilde{f} \uparrow \text{---} & & \uparrow f \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & S_\tau \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & X_\tau \\ \tilde{g} \uparrow \text{---} & & \uparrow g \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & S_\tau \end{array}$$

commutent. On peut supposer que \tilde{f} et \tilde{g} envoient respectivement $0, 1$ et τ à $0, 1$ et τ . On obtient donc une homotopie entre \tilde{f} et \tilde{g} en faisant

$$\tilde{F}_t = (1-t)\tilde{f} + t\tilde{g}, \quad \text{pour } t \in [0, 1].$$

Alors $F_t([z]) := [\tilde{F}_t(z)]$ définit une homotopie entre f et g . On conclut que $g \circ f^{-1}$ est homotope à l'identité.

Inversement, supposons que $g \circ f^{-1} : X \rightarrow Y$ soit homotope à un biholomorphisme $\sigma : X \rightarrow Y$. Dans ce cas, il y a une homotopie F_t entre $\sigma \circ f : S \rightarrow Y$ et $g : S \rightarrow Y$. Soit p le point de base de Σ et soit $h : I \rightarrow Y$ le chemin $F_t(p)$ entre $\sigma \circ f(p)$ et $g(p)$. Alors l'isomorphisme $P_h : \pi_1(Y, g(p)) \rightarrow \pi_1(Y, \sigma \circ f(p))$ implique que les marquages $(\sigma \circ f)(\Sigma)$ et $g(\Sigma)$ sur Y sont équivalentes, d'où $[X, f(\Sigma)] = [Y, g(\Sigma)]$. \square

Comme l'on a vu, pour chaque difféomorphisme préservant l'orientation $f : S \rightarrow X$, il y a une marquage canoniquement attachée $f(\Sigma)$ sur X . Inversement, pour chaque tore marqué $(X, \Sigma(p))$, il existe un difféomorphisme préservant l'orientation $f : S \rightarrow X$ tel que $[X, \Sigma(p)] =$

6. Maintenant il ne suffit pas d'avoir un tore topologique parce que l'on veut étudier des difféomorphismes. Dans ce cas, S a une structure de variété mais pas nécessairement une structure de surface de Riemann. Autrement dit, les fonctions de transition ne doivent pas nécessairement être holomorphes.

$[X, f(\Sigma)]$. En fait, si (S_τ, Σ_τ) et (X_τ, Σ_τ) sont des tores complexes marqués représentant $[S, \Sigma]$ et $[X, \Sigma(p)]$, respectivement, alors l'application

$$[z] \mapsto \left[\frac{(\tau - \bar{\tau})z - (\tau - \tau)\bar{z}}{\tau - \bar{\tau}} \right]$$

est un difféomorphisme $S \rightarrow X$ préservant l'orientation. En raison de cette correspondance, on dit également qu'un difféomorphisme $f : S \rightarrow X$ préservant l'orientation est un marquage et que (X, f) est un tore marqué.

En vue de la proposition 2.5, on dit que deux paires (X, f) et (Y, g) sont équivalentes si $g \circ f^{-1}$ est homotope à un biholomorphisme.

Définition 2.3 — Espace de Teichmüller. Soit S un tore. On définit l'espace de Teichmüller de S comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des tores marqués (X, f) , où $f : S \rightarrow X$ est un difféomorphisme préservant l'orientation. On dénote ce espace par $\mathcal{T}(S)$.

Comme avant, on dénote par $[X, f]$ la classe d'équivalence de (X, f) . Clairement, \mathcal{T}_1 et $\mathcal{T}(S)$ ne sont que des façons différentes de voir le même objet.

Enfin et surtout, comme le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur \mathbb{H} , il agit également de manière naturelle sur \mathcal{T}_1 en faisant $A \cdot (X_\tau, \Sigma_\tau) := (X_{A\tau}, \Sigma_{A\tau})$ pour $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, où l'action sur \mathbb{H} est donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau := \frac{a + b\tau}{c + d\tau}.$$

D'autre part, le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Mod}(S)$ de toutes les classes d'homotopie $[h]$ de difféomorphismes $h : S \rightarrow S$ préservant l'orientation. En utilisant cet isomorphisme, on définit une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Mod}(S)$ dans $\mathcal{T}(S)$ par

$$[h] \cdot [X, f] = [X, f \circ h^{-1}].$$

Ces actions ont la merveilleuse propriété de « oublier la marquage », dans le sens où

$$\mathcal{M}_1 \cong \frac{\mathcal{T}_1}{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \cong \frac{\mathcal{T}(S)}{\mathrm{Mod}(S)}.$$

Puisque l'espace de Teichmüller est généralement plus simple que l'espace de modules (par exemple, l'espace de Teichmüller est toujours une variété, alors que l'espace de modules ne l'est pas toujours), notre approche dans les sections suivantes consiste à étudier un certain espace de Teichmüller puis quotienter par un groupe approprié pour obtenir l'espace de modules.

2.2 L'ESPACE DE TEICHMÜLLER DES SURFACES COMPACTES

En fait, on a déjà fait tout le travail difficile. Les définitions qui ont fonctionné dans l'exemple type des tores fonctionnent toujours pour des surfaces compactes de genres arbitraires. Ainsi, cette section est beaucoup plus expositive que déductive. Comme auparavant, on va construire l'espace de Teichmüller de deux manières. Commençons en considérant les systèmes de générateurs du groupe fondamental.

Définition 2.4 — Surface marquée. Soit R une surface topologique de genre g . Une *surface de Riemann marquée* est une paire $(X, \Sigma(p))$, où X est une surface de Riemann dont la surface topologique sous-jacente est R et $\Sigma(p) = \{[A_1], [B_1], \dots, [A_g], [B_g]\}$ est un système de générateurs du groupe fondamental $\pi_1(R, p)$, qui s'appelle une *marquage*.

Comme précédemment, on a besoin d'une notion d'équivalence de surfaces marquées et donc de marquages. D'abord, deux marquages $\Sigma(p) = \{[A_1], [B_1], \dots, [A_g], [B_g]\}$ et $\Sigma(p) = \{[A_1], [B_1], \dots, [A_g], [B_g]\}$ sont équivalents lorsqu'il existe un chemin h de p jusqu'à p tel que l'isomorphisme

$$\begin{aligned} P_h : \pi_1(R, p) &\rightarrow \pi_1(R, p) \\ [f] &\mapsto [h \cdot f \cdot \bar{h}] \end{aligned}$$

vérifie $P_h([A_i]) = [A_i]$ et $P_h([B_i]) = [B_i]$ pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$. Ensuite, deux surfaces de Riemann marquées $(X, \Sigma(p))$ et $(Y, \Sigma(p))$ sont équivalents lorsqu'il existe un biholomorphisme $f : Y \rightarrow X$ tel que $f(\Sigma(p)) := \{f([A_1]), f([B_1]), \dots, f([A_g]), f([B_g])\}$ soit équivalent à $\Sigma(p) = \{[A_1], [B_1], \dots, [A_g], [B_g]\}$. On dénote par $[X, \Sigma(p)]$ la classe d'équivalence de $(X, \Sigma(p))$.

Définition 2.5 — Espace de Teichmüller. On définit l'*espace de Teichmüller* \mathcal{T}_g comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des surfaces de Riemann de genre g marquées.

La seconde approche est donnée en considérant des difféomorphismes préservant l'orientation. Soit S une surface différentielle de genre g . On considère les paires (X, f) , où X est une surface de Riemann de genre g et $f : S \rightarrow X$ est un difféomorphisme qui préserve l'orientation. Comme avant, on dit également qu'un difféomorphisme $f : S \rightarrow X$ préservant l'orientation est une marquage et que (X, f) est une surface de Riemann marquée. Deux paires (X, f) et (Y, g) sont équivalents si $g \circ f^{-1}$ est homotope à un biholomorphisme. On note par $[X, f]$ la classe d'équivalence de (X, f) .

Définition 2.6 — Espace de Teichmüller. Soit S une surface différentielle de genre g . On définit l'*espace de Teichmüller* de S comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des surfaces de Riemann marquées (X, f) , où $f : S \rightarrow X$ est un difféomorphisme préservant l'orientation. On dénote ce espace par $\mathcal{T}(S)$.

Comme dans le cas des tores, les deux espaces de Teichmüller \mathcal{T}_g et $\mathcal{T}(S)$, pour une surface S de genre g , sont naturellement identifiés. En d'autres termes, l'application $[X, f] \mapsto [X, f(\Sigma)]$, où $\Sigma = \{[A_1], [B_1], \dots, [A_g], [B_g]\}$ est une marquage fixée de S , est bien définie et bijective. La démonstration de ce fait n'est pas aussi simple dans le cas général que dans le contexte des tores et sera donc omise. Le lecteur intéressé peut le consulter sur [15].

Enfin, l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$ est doté d'une action canonique. Considérons le groupe $\text{Mod}(S)$, appelé en anglais « Mapping Class Group », constitué de tous les difféomorphismes préservant l'orientation modulo homotopie. Un élément $[h] \in \text{Mod}(S)$ agit sur $\mathcal{T}(S)$ par $[h] \cdot [X, f] = [X, f \circ h^{-1}]$.

Puisque deux éléments de $\mathcal{T}(S)$ sont dans la même orbite de $\text{Mod}(S)$ exactement quand leurs marquages sont équivalentes, deux éléments de l'espace des orbites $\mathcal{T}(S)/\text{Mod}(S)$ sont égaux si et seulement si les surfaces de Riemann sont biholomorphes. En d'autres termes, on obtient l'espace de modules \mathcal{M}_g .

Les deux espaces $\mathcal{T}(S)$ et \mathcal{M}_g peuvent naturellement être vus comme ouverts de \mathbb{C}^{3g-3} , pour $g > 1$. De plus, $\mathcal{T}(S)$ a une structure de variété complexe de dimension $3g - 3$. D'autre part, \mathcal{M}_g n'est pas une variété car il présente des singularités.

2.3 DIFFÉRENTIELLES ABÉLIENNES ET STRATIFICATION

Dorénavant on étudiera une variante de l'espace des modules des surfaces compactes. Au lieu de considérer les paires (X, f) , où f est un difféomorphisme préservant l'orientation, considérons les paires (X, ω) , où ω est une 1-forme holomorphe non-nulle (dans ce contexte il est habituel d'appeler les 1-formes holomorphes par *différentielles abéliennes*).⁷

On note \mathcal{L}_g l'ensemble des paires (X, ω) où X désigne une surface de Riemann de genre g et ω est une 1-forme holomorphe non-nulle sur X . Si S est une surface de genre g , le groupe $\text{Mod}(S)$ agit sur \mathcal{L}_g de façon naturelle. Un élément $[h] \in \text{Mod}(S)$ agit sur une surface de Riemann X de la façon suivante : si $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ est l'atlas maximal sur X , on définit $[h] \cdot X$ comme la surface de Riemann qui a la même surface topologique sous-jacente mais $\{h \circ \varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ comme atlas. Enfin, l'action de $\text{Mod}(S)$ sur \mathcal{L}_g est donnée par

$$[h] \cdot (X, \omega) := ([h] \cdot X, h \omega).$$

On définit ainsi l'espace de modules des différentielles abéliennes.

Définition 2.7 — Espace de modules des différentielles abéliennes. L'espace de modules des différentielles abéliennes est l'espace des orbites $\mathcal{L}_g / \text{Mod}(S)$. On le dénote par \mathcal{H}_g .

Étant donné une différentielle abélienne ω sur une surface de Riemann X , la formule de Riemann-Hurwitz (théorème 1.21) implique que la somme des ordres des zéros de ω vaut $2g - 2$. En écrivant ces valeurs par ordre décroissant, on obtient une liste $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ des ordres des zéros de ω .

Alors pour chaque liste $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ telle que $\kappa_1 + \dots + \kappa_n = 2g - 2$, on définit $\mathcal{L}(\kappa)$ comme étant le sous-ensemble de \mathcal{L}_g consistant en toutes les différentielles abéliennes dont la liste des ordres de ses zéros coïncide avec κ .

On peut montrer que si h est un difféomorphisme préservant l'orientation, alors $h \omega$ et ω ont les mêmes ordres des zéros. Cela nous permet de passer au quotient.

Définition 2.8 — Strate. Soit $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ une liste telle que $\kappa_1 + \dots + \kappa_n = 2g - 2$. On dénote l'espace des orbites $\mathcal{L}(\kappa) / \text{Mod}(S)$ par $\mathcal{H}(\kappa)$. On dit que les sous-ensembles $\mathcal{H}(\kappa)$ sont des strates de l'espace de modules des différentielles abéliennes.

Par définition,

$$\mathcal{H}_g = \coprod_{\kappa_1 + \dots + \kappa_n = 2g - 2} \mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n).$$

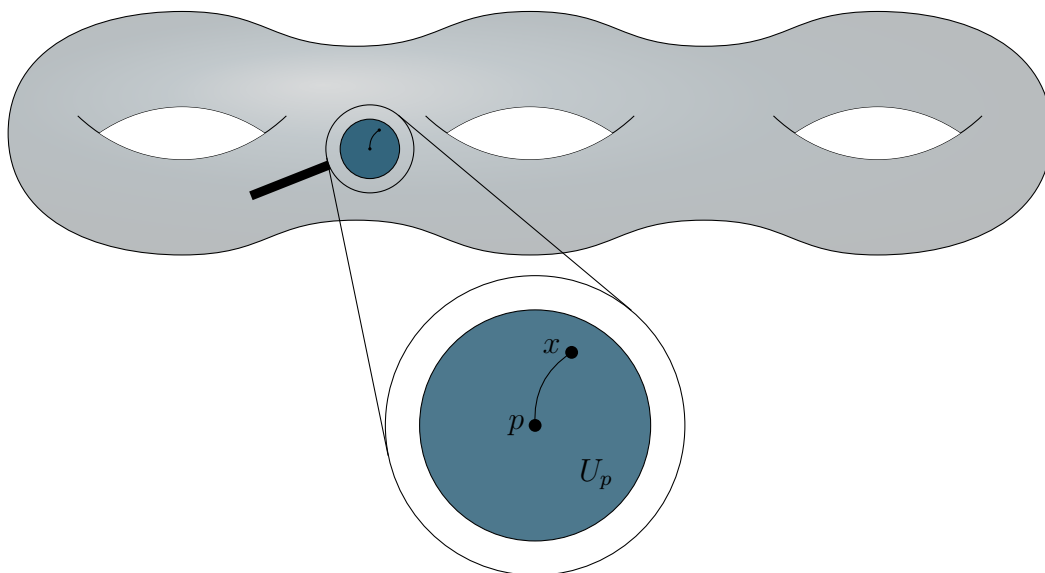
Cette nomenclature est donnée par le fait que les $\mathcal{H}(\kappa)$ partitionnent l'espace de modules des différentielles abéliennes de sorte que chaque $\mathcal{H}(\kappa)$ ait une dimension différente.

⁷ Comme toute différentielle abélienne est définie sur une surface de Riemann, on omettra X de la paire s'il n'y a pas de risque d'interprétation erronée.

2.4 SURFACES DE TRANSLATION

Il existe un point de vue alternative à l'espace \mathcal{L}_g qui facilite grandement la compréhension. Étant donné une pair (X, ω) , où X est une surface de Riemann de genre g et ω est une différentielle abélienne non-nulle sur X , soit P l'ensemble de zéros de ω . On verra que ω détermine de façon canonique un atlas sur la surface perforée $X \setminus P$.

Étant donné un point $p \in X \setminus P$, soit U_p un voisinage connexe par arcs de p . Alors l'application $\varphi_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_p(x) := \int_p^x \omega$, obtenue en intégrant ω sur un chemin allant de p jusqu'à x , est indépendante du chemin choisi. (Proposition 1.28.) De plus, en réduisant le domaine et le codomaine si nécessaire, cette application est un homéomorphisme et donc une carte centrée en p .



On conclut que la famille $\{(U_p, \varphi_p) | p \in X \setminus P\}$ est un atlas sur $X \setminus P$. Cet atlas est important précisément parce que l'égalité $\int_p^x \omega = \int_q^x \omega + \int_p^q \omega$, qui vaut pour les chemins suffisamment petits, implique que les fonctions de transition sont encore plus régulières qu'une fonction holomorphe ; elles sont des translations de la forme $\varphi_p \circ \varphi_q^{-1}(z) = z + c$, où $c = \int_p^q \omega$ est une constante.

En outre, le théorème de Riemann sur les singularités apparentes implique que cet atlas peut être étendu à X de telle sorte que le tiré-en-arrière de $z^k dz$ par une carte centrée sur un zéro p d'ordre k (y compris le cas $k = 0$) soit exactement ω .

Une famille maximale de cartes compatibles sur une surface topologique S , dont les fonctions de transition sont données par les translations du plan complexe, en dehors d'un ensemble fini de points, est appelée une *structure de surface de translation* sur S .

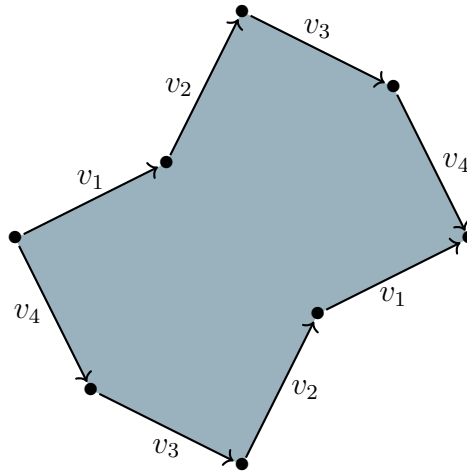
En d'autres termes, on a vu que toute différentielle abélienne non-nulle ω donne lieu à une structure de surface de translation telle que ω est localement le tiré-en-arrière de la 1-forme holomorphe canonique dz sur \mathbb{C} . En revanche, chaque structure de translation détermine une surface de Riemann (puisque translations sont toujours holomorphes) et une différentielle abélienne non-nulle ω donné par le tiré-en-arrière de dz par les cartes de la structure de translation.

On obtient ainsi que :

Proposition 2.6 L'ensemble \mathcal{L}_g est canoniquement identifié à l'ensemble de tous les structures de surface de translation sur une surface topologique S de genre g .

En fait, il existe un moyen simple d'obtenir un grand nombre de surfaces de translation.

Exemple 2.1 Considérons une collection v_1, \dots, v_n de vecteurs dans $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. D'abord on construit une ligne brisée en plaçant les vecteurs dans l'ordre, l'un après l'autre. Ensuite, on fait une seconde ligne brisée commençant au même point que précédemment mais en plaçant les vecteurs dans l'ordre $v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}$, où $\sigma \in S_n$ est une permutation.



Supposons que ces deux lignes délimitent un polygone. Dans ce cas, en identifiant les vecteurs égaux par des translations, on obtient une structure de surface de translation sur la surface quotient. C'est le cas des tores complexes, par exemple.

2.5 SURFACES À PETITS CARREAUX

Dans cette section, on étudiera un cas particulier de structure de surface de translation qui est suffisamment général pour être utile et suffisamment particulier pour être simple et compréhensible à plusieurs points de vue. Au lieu d'identifier les côtés parallèles des polygones, comme dans l'exemple 2.1, on va identifier les côtés parallèles des ensembles de carrés dans le plan.

Définition 2.9 — Surface à petits carreaux. Une *surface à petits carreaux* est une surface de Riemann obtenue à partir d'une collection finie de carrés unitaires de \mathbb{R}^2 après l'identification des paires de côtés parallèles par translations.

Bien sûr, le tore carré $\mathbb{C}/(Z \oplus iZ)$ est une surface à petits carreaux. Un exemple un peu complexe est celui de l'exemple 1.8.

Le fait de définir les surfaces de Riemann à partir de collections finies de carrés nous permet d'étudier les surfaces à petits carreaux (et même l'espace de modules de différentielles abé-

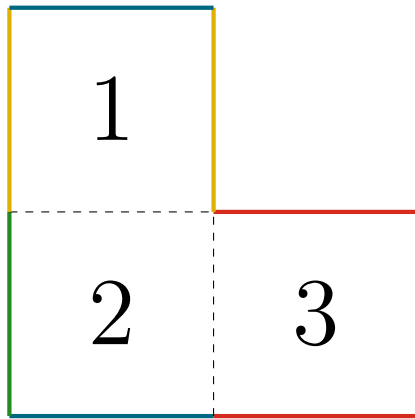
liennes) à l'aide de méthodes combinatoires. On peut énumérer les carrés de 1 à n et dire que $d(i)$ est le carré à droite de i et que $s(i)$ est le carré supérieur à i . Le fait qu'une surface de Riemann est toujours connexe équivaut à imposer que d et s doivent agir de manière transitive (définition A.18) sur $\{1, \dots, n\}$. On obtient ainsi une définition équivalente.

Définition 2.10 — Surface à petits carreaux. Une *surface à petits carreaux* est une paire de permutations $(d, s) \in S_n \times S_n$ agissant transitivement sur $\{1, \dots, n\}$.

- Comme l'on peut numéroter les carrés de plusieurs façons différentes, deux paires (d, s) et (d', s') génèrent la même surface si et seulement s'il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $(d', s') = (\sigma d \sigma^{-1}, \sigma s \sigma^{-1})$.

La surface de l'exemple 1.8 sera notre exemple type.

Exemple 2.2 Énumérons les carrés de la surface de l'exemple 1.8 :



Le carré à droite de 1 est lui-même et le carré au-dessus est 2. C'est-à-dire que $d(1) = 1$ et $s(1) = 2$. Pareillement, $d(2) = 3$, $s(2) = 1$, $d(3) = 2$ et $s(3) = 3$.

Tout comme dans l'exemple 1.8, l'angle autour d'un sommet sur une surface à petits carreaux est généralement un multiple non-trivial de 2π . (Cela reflète le fait que l'application quotient est ramifiée à ces points.) On dit que ces points sont des *singularités coniques*.

En tant que surfaces de translation, les surfaces à petits carreaux ont une différentielle abélienne naturellement associée $\omega = dz$, qui est définie globalement parce que les fonctions de transition sont des translations. Le fait que l'application quotient ait une singularité conique d'angle $2\pi(k+1)$ implique que ω a un zéro d'ordre k . La proposition 2.6 permet alors de dire qu'une surface à petits carreaux ayant des singularités coniques d'angles $2\pi(\kappa_1+1), \dots, 2\pi(\kappa_n+1)$ est un élément de $\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$.

Enfin et surtout, il existe une dernière définition équivalente de surface à petits carreaux.

Définition 2.11 — Surface à petits carreaux. Une *surface à petits carreaux* est une paire (X, f) , composée d'une surface de Riemann X et d'un revêtement holomorphe $f : X \rightarrow \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$, où $[0] \in \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$ est le seul point de branchement.

Étant donné une paire (X, f) comme dans la définition 2.11, les carrés qui apparaissent dans la définition 2.9 sont exactement les composants connexes de $f^{-1}((0, 1) \times i(0, 1))$. De plus, on

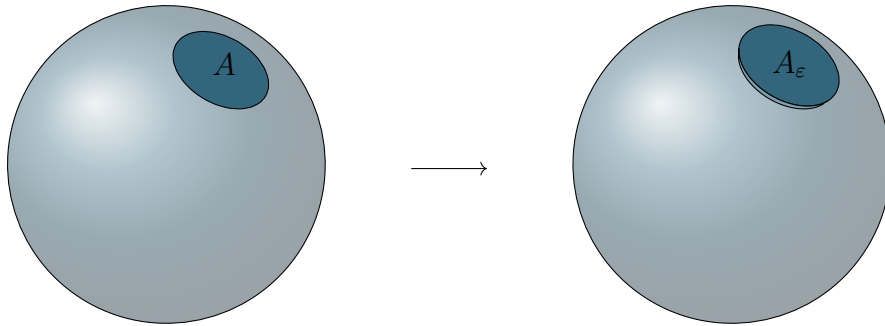
peut utiliser le revêtement holomorphe f pour obtenir la différentielle abélienne associée à la surface de translation X :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/(Z \oplus iZ) \\ f \, dz & \longleftarrow & dz \end{array}$$

En d'autres mots, $(X, f \, dz)$ est une surface de translation obtenue à partir d'une collection finie de carrés après l'identification des côtés parallèles par translations.

2.6 LA MESURE DE MASUR-VEECH

L'objectif de cette section est d'étudier une mesure naturelle sur l'espace de modules de différentielles abéliennes. Notre approche sera analogue à une méthode très concrète qui peut être utilisée pour calculer des aires sur une hypersurface : soit $A \subset S^2$ un sous-ensemble de la sphère unité de \mathbb{R}^3 .



En supposant que l'on sache calculer la mesure de Lebesgue μ de \mathbb{R}^3 , on peut considérer l'ensemble

$$A_\varepsilon := \{tx \in \mathbb{R}^3 \mid x \in A, t \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)\}.$$

Dans ce cas, la mesure superficielle de A , $\mu_s(A)$, est simplement donnée par ⁸

$$\mu_s(A) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mu(A_\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0}.$$

Notre plan pour définir la mesure de Masur-Veech sera analogue : on commencera par définir une mesure naturelle dans l'espace $\mathcal{H}(\kappa)$. Comme dans le cas de \mathbb{R}^3 , cet espace a une mesure infinie. On définit ensuite une hypersurface analogue à la sphère unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, qui aura une mesure superficielle héritée de la mesure définie sur $\mathcal{H}(\kappa)$.

Tout d'abord, l'isomorphisme donné par la proposition 1.32

$$[\omega] \mapsto \left(\int_{a_1} \omega, \int_{b_1} \omega, \dots, \int_{a_g} \omega, \int_{b_g} \omega, \int_{\gamma_2} \omega, \dots, \int_{\gamma_n} \omega \right)$$

8. Dans ce cas, on peut le prouver en utilisant le principe de Cavalieri et le théorème de Fubini. Dans le cas général, ce résultat s'appelle *théorème de désintégration de Rokhlin*.

nous permet d'utiliser la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C}^{2g+n-1} pour définir une mesure dans l'espace $H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\})$ en tant que mesure image.

En fait, cet isomorphisme n'étant pas canonique (on aurait pu choisir une autre base d'homologie et d'autres chemins reliant p_1 aux p_i), cette mesure n'est définie qu'à normalisation près. Pour cette raison, on définit le sous-groupe $H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\}; Z \oplus iZ) \subset H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\})$ défini par

$$\left\{ [\omega] \in H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\}) \mid \int_{\gamma} \omega \in Z \oplus iZ \text{ pour tout chemin } \gamma \text{ soit fermé soit reliant les } p_i \right\}.$$

Ce sous-groupe est discret et alors on déclare la mesure du domaine fondamental de

$$\frac{H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\})}{H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\}; Z \oplus iZ)}$$

comme étant égale à 1. On note la mesure ainsi obtenue par μ_H .

Pour définir une mesure sur $\mathcal{H}(\kappa)$, on veut définir des « cartes » qui envoient un voisinage de $[X, \omega] \in \mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ vers un ouvert de $H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\})$.⁹ Le choix naturel est

$$[X, \omega] \mapsto [\omega].$$

A priori, il peut sembler que cette application ne soit pas bien définie au-delà d'un seul point dans $\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ car les points proches de $[X, \omega_0]$ n'ont pas nécessairement les mêmes zéros de ω_0 . Cependant, il y a toujours un représentant de $[X, \omega]$ qui a les mêmes zéros que ω_0 .¹⁰

Comme les fonctions de transition entre ces cartes préservent la mesure de Lebesgue (ce sont des éléments de $SL_m(\mathbb{C})$, où $m = 2g + n - 1$), la mesure μ_H induit localement une mesure μ sur $\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ en tant que mesure image de μ_H par la réciproque de ces cartes.

Malheureusement, la mesure de $\mathcal{H}(\kappa)$ est toujours infinie, ce qui ne nous permet pas de prendre des informations à partir des valeurs de $\mu(\mathcal{H}(\kappa))$. On définit donc une hypersurface

$$\mathcal{H}_1(\kappa) := \{[X, \omega] \in \mathcal{H}(\kappa) \mid S([X, \omega]) = 1\},$$

où $S : \mathcal{H}(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction homogène (de degré 2)¹¹ définie par

$$S([X, \omega]) := \frac{i}{2} \int_X \omega \wedge \bar{\omega}.$$

De manière analogue au cas de la sphère unité dans \mathbb{R}^3 , on peut utiliser la mesure μ , définie sur $\mathcal{H}(\kappa)$, pour définir une mesure μ_1 sur $\mathcal{H}_1(\kappa)$. La construction de cette mesure en détail impliquerait d'entrer dans trop de détails techniques sur le théorème de désintégration de Rokhlin, ce qui est hors de notre portée. On appelle μ_1 la *mesure de Masur-Veech*, en référence à Howard Masur et William Veech, qui ont prouvé dans [20, 31] le résultat suivant.

9. Lors de la composition avec l'isomorphisme canonique de $H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\})$, ces applications deviennent des vraies cartes.

10. En d'autres termes, il existe toujours un difféomorphisme $[h] \in \text{Mod}(S)$ tel que $h \omega$ et ω_0 aient les mêmes zéros.

11. C'est-à-dire que $S([X, t\omega]) = |t|^2 S([X, \omega])$.

Théorème 2.7 — (Masur - Veech). Les volumes des strates $\mathcal{H}_1(\kappa)$ par rapport à la mesure μ_1 sont finis.

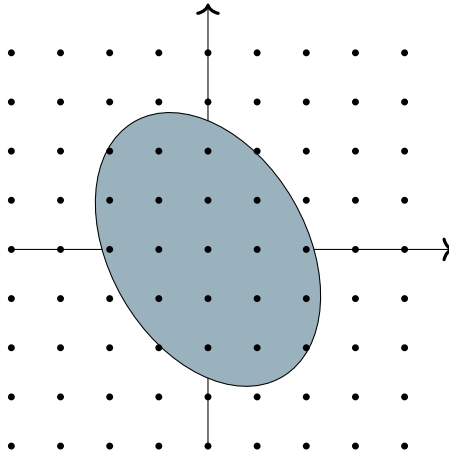
La suite de notre étude sera consacrée à l'étude des valeurs $\mu_1(\mathcal{H}_1(\kappa))$. On appelle désormais ces valeurs *volumes de Teichmüller*. Dans le chapitre suivant, on verra une méthode géométrique qui nous permettra de calculer ces valeurs pour κ petit. Cette méthode, bien que capable de calculer certaines valeurs numériques, ne répond pas à plusieurs doutes théoriques. Pour cela, on utilisera au chapitre 5 une technique basée sur la théorie des représentations du groupe symétrique.

3

L'APPROCHE GÉOMÉTRIQUE AUX VOLUMES DE TEICHMÜLLER

3.1 LA MÉTHODE

Dans ce chapitre, on étudiera une méthode développée par Anton Zorich, dans son article « Square Tiled Surfaces and Teichmüller Volumes of the Moduli Spaces of Abelian Differentials » [34], qui permet de calculer les volumes de Teichmüller $\mu_1(\mathcal{H}_1(\kappa))$ pour des petites valeurs de κ . L'idée principale remonte à Gauss et consiste à approximer la mesure d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^n par le nombre de points entiers qu'il contient.



En d'autres termes, pour calculer le volume d'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, on peut faire une homothétie de rapport r et compter sur le nombre de points entiers $m(r)$ contenus dans rA . Ce nombre est asymptotiquement égal à $\text{Vol}(rA) = \text{Vol}(A)r^n$. Comme la mesure superficielle de ce sous-ensemble est

$$\left. \frac{d\text{Vol}(rA)}{dr} \right|_{r=1} = n\text{Vol}(A),$$

pour calculer la mesure superficielle de A , il suffit de connaître le coefficient dans le terme principal du développement asymptotique du nombre de points entiers dans rA .

Le contexte des volumes de Teichmüller est analogue : puisque $H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\})$ est isomorphe à \mathbb{C}^{2g+n-1} , on utilise le réseau $(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^{2g+n-1} \subset \mathbb{C}^{2g+n-1}$ comme l'ensemble des « points entiers ». Autrement dit, nos « points entiers » sont les éléments $[X, \omega]$ de $\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ dont l'image par l'isomorphisme $H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\}) \rightarrow \mathbb{C}^{2g+n-1}$ est un élément de $(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^{2g+n-1}$.

Dans ce cas, on veut compter le nombre $m(r)$ de différentielles abéliennes « entières » ω

telles que $S([X, \omega]) \leq r$, où

$$S : \mathcal{H}(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[X, \omega] \mapsto \frac{i}{2} \int_X \omega \wedge \bar{\omega}$$

est la fonction que l'on a utilisée pour définir l'hypersurface $\mathcal{H}_1(\kappa)$. La seule différence avec le cas précédent est que S est une fonction homogène de degré 2. Alors, pour calculer la mesure de $\mathcal{H}_1(\kappa)$ par dérivation du volume, il faut utiliser un facteur supplémentaire de 2. C'est-à-dire que

$$\mu_1(\mathcal{H}_1(\kappa_1, \dots, \kappa_n)) = 2(2g + n - 1)c,$$

où c est telle que $m(r) \sim c \cdot r^{2g+n-1}$ lorsque r tend vers l'infini.

En fait, ces différentielles abéliennes « entières » sont des objets déjà bien connus du lecteur. Étant donné une telle différentielle $[\omega] \in H^1(X, \{p_1, \dots, p_n\})$, on peut définir un revêtement holomorphe $f_\omega : X \rightarrow \mathbb{C}/(Z \oplus iZ)$ en faisant

$$p \mapsto \left(\int_{p_1}^p \omega \right) \bmod Z \oplus iZ.$$

Cet application a exactement n points de ramification : p_1, \dots, p_n . On conclut que son unique point de branchement est $[0] \in \mathbb{C}/(Z \oplus iZ)$ et donc ω définit une surface à petits carreaux au sens de la définition 2.11. En revanche, étant donné une surface à petits carreaux (X, ω) au sens de la définition 2.9, on peut également vérifier que ω est une différentielle « entière ».

En résumant notre discussion, on a obtenu le théorème suivant.

Théorème 3.1 Soit $m(r)$ le nombre de surfaces à petits carreaux avec des singularités coniques d'angles $2\pi(\kappa_1 + 1), \dots, 2\pi(\kappa_n + 1)$ que peuvent être construites avec au plus r carrés. Alors,

$$\mu_1(\mathcal{H}_1(\kappa_1, \dots, \kappa_n)) = 2(2g + n - 1)c,$$

où c est telle que $m(r) \sim c \cdot r^{2g+n-1}$ lorsque r tend vers l'infini.

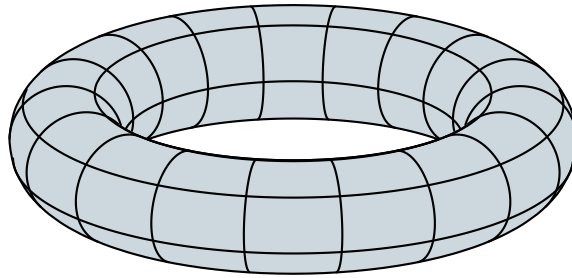
Ce théorème est la base de notre méthode pour calculer certains volumes de Teichmüller : on calcule le nombre de surfaces à petits carreaux d'un type topologique donné et puis on prend le terme principal du développement asymptotique.

3.2 CALCUL DU VOLUME DE $\mathcal{H}_1(0)$

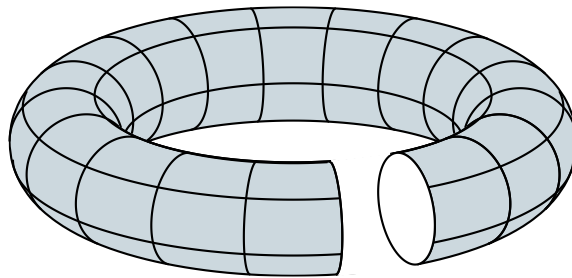
Pour illustrer l'approche que l'on vient de décrire, on va calculer le volume de Teichmüller le plus simple : $\mu_1(\mathcal{H}(0))$, celui de la strate des tores. Dans ce cas, on n'a pas de singularité conique et donc il suffit de compter le nombre de façons de paver un tore topologique avec au plus r carrés de telle sorte que les tores complexes résultants ne soient pas isomorphes.

Disons que l'on a pavé un tore avec un nombre arbitraire de carrés, comme dans l'image suivante.

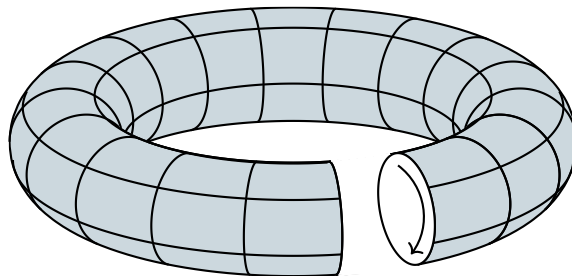
CALCUL DU VOLUME DE $\mathcal{H}_1(0)$



En coupant le tore le long d'une ligne verticale, on obtient un cylindre avec $v \cdot h$ carrés, où v est la quantité de carrés verticalement et h est le nombre de carrés horizontalement.



Du point de vue du groupe fondamental à l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_1 , on voit qu'en tournant ce cylindre et en le rétractant, on obtient un tore non-isomorphe à l'original. Cette procédure s'appelle un *twist de Dehn* dans la littérature.¹²



Il en résulte que, en fixant v et h , il y a v pavages non-difféomorphes. Ainsi, le nombre de tores carrés construits en utilisant au plus r carrés est d'environ

$$\sum_{\substack{v,h \in \mathbb{N} \\ vh = r}} v = \sum_{\substack{v,h \in \mathbb{N} \\ v = r/h}} v = \sum_{h=1}^{r/h} \sum_{v=1}^{r/h} v \sim \sum_{h=1} \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{h^2} = \frac{r^2}{2} \sum_{h=1} \frac{1}{h^2} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

En fait, certains des tores présents dans la première somme sont isomorphes et sont donc comptés deux fois, voire plusieurs fois. Néanmoins, puisque cette correction n'affecte pas le terme principal, on va la négliger.

On obtient ainsi notre premier volume :

12. Son importance réside dans le fait que les twists de Dehn génèrent le groupe $\text{Mod}(S)$.

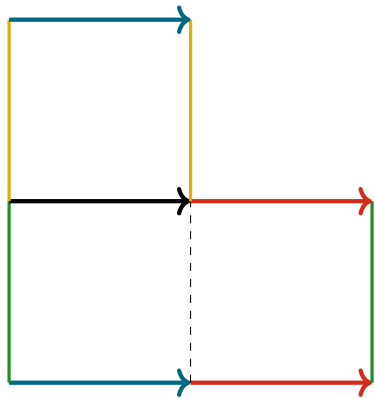
Théorème 3.2 Le volume de Teichmüller de $\mathcal{H}(0)$ est

$$\mu_1(\mathcal{H}_1(0)) = \frac{\pi^2}{3}.$$

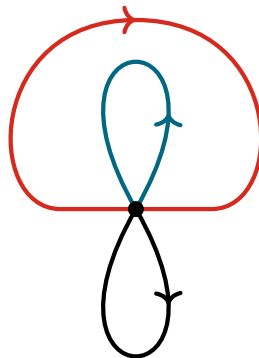
3.3 CALCUL DU VOLUME DE $\mathcal{H}_1(2)$

La même méthode peut être utilisée pour calculer le volume de Teichmüller de $\mathcal{H}(2)$. Cependant, dans ce cas, on a besoin de faire une analyse un peu plus sophistiquée. On va diviser les surfaces à petits carreaux en deux types pour les compter séparément.

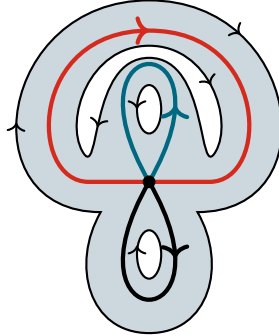
Les surfaces à petits carreaux appartenant à la strate $\mathcal{H}_1(2)$ ont une seule singularité conique d'angle 6π . Étant donné une telle surface, on considère les côtés horizontaux (avec l'orientation héritée du plan) qui sont adjacents à cette singularité dans l'ensemble des carrés qui constituent cette surface. Dans le cas ci-dessous, tous les sommets sont équivalents et donc on a 3 lacets formés par les côtés horizontaux non-équivalents situés entre les sommets.



L'union de la singularité conique avec ces boucles forme un graphe orienté fini Γ . De plus, comme ce graphe est dessiné sur une surface orientée, il porte une ordre cyclique, à savoir l'ordre horaire dans lequel les arêtes sont attachés au sommet. L'orientation des arêtes alterne lorsque l'on suit l'ordre horaire.



On définit ensuite une surface orientée à bord $S(\Gamma)$ en remplaçant chaque arête de Γ par un rectangle topologique orienté.



L'orientation des arêtes de Γ donne lieu à une orientation de la frontière de $S(\Gamma)$. Ainsi, les composantes connexes de la frontière de $S(\Gamma)$ sont décomposés en deux classes : orientée positivement et négativement ; positivement lorsque cette orientation est dans le sens horaire en relation à la surface et négativement quand elle n'est pas. (Une autre façon de voir cela consiste à vérifier si la surface est à gauche ou à droite du vecteur tangent dans la direction de l'orientation.)

En nommant notre surface à petits carreaux X , on a que $X \setminus S(\Gamma)$ est alors une union de cylindres, dont chacune des deux bases est identifiée à des composants connexes de la frontière de $S(\Gamma)$, l'une orientée positivement et l'autre négativement. On dit que la base qui est identifiée à la composante connectée orientée positivement est celle du haut et l'autre est celle du bas.

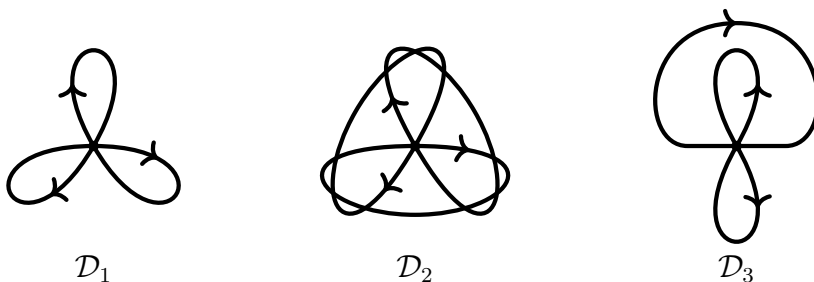
On obtient ainsi un *diagramme séparatrice*.

Définition 3.1 — Diagramme séparatrice. Un *diagramme séparatrice* est un graphe orienté fini Γ avec un ordre cyclique des arêtes à chaque sommet et une décomposition de l'ensemble des composantes connexes de la frontière de $S(\Gamma)$ en paires tels que :

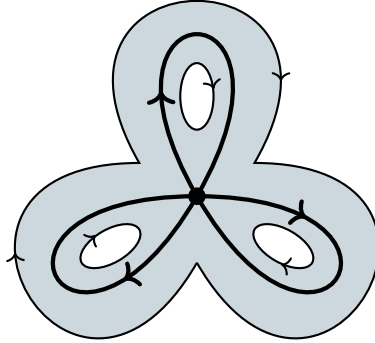
1. L'orientation des arêtes est alternée par rapport à l'ordre cyclique ;
2. Dans chaque paire il y a exactement une composante connexe positivement orientée et une négativement orientée.

A partir du processus décrit ci-dessus, on peut associer un diagramme séparatrice à chaque surface à petits carreaux. Inversement, à partir de chaque diagramme séparatrice, on obtient une surface orientable fermée en collant les cylindres topologiques entre les paires de composantes connexes.

Combinatoirement, il existe trois diagrammes séparatrice possibles avec un sommet et trois boucles.



Cependant, le premier diagramme n'est pas réalisable par une surface à petits carreaux parce que sa frontière a 1 composante connexe positivement orientée et 3 composantes négativement orientées.



On attribue à chaque boucle un nombre réel représentant sa longueur. Aussi, les composante connexes de la frontière sont également dotées d'une longueur obtenue en faisant la somme des longueurs de toutes les boucles appartenant à cette composante. Dans le cas d'un diagramme séparatrice d'une surface à petits carreaux, les longueurs des boucles sont héritées de leurs longueurs dans le plan complexe. En particulier, ce sont toujours des entiers.

Considérons les surfaces à petits carreaux qui ont pour diagramme séparatrice \mathcal{D}_2 . Ce diagramme définit une surface avec une frontière à deux composantes connexes et est réalisable pour toutes les valeurs positives des paramètres de longueur. Les deux composantes connexes de la frontière forment un cylindre dont le périmètre de la base est $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$, où ℓ_1 , ℓ_2 et ℓ_3 sont les longueurs des boucles de \mathcal{D}_2 . On dénote par h la hauteur de ce cylindre.

Comme dans le cas des tores, en fixant $h, \ell_1, \ell_2, \ell_3$, on peut faire un twist de Dehn et obtenir $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ surfaces non-isomorphes. Ainsi, le nombre de surfaces de ce type en utilisant au plus r carrés est asymptotiquement égal à

$$\frac{1}{3} \sum_{\substack{\ell_1, \ell_2, \ell_3, h \in \mathbb{N} \\ (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)h \leq r}} (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3),$$

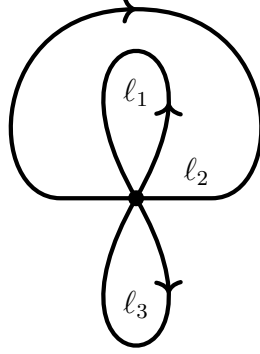
où on a un facteur de $1/3$ pour compenser le fait qu'une permutation cyclique de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 génère la même surface.

Le nombre de façons d'écrire un entier $v = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ sous la forme d'une somme de 3 entiers est asymptotiquement égal à $v^2/2$.¹³ D'où,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{\substack{\ell_1, \ell_2, \ell_3, h \in \mathbb{N} \\ (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)h \leq r}} (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) &\sim \frac{1}{3} \sum_{\substack{v, h \in \mathbb{N} \\ vh \leq r}} v = \sum_{\substack{v, h \in \mathbb{N} \\ v \leq r/h}} v \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{1}{6} \sum_{h=1}^{r/h} \sum_{v=1}^{r/h} v^3 \\ &\sim \frac{1}{6} \sum_{h=1}^r \frac{1}{4} \cdot \frac{r^4}{h^4} = \frac{r^4}{24} \sum_{h=1}^r \frac{1}{h^4} = \frac{r^4}{24} \cdot \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned}$$

¹³. Parce que le choix de $\ell_1 \in \{1, \dots, v-2\}$ et de $\ell_2 \in \{1, \dots, v-\ell_1-1\}$ déterminent $\ell_3 = v - \ell_1 - \ell_2$.

Considérons maintenant les surfaces à petits carreaux qui ont pour diagramme séparatrice \mathcal{D}_3 . Ce diagramme définit une surface avec une frontière à deux composantes connexes positivement orientées et deux composantes connexes négativement orientées. On dénote par ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 les longueurs des boucles de \mathcal{D}_3 .



Pour que ce diagramme vienne d'une surface à petits carreaux, il est nécessaire que les périmètres des deux bases des cylindres soient égaux. Cela implique que $\ell_1 = \ell_3$. Dans ce cas, le périmètre de la base de l'un des cylindres est ℓ_1 et celui de l'autre est $\ell_1 + \ell_2$. Soit h_1 et h_2 les hauteurs de ces cylindres. Ainsi, comme on peut faire des twists de Dehn sur les deux cylindres, le nombre de surfaces de ce type en utilisant au plus r carrés est asymptotiquement égal à

$$\sum_{\substack{\ell_1, \ell_2, h_1, h_2 \in \mathbb{N} \\ \ell_1 h_1 + (\ell_1 + \ell_2) h_2 \leq r}} \ell_1 (\ell_1 + \ell_2) = \sum_{\substack{\ell_1, \ell_2, h_1, h_2 \in \mathbb{N} \\ \ell_1 (h_1 + h_2) + \ell_2 h_2 \leq r}} \ell_1^2 + \ell_1 \ell_2.$$

On va approximer les sommes relatives à ℓ_1 et ℓ_2 par des intégrales. Soit $x_1 := \ell_1 \cdot \frac{h_1 + h_2}{r}$ et $x_2 := \ell_2 \cdot \frac{h_2}{r}$. On intègre sur le simplexe

$$\Delta := \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0\}.$$

Notre somme devient alors

$$\begin{aligned} & \sum_{h_1=1}^r \sum_{h_2=1}^r \int_{\Delta} \left[\left(\frac{x_1 r}{h_1 + h_2} \right)^2 + \left(\frac{x_1 r}{h_1 + h_2} \right) \left(\frac{x_2 r}{h_2} \right) \right] \left(\frac{r}{h_1 + h_2} dx_1 \right) \left(\frac{r}{h_2} dx_2 \right) \\ &= r^4 \left[\underbrace{\int_{\Delta} x_1^2 dx_1 dx_2}_{1/12} \cdot \sum_{h_1=1}^r \sum_{h_2=1}^r \frac{1}{h_2 (h_1 + h_2)^3} + \underbrace{\int_{\Delta} x_1 x_2 dx_1 dx_2}_{1/24} \cdot \sum_{h_1=1}^r \sum_{h_2=1}^r \frac{1}{h_2^2 (h_1 + h_2)^2} \right]. \end{aligned}$$

Les séries de la forme

$$\zeta(s, t) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s (n+m)^t}$$

sont connues dans la littérature sous le nom de *fonctions multi-zêta* et leurs propriétés sont toujours à l'étude. Heureusement, les valeurs $\zeta(1, 3) = \pi^4/360$ et $\zeta(2, 2) = \pi^4/120$ sont bien connues.

En ajoutant la contribution des deux diagrammes et en appliquant le théorème 3.1, on obtient finalement :

Théorème 3.3 Le volume de Teichmüller de $\mathcal{H}(2)$ est

$$\mu_1(\mathcal{H}_1(2)) = \frac{\pi^4}{120}.$$

3.4 AUTRES RÉSULTATS

Des calculs similaires à ceux que l'on vient de faire permettent également de calculer d'autres volumes de Teichmüller $\mu_1(\mathcal{H}_1(\kappa))$ pour κ petit. En particulier, il est possible de montrer que

$$\mu_1(\mathcal{H}_1(1, 1)) = \frac{1}{270}\pi^4 \quad \text{et} \quad \mu_1(\mathcal{H}_1(3, 1)) = \frac{16}{42525}\pi^6.$$

L'ensemble des résultats obtenus jusqu'à présent nous conduit à conjecturer le résultat suivant.

Conjecture Les volumes de Teichmüller sont toujours des multiples rationnels de π^{2g} . En d'autres termes,

$$\mu_1(\mathcal{H}_1(\kappa_1, \dots, \kappa_n))\pi^{-2g} \in \mathbb{Q},$$

où $\kappa_1 + \dots + \kappa_n = 2g - 2$.

La suite de notre étude sera consacrée à la démonstration de ce résultat. On étudiera la théorie des représentations d'un groupe fini (en particulier le cas du groupe symétrique), qui aboutira à une nouvelle approche des volumes de Teichmüller, permettant de démontrer cette conjecture.

4

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

4.1 DÉFINITIONS DE BASE ET EXEMPLES

Soit E un espace vectoriel à dimension finie sur un corps k . On va maintenant nous consacrer à l'étude des actions d'un groupe fini G sur E . On note que le contexte ici est quelque peu différent de ce qui a été étudié dans la section sur les actions de groupe : auparavant, la catégorie étudiée était **Set**, maintenant ce sera k -**Vect**. Dans ce cadre, il est usuel de noter $\text{Aut}_{k\text{-Vect}}(E)$ par $\text{GL}(E)$.

Définition 4.1 Une représentation d'un groupe fini G sur un espace vectoriel E est une action

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(E).$$

On appelle $\dim E$ le *degré* de la représentation. Comme avant, on va dénoter $\rho(g)(v)$ par $g \cdot v$, où $g \in G$ et $v \in E$.

- *Il est habituel dans la littérature de noter une représentation uniquement par l'espace vectoriel E . C'est un fort abus de notation, mais il est déjà tellement consacré qu'il est nécessaire de le connaître.*

Tout ce qui a été étudié dans la section A.7 était dans le cadre $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$. La première chose à faire est donc de nous demander comment tout change lorsque nous changeons de catégorie. En fait, la seule chose qui change est la définition A.21, qui doit maintenant coder l'information qu'un isomorphisme dans k -**Vect** a plus de structure qu'un isomorphisme dans **Set**.

Définition 4.2 Étant donné un groupe G , deux représentations $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ et $\rho' : G \rightarrow \text{GL}(E')$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $f : E \rightarrow E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \rho'(g) \\ E & \xrightarrow{f} & E \end{array}$$

commute pour tout $g \in G$. C'est-à-dire, telle que $f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$ pour tout $g \in G$. On appellera les applications linéaires f (pas nécessairement bijectives) qui satisfont cette propriété *équivariantes*.

Notez que bien que le théorème A.15 n'ait aucun sens dans k -**Vect**, la formule des classes

(corollaire A.16) est toujours valide car chaque action de $k\text{-Vect}$ est une action de **Set**.

Exemple 4.1 — Représentation triviale. Si $\dim E = 1$, on peut identifier $\text{GL}(E)$ avec k^\times , le groupe multiplicatif des unités de k . Puisque chaque élément de G a ordre fini, les valeurs de $\rho(g)$, vues comme des éléments de k^\times , sont des racines de l'unité. Si l'on fait

$$\rho(g) = 1$$

pour tout $g \in G$, on obtient une représentation de G appelée *représentation triviale*.

Exemple 4.2 — Représentation régulière. Étant donné un groupe $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ et un corps k , on définit l'espace vectoriel $k[G]$ de dimension $n = |G|$ dont une base $\{e_{g_1}, e_{g_2}, \dots, e_{g_n}\}$ est indexé par les éléments de G . Alors, G agit sur $k[G]$ en faisant

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow \text{GL}(k[G]) \\ g_1 &\mapsto \rho(g_1), \end{aligned}$$

où $\rho(g_1)$ est l'endomorphisme défini sur les éléments de la base par $e_{g_2} \mapsto e_{g_1 g_2}$. Puisque G est fini, $\rho(g_1)$ est toujours un automorphisme de $k[G]$. En effet, la structure de groupe nous permet de définir une structure d'algèbre dans $k[G]$, donnée par $e_{g_1} e_{g_2} \mapsto e_{g_1 g_2}$. On dira qu'il s'agit de l'*algèbre de groupe* de G .

Exemple 4.3 — Représentation de permutation. Étant donné un corps k , un ensemble fini $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et une action $\sigma : G \times A \rightarrow A$, on définit l'espace vectoriel $k[A]$ de dimension $n = |A|$ dont une base $\{e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_n}\}$ est indexé par les éléments de A . Alors, G agit sur $k[A]$ en faisant

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow \text{GL}(k[A]) \\ g &\mapsto \rho(g). \end{aligned}$$

où $\rho(g)$ est l'endomorphisme défini sur les éléments de la base par $e_a \mapsto e_{\sigma(g,a)}$. Bien entendu, il s'agit d'une généralisation de la représentation régulière. Avec la base donnée, la matrice représentant $\rho(g)$

$$[\rho(g)]_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = g \cdot y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, il y a exactement un 1 dans chaque ligne et colonne, et 0 partout ailleurs.

Un corollaire direct des considérations que l'on a fait dans l'exemple 4.3 est le suivant.

Proposition 4.1 Soit $k[A]$ la représentation de permutation associée à un ensemble fini A et à une action $\sigma : G \times A \rightarrow A$. Alors,

$$\text{tr } \rho(g) = |A^g| = |\{a \in A \mid g \cdot a = a\}|.$$

Démonstration. Considérons la matrice de $\rho(g)$ sur la base habituelle. Sa trace est égal au nombre d'éléments non nuls de la diagonale principale, qui est le nombre d'éléments fixés par l'action de g . \square

4.2 SOUS-REPRÉSENTATIONS

Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ une représentation and soit F un sous-espace de E . Si $g \cdot v \in F$ pour tout $v \in F$ et $g \in G$, on dit que F est *stable* sous l'action de G .

Définition 4.3 — Sous-représentation. Une sous-représentation de $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ est la représentation obtenue par restriction des $\rho(g)$ à un sous-espace vectoriel F de E stable sous l'action de G . On dénote cette représentation par $\rho_F : G \rightarrow \text{GL}(F)$.

Exemple 4.4 On considère la représentation régulière d'un groupe G . Soit F le sous-espace de $k[G]$ engendré par l'élément

$$w := \sum_{g \in G} e_g.$$

Comme $g \cdot w = w$, la restriction de la représentation régulière à F est une sous-représentation de $k[G]$ isomorphe à la représentation triviale.

Définition 4.4 — Somme directe. Étant donné une famille finie $\{\rho_\lambda : G \rightarrow \text{GL}(E_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ de représentations d'un groupe G , on définit leur somme directe par

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda : G &\rightarrow \text{GL}(E) \\ g &\mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(g), \end{aligned}$$

où $E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$. Clairement, chacun des ρ_λ est une sous-représentation de $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda$.

Théorème 4.2 — Maschke. Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ une représentation et soit F un sous-espace vectoriel de E qui est stable sous l'action de G . On suppose que $|G|$ est inversible en k . Alors, il existe un supplémentaire F^\perp de F dans E qui est stable sous l'action de G .

L'étude des représentations sur un corps fini dont la caractéristique divise $|G|$ (théorie des représentations modulaires) est beaucoup plus difficile précisément à cause de l'absence de ce théorème. Donnons deux preuves : la première, plus élégante, justifie notre notation et la deuxième est plus générale.

Démonstration du cas $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire quelconque sur E . On définit un nouveau produit scalaire

$$\langle x, y \rangle_G := \sum_{g \in G} \langle g \cdot x, g \cdot y \rangle,$$

qui satisfait $\langle g \cdot x, g \cdot y \rangle_G = \langle x, y \rangle_G$ pour tout $x, y \in E$ et $g \in G$. Alors, le complément orthogonal de F par ce produit scalaire

$$F^\perp = \{v \in E \mid \langle v, x \rangle_G = 0 \text{ pour tout } x \in F\}$$

est un supplémentaire de F qui est stable sous l'action de G . □

Démonstration du cas général. Soit $p : E \rightarrow E$ la projection de E sur F . On définit un endomorphisme $\tilde{p} : E \rightarrow E$ par

$$\tilde{p} = \frac{1}{|G|} \sum_g \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1}.$$

Comme $\text{im } p = F$ et F est stable sous l'action de G , on conclut que $\text{im } \tilde{p} \subset F$. Si $w \in F$, on a que

$$\tilde{p}(w) = \frac{1}{|G|} \sum_g \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1}(w) = \frac{1}{|G|} \sum_g \rho(g) \circ \rho(g)^{-1}(w) = \frac{1}{|G|} \sum_g w = w,$$

d'où il suit que $\text{im } \tilde{p} = F$. Puisque $\tilde{p} \circ \tilde{p} = \tilde{p}$, on a que (c'est un exercice classique d'algèbre linéaire)

$$E = \ker \tilde{p} \oplus \text{im } \tilde{p} = \ker \tilde{p} \oplus F.$$

Enfin, pour montrer que $\ker \tilde{p}$ est stable sous l'action de G , il suffit de montrer que $\tilde{p}(g \cdot v) = 0$ pour tout $v \in \ker \tilde{p}$ et tout $g \in G$. Alors,

$$\tilde{p}(g \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_h \rho(h) \circ p \circ \rho(h)^{-1} \circ \rho(g)(v) = \frac{1}{|G|} \rho(g) \circ \sum_h \rho(g^{-1}h) \circ p \circ \rho(g^{-1}h)^{-1}(v),$$

qui est égale à $\rho(g) \circ \tilde{p}(v)$. Le théorème suit avec $F := \ker \tilde{p}$. \square

- Si $|G|$ n'est pas inversible en k , on considère la représentation régulière $k[G]$ et le sous-espace $F := \{\sum_g c_g e_g \in k[G] \mid \sum_g c_g = 0\}$. Le sous-espace F est stable sous l'action de G mais n'a pas de supplémentaire stable.

Exemple 4.5 En revenant au contexte de l'exemple 4.4 et de la note ci-dessus, si $|G|$ est inversible dans k , la représentation $k[G]$ peut être décomposée en

$$k[G] = F \oplus F = \text{Vect} \left(\sum_g e_g \right) \oplus \left\{ \sum_g c_g e_g \in k[G] \mid \sum_g c_g = 0 \right\}.$$

Cela implique, dans le langage de la section suivante, que la représentation régulière n'est jamais irréductible.

Exemple 4.6 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ une représentation. On considère le sous-espace E^G défini par

$$E^G := \{v \in E \mid g \cdot v = v \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Clairement, E^G est un sous-espace stable de E . C'est un exemple important d'un sous-espace stable canoniquement associé à chaque représentation. On va voir bientôt que, si $|G|$ est inversible en k ,

$$\dim E^G = \frac{1}{|G|} \sum_g \text{tr } \rho(g)$$

ce qui va nous aider à compter les représentations irréductibles.

4.3 REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES

Définition 4.5 — Représentations irréductibles. Une représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ d'un groupe G est *irréductible* si $E \neq \{0\}$ et si les uniques sous-espaces de E stables sous l'action de G sont $\{0\}$ et E lui-même.

Théorème 4.3 Soit G un groupe tel que $|G|$ soit inversible en k . Alors, toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

Démonstration. Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ une représentation linéaire de G . Si cette représentation est irréductible, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on raisonne par récurrence en utilisant le théorème de Maschke (théorème 4.2). Si $\dim E = 0$, le théorème est évident. On suppose donc $\dim E \geq 1$. Le théorème de Maschke implique que $E = E_1 \oplus E_2$, où E_1, E_2 sont stables sous l'action de G , $\dim E_1 < \dim E$ et $\dim E_2 < \dim E$. Par récurrence le résultat suit. \square

La propriété décrite par le théorème 4.3 est généralement appelée « semi-simplicité ». D'une certaine manière, elle est analogue à la propriété de nombres entiers d'être des produits de nombres premiers.

Le prochain théorème est une classification des applications linéaires équivariantes entre deux représentations irréductibles sur $k = \mathbb{C}$.

Théorème 4.4 — Lemme de Schur. Soient $\rho : E \rightarrow \text{GL}(E)$ et $\rho' : E \rightarrow \text{GL}(E)$ deux représentations irréductibles sur $k = \mathbb{C}$ et f une application linéaire équivariant entre eux. Alors,

1. Soit f est un isomorphisme, soit $f = 0$.
2. Si $E = E$ et $\rho = \rho'$, alors $f = \lambda \text{id}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

- *La première partie du théorème est valable dans n'importe quel corps. La deuxième partie vaut dans n'importe quel corps algébriquement clos.*

On commence par prouver un lemme qui nous sera très utile.

Lemme 4.5 Soient $\rho : E \rightarrow \text{GL}(E)$ et $\rho' : E \rightarrow \text{GL}(E)$ deux représentations et f une application linéaire équivariant entre eux. Alors, $\ker f$ et $\text{im } f$ sont des sous-espaces stables.

Démonstration. Si $v \in \ker f$, alors

$$f(g \cdot v) = g \cdot f(v) = 0,$$

d'où $g \cdot v \in \ker f$. Aussi, si $v = f(w) \in \text{im } f$,

$$g \cdot v = g \cdot f(w) = f(g \cdot w) \in \text{im } f.$$

Le résultat suit. \square

Maintenant, la preuve du théorème 4.4 est simple.

Démonstration du Lemme de Schur.

1. Par l'irréductibilité de E , soit $\ker f = E$ (c'est-à-dire que $f = 0$) ou $\ker f = 0$, auquel cas f est une injection. De même, l'irréductibilité de E implique que $\operatorname{im} f = 0$ (c'est-à-dire que $f = 0$) ou $\operatorname{im} f = E$, auquel cas f est une surjection. Ainsi, si f n'est pas identiquement nulle, il doit s'agir d'un isomorphisme.

2. Soit λ une valeur propre de f . C'est-à-dire que $f - \lambda \operatorname{id}$ a un noyau non-nul. On note aussi que, comme

$$(f - \lambda \operatorname{id})(g \cdot v) = f(g \cdot v) - \lambda(g \cdot v) = g \cdot f(v) - \lambda(g \cdot v) = g \cdot (f(v) - \lambda v),$$

l'application linéaire $f - \lambda \operatorname{id}$ est équivariant. Puisque $f - \lambda \operatorname{id}$ est équivariant mais n'est pas un isomorphisme, la première partie de la démonstration implique le résultat. \square

Corollaire 4.6 Soit $\rho : G \rightarrow \operatorname{GL}(E)$ une représentation irréductible sur \mathbb{C} d'un groupe abélien G . Alors, $\dim E = 1$.

Démonstration. Puisque G est abélien, $\rho(g) \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \rho(g)$. C'est-à-dire que l'endomorphisme $\rho(g)$ est équivariant. D'après le lemme de Schur, $\rho(g) = \lambda_g \operatorname{id}$ pour un certain $\lambda_g \in \mathbb{C}$. D'où on voit que tout sous-espace de E est stable sous l'action de G . L'irréductibilité implique le résultat. \square

4.4 CONSTRUCTION DE NOUVELLES REPRÉSENTATIONS

Soient $\rho : G \rightarrow \operatorname{GL}(E)$ et $\rho' : G \rightarrow \operatorname{GL}(E)$ deux représentations d'un groupe G . On a déjà vu que l'on peut définir une nouvelle représentation $\rho \oplus \rho' : G \rightarrow \operatorname{GL}(E \oplus E)$ en faisant $g \cdot (v + v') := g \cdot v + g \cdot v'$. Néanmoins, il y a plus d'opérations que l'on peut faire avec des espaces vectoriels qu'une somme directe.

Définition 4.6 On définit le produit tensoriel $\rho \otimes \rho' : G \rightarrow \operatorname{GL}(E \otimes E)$ de deux représentations ρ et ρ' en faisant

$$g \cdot (v \otimes v') := g \cdot v \otimes g \cdot v'.$$

Bien entendu, le produit tensoriel d'un nombre fini de représentations est défini exactement de la même manière.

Dans le cadre de la théorie des représentations, il est assez courant de voir $\bigwedge^m E$ et $\operatorname{Sym}^m E$ comme des sous-espaces vectoriels de $E^{\otimes m}$. Pour cela, notons que le groupe symétrique S_m agit sur $E^{\otimes m}$ de manière naturelle :

$$\text{pour } \sigma \in S_m, \quad \sigma \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_m) := v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(m)}.$$

Alors, il suit que

$$\bigwedge^m E \cong \{x \in E^{\otimes m} \mid \text{pour tout } \sigma \in S_m, \sigma \cdot x = \operatorname{sgn}(\sigma)x\}$$

et

$$\text{Sym}^m E \cong \{x \in E^{\otimes m} \mid \text{pour tout } \sigma \in S_m, \sigma \cdot x = x\}.$$

Lemme 4.7 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ une représentation. On considère la représentation produit sur $E^{\otimes m}$. Les sous-espaces $\wedge^m E$ et $\text{Sym}^m E$ sont toujours stables sous l'action de G .

Démonstration. Soit $x \in \wedge^m E$ et $g \in G$. Alors,

$$\sigma \cdot (g \cdot x) = g \cdot (\sigma \cdot x) = g \cdot (\text{sgn}(\sigma)x) = \text{sgn}(\sigma)g \cdot x.$$

C'est-à-dire que $g \cdot x \in \wedge^m E$ et donc $\wedge^m E$ est stable sous l'action de G . Le même raisonnement montre que $\text{Sym}^m E$ est stable sous l'action de G . \square

D'après ce lemme, on peut définir les puissances extérieures et symétriques d'une représentation.

Définition 4.7 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ une représentation d'un groupe G . On définit ses puissances extérieures et symétriques par les sous-représentations de $\rho^{\otimes m} : G \rightarrow \text{GL}(E^{\otimes m})$ induites par les sous-espaces stables $\wedge^m E$ et $\text{Sym}^m E$, respectivement. On dénote ces représentations par $\wedge^m \rho : G \rightarrow \text{GL}(\wedge^m E)$ et $\text{Sym}^m \rho : G \rightarrow \text{GL}(\text{Sym}^m E)$.

Pour la théorie de représentations, est particulièrement important le fait que, si $m = 2$, on peut décomposer $E^{\otimes 2}$ comme

$$E \otimes E = \wedge^2 E \oplus \text{Sym}^2 E.$$

Cela découle de la décomposition

$$\text{id}_{E^{\otimes 2}} = f_1 + f_2,$$

où f_1 et f_2 sont définis sur les vecteurs de la base canonique de $E^{\otimes 2}$ par

$$f_1(e_i \otimes e_j) := \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i), \quad f_2(e_i \otimes e_j) := \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)$$

et étendus par linéarité.

Définition 4.8 Soient $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ et $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ deux représentations d'un groupe G et $f \in \text{Hom}(E, E)$. On définit une représentation $G \rightarrow \text{GL}(\text{Hom}(E, E))$ en faisant

$$(g \cdot f)(v) := g \cdot f(g^{-1} \cdot v)$$

pour tout $v \in E$. En d'autres termes, en faisant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \rho(g) \\ E & \xrightarrow{g \cdot f} & E \end{array}$$

commuter.

La définition de la représentation dual est le cas particulier de la définition ci-dessus lorsque $E = k$ et $\rho : G \rightarrow \text{GL}(k)$ est la représentation triviale.

Définition 4.9 Étant donné une représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ d'un groupe G , on définit sa représentation dual $\rho^\vee : G \rightarrow \text{GL}(E^\vee)$ par

$$(g \cdot f)(v) := f(g^{-1} \cdot v),$$

pour tout $v \in E$

Clairement, cette définition respecte l'isomorphisme canonique entre $\text{Hom}(E, E)$ et $E \otimes E^\vee$. C'est-à-dire que

$$\text{Hom}(E, E) \cong E \otimes E^\vee$$

est non seulement un isomorphisme entre espaces vectoriels, mais aussi un isomorphisme entre représentations.

Proposition 4.8 L'espace des applications linéaires équivariantes entre deux représentations E et E est l'espace

$$\text{Hom}(E, E)^G = \{f \in \text{Hom}(E, E) \mid g \cdot f = f \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Démonstration. C'est juste une autre façon d'écrire les définitions. \square

4.5 THÉORIE DES CARACTÈRES

Comme motivation, commençons par prouver le résultat de l'exemple 4.6.

Proposition 4.9 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ une représentation. On considère le sous-espace E^G défini par

$$E^G := \{v \in E \mid g \cdot v = v \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Alors, si $|G|$ est inversible en k ,

$$\dim E^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \rho(g).$$

Démonstration. On considère l'endomorphisme $p : E \rightarrow E$ défini par

$$p(v) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v.$$

Par construction, $p|_{E^G} = \text{id}_{E^G}$ et $\text{im } p \subset E^G$. On conclut que p est une projection sur E^G . En sachant que la trace d'une projection est égale à la dimension de son image,¹⁴ le résultat suit. \square

14. Par le lemme des noyaux, $E = \ker(p - \text{id}) \oplus \ker p$. Soit e_1, \dots, e_n une base de E telle que e_1, \dots, e_k est une base de $\ker(p - \text{id})$ et e_{k+1}, \dots, e_n est une base de $\ker p$. Alors, $p(e_i) = e_i$ pour $1 \leq i \leq k$ et $p(e_i) = 0$ pour $i > k$. Il suit que $\text{rg } p = k$. De plus, la matrice de p dans cette base a 1 dans les k premiers éléments de la diagonale principale et 0 en dehors, d'où $\text{tr } p = k$.

Pour simplifier les énoncés, dorénavant on va supposer que k est algébriquement clos, ce qui implique $|G|$ inversible en k .

Définition 4.10 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ une représentation d'un groupe G . Le caractère de ρ est la fonction

$$\begin{aligned} \chi_\rho : G &\rightarrow k \\ g &\mapsto \text{tr } \rho(g). \end{aligned}$$

Le caractère d'une représentation irréductible est dénommé un caractère irréductible.

On observe que $\chi_\rho(e_G) = \dim E$ et que $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$ pour tout $g, h \in G$.

Proposition 4.10 Soient $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$, $\rho' : G \rightarrow \text{GL}(E)$ deux représentations d'un groupe G et $g \in G$. Alors,

1. $\chi_{\rho + \rho'}(g) = \chi_\rho(g) + \chi_{\rho'}(g)$,
2. $\chi_{\rho \otimes \rho'}(g) = \chi_\rho(g)\chi_{\rho'}(g)$,
3. $\chi_{\wedge^2 \rho}(g) = \frac{1}{2}(\chi_\rho(g)^2 - \chi_\rho(g^2))$,
4. $\chi_{\text{Sym}^2 \rho}(g) = \frac{1}{2}(\chi_\rho(g)^2 + \chi_\rho(g^2))$,
5. $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(g^{-1})$,
6. $\chi_{\text{Hom}(E, E)}(g) = \chi_\rho(g^{-1})\chi_\rho(g)$.

Démonstration. Soient $\{\lambda_i\}$ et $\{\mu_i\}$ l'ensemble des valeurs propres de $\rho(g)$ et $\rho'(g)$, respectivement. Alors, $\{\lambda_i\} \cup \{\mu_i\}$, $\{\lambda_i \mu_i\}$ et $\{\lambda_i^{-1}\}$ sont les ensembles des valeurs propres de $(\rho \oplus \rho')(g)$, $(\rho \otimes \rho')(g)$ et $\rho'(g)$, respectivement. Les items 1, 2 et 5 suivent. L'item 6 suit de 2 et 5. Pour l'item 3, on voit que l'ensemble des valeurs propres de $\wedge^2 \rho(g)$ est $\{\lambda_i \lambda_j \mid i < j\}$ et

$$\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_i \lambda_i \right)^2 - \sum_i \lambda_i^2 \right].$$

L'item 4 suit de façon similaire. □

Comme toujours, on suppose que $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ et $\rho' : G \rightarrow \text{GL}(E)$ sont deux représentations d'un groupe G . En combinant les deux résultats de cette section, on voit que

$$\dim \text{Hom}(E, E)^G = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_\rho(g^{-1})\chi_{\rho'}(g),$$

ce qui nous motive à la définition suivante.

Définition 4.11 Une fonction $f : G \rightarrow k$ qui est constante dans les classes de conjugaison G , c'est-à-dire que $f(hgh^{-1}) = f(g)$ pour tout $g, h \in G$, est appelée *fonction centrale*. On dénote par $C_k(G)$ le k -espace vectoriel de tous les fonctions centrales et on le dote la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle : C_k(G) \times C_k(G) \rightarrow k$ définie par

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_g f_1(g^{-1})f_2(g).$$

Bien sûr, toute caractère est une fonction centrale.

Proposition 4.11 La dimension de $C_k(G)$ est égale au nombre de classes de conjugaison de G .

Démonstration. Soit C une classe de conjugaison de G et $f \in C_k(G)$ la fonction définie par

$$f_C(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors, l'ensemble

$$\{f_C \in C_k(G) \mid C \text{ est une classe de conjugaison de } G\}$$

est une base de $C_k(G)$. Le résultat suit. \square

L'importance du prochain théorème ne peut être sous-estimée.

Théorème 4.12 Soient $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$, $\rho' : G \rightarrow \text{GL}(E)$ deux représentations irréductibles d'un groupe G . Alors, si ρ et ρ' sont isomorphes, $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle = 1$. Sinon, $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle = 0$. C'est-à-dire que les caractères irréductibles forment un sous-ensemble orthonormal de $C_k(G)$.

Démonstration. Une autre façon d'énoncer le lemme de Schur est la suivante : si ρ et ρ' ne sont pas isomorphes, $\dim \text{Hom}(E, E)^G = 0$. Aussi, $\dim \text{Hom}(E, E)^G = 1$.

Comme on a vu,

$$\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle = \dim \text{Hom}(E, E)^G.$$

Puisque $\text{Hom}(E, E)^G \cong \text{Hom}(E, E)^G$ si $\rho \cong \rho'$, le résultat suit. \square

- Soit $f : E \rightarrow E$ un isomorphisme équivariante. Alors, l'application induite $h \mapsto f \circ h$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\text{Hom}(E, E)^G$ et $\text{Hom}(E, E)^G$.

À partir de ce théorème, on démontre le corollaire qui est la base de toute théorie des caractères.

Corollaire 4.13 Le nombre de représentations irréductibles à isomorphisme près est toujours fini.

Démonstration. Ce nombre est inférieur ou égal à $\dim C_k(G) < \infty$. \square

Corollaire 4.14 Une représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ est irréductible si et seulement si $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$.

Démonstration. Soit $E = E_1^{a_1} \oplus \dots \oplus E_m^{a_m}$ la décomposition de E en somme directe de représentations irréductibles donnée par le théorème de Maschke (théorème 4.3). Par la bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et par le théorème 4.12,

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m a_i \chi_{\rho_i}, \sum_{i=1}^m a_i \chi_{\rho_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^m a_i^2,$$

qui vaut 1 si et seulement s'il n'y a qu'un a_i non-nul. \square

Dorénavant, si $E = E_1^{a_1} \oplus \dots \oplus E_m^{a_m}$, on dénote $\rho_{E_i} : G \rightarrow \text{GL}(E_i)$ par ρ_i .

Corollaire 4.15 Soit $E_1^{a_1} \oplus \dots \oplus E_m^{a_m}$ la décomposition de E en somme directe de représentations irréductibles. Alors, $a_i = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

Démonstration. On calcule $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle$:

$$\langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m a_j \chi_{\rho_j}, \chi_{\rho_i} \right\rangle = \sum_{j=1}^m a_j \langle \chi_{\rho_j}, \chi_{\rho_i} \rangle = a_i. \quad \square$$

On prouve qu'une représentation est déterminée, à isomorphisme près, par sa caractère.

Corollaire 4.16 Deux représentations $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ et $\rho' : G \rightarrow \text{GL}(E)$ telles que $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit $E = E_1^{a_1} \oplus \dots \oplus E_m^{a_m}$ la décomposition de E en somme directe de représentations irréductibles donnée par le théorème de Maschke (théorème 4.3). Puisque $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$,

$$a_i = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle = \langle \chi_{\rho'}, \chi_{\rho_i} \rangle \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, m\}.$$

On en déduit que a_i est le nombre de facteurs de E qui sont isomorphes à E_i . C'est-à-dire que $E \cong E_1^{a_1} \oplus \dots \oplus E_m^{a_m} = E$. \square

Pour obtenir d'autres corollaires importants, considérons dorénavant la représentation régulière $k[G]$. D'abord, on calcule la caractère de $k[G]$. Puisque $\dim k[G] = |G|$, $\chi_{k[G]}(e_G) = |G|$. Par définition, $\rho_{k[G]}(g)$ est toujours une matrice de permutation. Donc, si $g \in G$ est tel que $\rho_{k[G]}(g)$ a un 1 dans la i -ème position de sa diagonale principale, on a $\rho_{k[G]}(g)e_{g_i} = e_{g_i}$. Ceci implique $gg_i = g_i$ et alors $g = e_G$. On conclut que

$$\chi_{k[G]}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e_G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $k[G] = E_1^{a_1} \oplus \dots \oplus E_m^{a_m}$ la décomposition de la représentation régulière en somme directe de représentations irréductibles. Par le corollaire 4.15,

$$a_i = \langle \chi_{k[G]}, \chi_{E_i} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_{k[G]}(g^{-1}) \chi_{E_i}(g) = \frac{1}{|G|} |G| \chi_{E_i}(e_G) = \dim E_i,$$

pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Ce résultat nous donne encore trois corollaires importants.

Corollaire 4.17 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ une représentation irréductible de G . Si $\dim E = n$, alors

$$k[G] \cong E^n \oplus E_1^{a_1} \oplus \dots \oplus E_m^{a_m}.$$

C'est-à-dire que E apparaît $\dim E$ fois dans la décomposition de $k[G]$ en somme directe de représentations irréductibles.

Démonstration. En vue du théorème 4.12, on calcule $\langle \chi_\rho, \chi_{k[G]} \rangle$:

$$\langle \chi_\rho, \chi_{k[G]} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_\rho(g^{-1}) \chi_{k[G]}(g) = \chi_\rho(e_G) = \dim E.$$

Il suit que E apparaît $\dim E$ fois dans la décomposition de $k[G]$. \square

À partir de maintenant, si l'on veut trouver les représentations irréductibles d'un groupe G , le meilleur moyen est de calculer la décomposition de $k[G]$ en somme directe de représentations irréductibles. Les deux corollaires suivants nous aideront à trouver la décomposition de $k[G]$.

Corollaire 4.18 Soient E_1, \dots, E_m les représentations irréductibles d'un groupe G . Alors,

$$|G| = \sum_{i=1}^m (\dim E_i)^2.$$

Démonstration. On a $|G| = \chi_{k[G]}(e_G) = \sum_{i=1}^m \dim E_i \chi_{E_i}(e_G) = \sum_{i=1}^m (\dim E_i)^2$. \square

Corollaire 4.19 Soient E_1, \dots, E_m les représentations irréductibles d'un groupe G . Alors, pour tout élément $g \neq e_G$ de G ,

$$\sum_{i=1}^m \dim E_i \chi_{E_i}(g) = 0.$$

Démonstration. Si $g \neq e_G$, $0 = \chi_{k[G]}(g) = \sum_{i=1}^m \dim E_i \chi_{E_i}(g)$. \square

Pour terminer la théorie des caractères, il suffit de prouver la continuité du théorème 4.12 : les caractères irréductibles ne forment pas seulement un sous-ensemble orthonormal de $C_k(G)$; ils forment une base.

Théorème 4.20 Les caractères irréductibles $\chi_{\rho_1}, \dots, \chi_{\rho_m}$ d'un groupe G forment une base de $C_k(G)$. C'est-à-dire que le nombre de représentations irréductibles (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison de G .

D'abord on observe que si $f \in C_k(G)$ et $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ est une représentation irréductible de G alors

$$\tilde{\rho} := \sum_g f(g) \rho(g) \in \text{GL}(E)$$

est équivariante. Le lemme de Schur (théorème 4.4) implique que $\tilde{\rho} = \lambda \text{id}$. En prenant la trace, on voit que

$$\lambda \dim E = \sum_g f(g) \chi_\rho(g) = |G| \langle f, \chi_\rho \rangle.$$

Démonstration. Puisque les caractères irréductibles sont orthonormaux, il suffit de montrer qu'ils engendrent $C_k(G)$. Pour cela, on montre que si $\langle f, \chi_{\rho_i} \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, alors $f = 0$.¹⁵

¹⁵ Soit U le sous-espace de $C_k(G)$ engendré par les caractères irréductibles. Cette raisonnement montre que $U^\perp = \{0\}$ et donc $C_k(G) = U \oplus U^\perp = U$.

EXEMPLES

Si ρ_i est une représentation irréductible de G , ρ_i l'est aussi.¹⁶ Donc $\langle f, \chi_{\rho_i} \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. On en déduit que

$$\tilde{\rho}_i = \left(\frac{|G|}{\dim E_i} \langle f, \chi_{\rho_i} \rangle \right) \text{id} = 0.$$

Puisque toute représentation est somme directe de représentations irréductibles, on conclut que $\tilde{\rho} = 0$ pour toute représentation ρ de G . En particulier, pour la représentation régulière on calcule $\tilde{\rho}(e_G)$ pour obtenir

$$\sum_{g \in G} f(g)e_g = 0.$$

Comme les e_g sont linéairement indépendantes, on conclut que $f(g) = 0$ pour tout $g \in G$. \square

4.6 EXEMPLES

La théorie élaborée jusqu'à présent suffit à calculer les représentations irréductibles de plusieurs groupes importants. Dans cette section, on présente quelques exemples de représentations complexes.

Exemple 4.7 — Les représentations irréductibles des groupes abéliens. Le corollaire 4.6 est presque tout ce dont on a besoin pour calculer les représentations des groupes abéliens finis : il dit que tous ces représentations sont de la forme $\rho : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Comme tout groupe abélien fini est une somme directe de groupes cycliques, on calcule d'abord les représentations de Z/nZ .

Chaque élément $g \in Z/nZ$ a un ordre fini. Cela implique que $\rho(g)$ est toujours une racine n -ième de l'unité. Définissons $\rho_n^k([m]) := e^{2\pi i k m/n}$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Puisque $\chi_n^k = \rho_n^k$, on vérifie que

$$\langle \chi_n^k, \chi_n^j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{[m] \in Z/nZ} \overline{\chi_n^k([m])} \chi_n^j([m]) = \frac{1}{n} \sum_{[m] \in Z/nZ} e^{-2\pi i k m/n} e^{2\pi i j m/n} = \delta_{kj}.$$

C'est-à-dire que les $\rho_n^0, \dots, \rho_n^{n-1}$ sont les représentations irréductibles de Z/nZ .

Soit alors G un groupe abélien fini. Par le théorème de structure, on peut écrire

$$G \cong \frac{Z}{n_1 Z} \oplus \dots \oplus \frac{Z}{n_r Z},$$

où les entiers n_i sont des puissances de nombres premiers (pas nécessairement distincts). On affirme que les représentations irréductibles de G sont $\rho_{n_1}^{k_1} \dots \rho_{n_r}^{k_r}$ pour $k_i \in \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$. Pour faciliter la notation, on prouve le cas $r = 2$.

¹⁶ En effet, il suffit de montrer que si ρ est irréductible, alors ρ l'est, et le résultat suivra du fait que $(E \cap F) \cong E$ car E a dimension finie. Soit $F \subset E$ un sous-espace stable par ρ . Alors, $F = \{\phi \in E, \phi(x) = 0 \forall x \in F\}$ est un sous-espace de E stable par ρ , et donc soit $F = E$, ce qui nous entraîne à dire que $F = 0$, soit $F = 0$ et donc $F = E$.

Soit $\alpha_{ij} : Z/n_1Z \oplus Z/n_2Z \rightarrow \mathbb{C}^\times$ donnée par $\alpha_{ij}(g_1 + g_2) = \rho_{n_1}^i(g_1)\rho_{n_2}^j(g_2)$. Bien sûr, les α_{ij} sont des homomorphismes. On vérifie que $\alpha_{ij} = \alpha_{kl}$ implique $i = k$ et $j = l$. En effet,

$$\rho_{n_1}^i(g) = \alpha_{ij}(g + 1) = \alpha_{kl}(g + 1) = \rho_{n_1}^k(g),$$

ce qui implique $i = k$. De même, $k = l$. Puisque $Z/n_1Z \oplus Z/n_2Z$ a $|Z/n_1Z \oplus Z/n_2Z| = n_1n_2$ représentations irréductibles, il en découle que les α_{ij} le sont tous.

En utilisant ce résultat, on peut facilement mettre les valeurs des caractères irréductibles du groupe de Klein ($Z/2Z \times Z/2Z$), par exemple, dans un tableau :

	$([0], [0])$	$([0], [1])$	$([1], [0])$	$([1], [1])$
α_{11}	1	1	1	1
α_{12}	1	-1	1	-1
α_{21}	1	1	-1	-1
α_{22}	1	-1	-1	1

On appelle un tableau comme celle-ci de *table de caractères*. Ce tableau contient toutes les informations sur les représentations irréductibles d'un groupe.

Les groupes symétriques feront l'objet de toute une section. Cependant, le calcul des représentations irréductibles de S_n pour n petit est une belle application de la théorie que l'on a vue jusqu'à présent.

Exemple 4.8 — Les représentations irréductibles de S_3 . Le groupe S_3 a 3 classes de conjugaison : id, (12) et (123). C'est-à-dire qu'il faut trouver 3 représentations irréductibles. La représentation triviale

$$\rho_1 : S_3 \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \sigma \mapsto 1$$

est toujours irréductible. Comme décrit dans l'exemple 4.5, la représentation de permutation $\mathbb{C}\{1, 2, 3\}$ (isomorphe à \mathbb{C}^3) n'est pas irréductible. On peut écrire

$$\mathbb{C}^3 = F \oplus F' = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3) \oplus \left\{ c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \in \mathbb{C}^3 \mid c_1 + c_2 + c_3 = 0 \right\},$$

où le premier terme est isomorphe à la représentation triviale et le second est une représentation irréductible. Soit $\rho_2 : S_3 \rightarrow F'$ cette seconde représentation. Pour calculer le caractère de ρ_2 , on pourrait choisir une base pour F' et écrire les matrices de ρ_2 sur cette base. Cependant, une méthode plus simple consiste à utiliser la proposition 4.10 pour calculer ce caractère en fonction du caractère de la représentations triviale, déjà connu, et utiliser la proposition 4.1 pour calculer le caractère de la représentation de permutation :

$$\chi_2(g) = \chi_{\mathbb{C}[S_3]}(g) - \chi_1(g).$$

Selon le corollaire 4.18, il reste encore une représentation irréductible de degré 1. Il est facile de montrer qu'il n'y a que deux homomorphismes $S_3 \rightarrow \mathbb{C}^\times$: l'homomorphisme constant ρ_1 et la signature. On obtient ainsi notre troisième représentation irréductible $\rho_3 = \text{sgn}$.

La table de caractères est la suivante :

EXEMPLES

	id	(1 2)	(1 2 3)
χ_1	1	1	1
χ_2	2	0	-1
χ_3	1	-1	1

L'orthonormalité de ces caractères confirme notre affirmation selon laquelle ils sont irréductibles. On appelle ρ_2 la représentation *standard*.

Exemple 4.9 — Les représentations irréductibles de S_4 . Le groupe S_4 a 5 classes de conjugaison : id, (1 2), (1 2 3), (1 2 3 4) et (1 2)(3 4). Les représentations que l'on vient de calculer pour S_3 sont naturellement des représentations de S_4 . Cela nous donne déjà un morceau de la table des caractères.

	id	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_1 (triviale)	1	1	1	1	1
χ_2 (standard)	3	1	0	-1	-1
χ_3 (signature)	1	-1	1	-1	1

Soit d_4 et d_5 les degrés des représentations restantes. Par le corollaire 4.18, $d_4^2 + d_5^2 = 13$, d'où $d_4 = 3$ et $d_5 = 2$. Obtenir une représentation de degré 3 est facile : puisque ρ_2 est de degré $4 - 1 = 3$, $\rho_2 \otimes \rho_1$ et $\rho_2 \otimes \rho_3$ sont de degré 3. La première option ne fonctionne pas car le caractère $\chi_{\rho_2 \otimes \rho_1} = \chi_2 \chi_1$ est égal à χ_2 . Néanmoins, $\chi_4 := \chi_{\rho_2 \otimes \rho_3} = \chi_2 \chi_3$ est bien un caractère irréductible. Le corollaire 4.19 nous donne le caractère χ_5 restant.

	id	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_1 (triviale)	1	1	1	1	1
χ_2 (standard)	3	1	0	-1	-1
χ_3 (signature)	1	-1	1	-1	1
$\chi_4 = \chi_2 \chi_3$	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

Cet exemple illustre le pouvoir de la théorie des caractères. Même sans rien connaître sur la cinquième représentation, on a pu en calculer son caractère.

Exemple 4.10 — Les représentations irréductibles du groupe alterné A_4 . Le groupe A_4 (le sous-groupe de S_4 est constitué de permutations paires) a 4 classes de conjugaison : id, (1 2 3), (1 3 2) et (1 2)(3 4). Certes, la représentation triviale est toujours irréductible. Pour obtenir deux autres représentations, on va utiliser une astuce. On s'aperçoit que le sous-groupe

$$K = \{\text{id}, (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)\}$$

est normal dans A_4 . De plus, $A_4/K \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Alors, si $\pi : A_4 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est la projection canonique et $\tilde{\rho}$ est une représentation non-triviale de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a que $\rho : A_4 \rightarrow \mathbb{C}^\times$, défini par

la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A_4 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\
 & \searrow \rho & \downarrow \tilde{\rho} \\
 & & \mathbb{C}^\times
 \end{array}$$

est une représentation irréductible de A_4 . (La représentation triviale de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ deviendrait la représentation triviale de A_4 .) On obtient ainsi deux nouvelles représentations irréductibles ρ_2, ρ_3 . Pour obtenir le caractère de la dernière représentation ρ_4 , on utilisera à nouveau le corollaire 4.19.

La table de caractères est la suivante, où on a mis $\omega = e^{2\pi i/3}$.

	id	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)(3 4)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2	1
χ_3	1	ω^2	ω	1
χ_4	3	0	0	-1

Comme on verra à nouveau dans l'exemple suivant, l'astuce de « relever » des représentations (plus simples) d'un quotient est très utile.

Exemple 4.11 — Les représentations irréductibles du groupe des quaternions Q . Le groupe des quaternions est donné par $Q = \{\pm\hat{1}, \pm\hat{i}, \pm\hat{j}, \pm\hat{k}\}$ où $-\hat{1}$ commute avec tous les éléments de Q et $\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = \hat{i}\hat{j}\hat{k} = -\hat{1}$. Ce groupe est un exemple de groupe hamiltonien non-abélien. Autrement dit, chaque sous-groupe de Q est distingué même si Q n'est pas abélien. Comme les classes de conjugaison de Q sont $\hat{1}, -\hat{1}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, il faut trouver 5 représentations irréductibles. La même astuce que l'on a fait précédemment nous en donne quatre. On vérifie que

$$\frac{Q}{\{\pm\hat{1}\}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

et donc les 4 représentations irréductibles du groupe de Klein sont aussi représentations irréductibles de Q . On obtient ainsi la table de caractères suivante :

	$\hat{1}$	$-\hat{1}$	\hat{i}	\hat{j}	\hat{k}
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

Comme toujours, la dernière représentation a été trouvée en utilisant le corollaire 4.19.

Ces exemples illustrent une procédure générale : étant donné un groupe fini G , son sous-groupe dérivé $[G, G]$ est toujours distingué et le quotient $G/[G, G]$ (appelé l'abélianisé de G) est toujours abélien. Les représentations de $G/[G, G]$ sont connues et on obtient donc quelques représentations irréductibles de G .

Lors de la visualisation des tables de caractères obtenues dans cette section, on nous pose quelques questions : comment construire les représentations de S_n pour $n > 4$? Comment relier les représentations de S_n à celles de S_m , pour $n \neq m$? Pourquoi, dans la plupart de nos exemples, les caractères ont-ils des valeurs entières?

Le but des sections suivantes est de répondre à ces questions.

4.7 REPRÉSENTATIONS INDUITES

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G . Supposons que l'on ait une représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ de G . Pour obtenir une représentation de H , il suffit de faire la restriction de ρ à H . Cette nouvelle représentation est dénotée $\text{Res}_H^G \rho : H \rightarrow \text{GL}(E)$. La même procédure peut être effectuée avec des fonctions de classe. C'est-à-dire qu'étant donnée une fonction de classe $f : G \rightarrow k$, sa restriction $\text{Res}_H^G f : H \rightarrow k$ est définie par $\text{Res}_H^G f := f|_H$. On observe que ces opérations sont compatibles : $\text{Res}_H^G \chi_\rho = \chi_{\text{Res}_H^G \rho}$.

Notre objectif dans cette section est, étant donné une représentation $\sigma : H \rightarrow \text{GL}(E)$ de H , d'obtenir la représentation « la plus générale possible » de G . La propriété universelle ci-dessous donne un sens précis à cette idée.

Définition 4.12 Soit $\sigma : H \rightarrow \text{GL}(E)$ une représentation de H . On dit que $\text{Ind}_H^G \sigma : G \rightarrow \text{GL}(\widehat{E})$, où \widehat{E} est un espace vectoriel sur le même corps que E , est la *représentation induite* par σ s'il existe $i_H^G \in \text{Hom}(E, \widehat{E})^H$ telle que pour tout représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(F)$ de G et pour tout $f \in \text{Hom}(E, F)^H$ il existe une unique application $\widehat{f} \in \text{Hom}(\widehat{E}, F)^G$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{i_H^G} & \widehat{E} \\
 & \searrow f & \downarrow \widehat{f} \\
 & & F
 \end{array}$$

commute.

Comme d'habitude avec les propriétés universelles, si la représentation induite existe, elle est unique à isomorphisme près.

Théorème 4.21 La représentation induite existe.

Démonstration. Pour construire la représentation induite, on a besoin d'un espace vectoriel \widehat{E} , d'une représentation $\text{Ind}_H^G \sigma$ de G , d'une application linéaire H -équivariante i_H^G et d'une application linéaire G -équivariante \widehat{f} .

- L'espace vectoriel \widehat{E} .

Pour chaque classe à gauche $\tau \in G/H$, on choisit un représentant g_τ quelconque de τ et on prend une copie $g_\tau E$ de E . Ensuite, définissons l'espace vectoriel \widehat{E} par

$$\widehat{E} := \bigoplus_{\tau \in G/H} g_\tau E.$$

On dénote par $g_\tau v$, l'élément correspondant à $v \in E$ en $g_\tau E$.

- La représentation $\text{Ind}_H^G \sigma : G \rightarrow \text{GL}(\widehat{E})$.

Pour chaque classe $\tau \in G/H$ soit g_τ un élément quelconque de τ . Puisque G/H est une partition de G , pour tout $g \in G$ et pour tout $\tau \in G/H$, il existent $\tau' \in G/H$ et $h \in H$ tels que

$$g g_\tau = g_{\tau'} h.$$

Enfin, on définit l'action induite par

$$g \cdot (g_\tau v_\tau) := g_\tau \sigma(h) v_\tau.$$

- L'application linéaire H -équivariante $i_H^G : E \rightarrow \widehat{E}$.

Soit e la classe $H \in G/H$. Alors, on définit l'application linéaire i_H^G par $v \mapsto g_e v$. Pour montrer que cette application est H -équivariante il faut prouver que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_H^G} & \widehat{E} \\ \sigma(h) \downarrow & & \downarrow \text{Ind}_H^G \sigma(h) \\ E & \xrightarrow{i_H^G} & \widehat{E} \end{array}$$

commute pour tout $h \in H$. C'est-à-dire que $i_H^G \circ \sigma(h) = \text{Ind}_H^G \sigma(h) \circ i_H^G$. Alors, puisque $g_e = H = e_{G/H}$,

$$\text{Ind}_H^G \sigma(h)(g_e v) = h \cdot (g_e v) = g_e \sigma(h) v.$$

- L'application linéaire G -équivariante $\widehat{f} : \widehat{E} \rightarrow F$.

Dans ce cas, G -équivariance équivaut au diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{E} & \xrightarrow{\widehat{f}} & F \\ \text{Ind}_H^G \sigma(g) \downarrow & & \downarrow \rho(g) \\ \widehat{E} & \xrightarrow{\widehat{f}} & F \end{array}$$

commuter pour tout $g \in G$. Alors, la propriété universelle ($f(v) = \widehat{f}(g_e v)$) et la G -équivariance ($\widehat{f} \circ \text{Ind}_H^G \sigma(g) = \rho(g) \circ \widehat{f}$) forcent la définition de \widehat{f} :

$$\widehat{f}(g_\tau v) = \widehat{f}(g_\tau \cdot (g_\tau^{-1} \cdot g_\tau v)) = \rho(g_\tau) \circ \widehat{f}(g_\tau^{-1} \cdot g_\tau v) = \rho(g_\tau) \circ f(v).$$

L'extension de \widehat{f} sur \widehat{E} par linéarité satisfait certainement la propriété universelle et est G -équivariante. \square

On calcule la caractère de $\text{Ind}_H^G \sigma$:

Proposition 4.22 Soit $\sigma : H \rightarrow \text{GL}(E)$ une représentation d'un sous-groupe H de G . Alors,

$$\chi_{\text{Ind}_H^G \sigma}(g) = \sum_{\tau \in G/H} \hat{\chi}_\sigma(g_\tau^{-1} g g_\tau) = \frac{1}{|H|} \sum_{s \in G} \hat{\chi}_\sigma(s^{-1} g s),$$

où

$$\hat{\chi}_\sigma(g) := \begin{cases} \chi_\sigma(g) & \text{si } g \in H \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $d = [G : H]$ et $n = \dim E$. Pour faciliter la notation, on dénote les représentants g_τ des classes à gauche par t_1, \dots, t_d . Étant donnée une base e_1, \dots, e_n de E , les nd vecteurs $t_i e_j$ forment une base de \hat{E} . On va trouver la représentation matricielle de $\text{Ind}_H^G \sigma(g)$ en fonction de la base donnée.

Alors, si $v_j = t_j v$ il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que

$$\text{Ind}_H^G \sigma(g)v_j = g \cdot (t_j v) = t_i \sigma(t_i^{-1} g t_j) v.$$

C'est-à-dire que la représentation matricielle de $\text{Ind}_H^G \sigma(g)$ est

$$\begin{bmatrix} \sigma(t_1^{-1} g t_1) & \sigma(t_1^{-1} g t_2) & \dots & \sigma(t_1^{-1} g t_d) \\ \sigma(t_2^{-1} g t_1) & \sigma(t_2^{-1} g t_2) & \dots & \sigma(t_2^{-1} g t_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(t_d^{-1} g t_1) & \sigma(t_d^{-1} g t_2) & \dots & \sigma(t_d^{-1} g t_d) \end{bmatrix},$$

où $\sigma(t_i^{-1} g t_j)$ doit être considéré comme la matrice nulle si $t_i^{-1} g t_j \notin H$. On en déduit que

$$\chi_{\text{Ind}_H^G \sigma}(g) = \sum_{i=1}^d \hat{\chi}_\sigma(t_i^{-1} g t_i).$$

Alors, puisque $G = \coprod_{i=1}^d t_i H$,

$$\frac{1}{|H|} \sum_{s \in G} \hat{\chi}_\sigma(s^{-1} g s) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^d \sum_{h \in H} \hat{\chi}_\sigma(h^{-1} t_i^{-1} g t_i h).$$

Comme $h^{-1} t_i^{-1} g t_i h \in H$ si et seulement si $t_i^{-1} g t_i \in H$ et $\hat{\chi}$ est une fonction de classe,

$$\frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^d \sum_{h \in H} \hat{\chi}_\sigma(h^{-1} t_i^{-1} g t_i h) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^d \sum_{h \in H} \hat{\chi}_\sigma(t_i^{-1} g t_i) = \sum_{i=1}^d \hat{\chi}_\sigma(t_i^{-1} g t_i).$$

Le résultat suit. □

Ce résultat nous motive à définir des fonctions de classe induites. Si $f \in C_k(H)$, on définit $\text{Ind}_H^G f \in C_k(G)$ par

$$\text{Ind}_H^G f := \frac{1}{|H|} \sum_{s \in G} \widehat{f}(s^{-1}gs), \quad \text{où} \quad \widehat{f}(g) := \begin{cases} f(g) & \text{si } g \in H \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette définition implique $\text{Ind}_H^G \chi_\sigma = \chi_{\text{Ind}_H^G \sigma}$, comme on avait pour les restrictions. Enfin, on prouve le résultat le plus important de cette section :

Théorème 4.23 — Réciprocité de Frobenius. Soient $f_1 : H \rightarrow k$ et $f_2 : G \rightarrow k$ des fonctions de classe. Alors,

$$\langle \text{Ind}_H^G f_1, f_2 \rangle_{C_k(G)} = \langle f_1, \text{Res}_H^G f_2 \rangle_{C_k(H)}.$$

Démonstration. Comme chaque fonction de classe est une combinaison linéaire de caractéristiques irréductibles et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, on peut supposer que $f_1 = \chi_1$ et $f_2 = \chi_2$ sont des caractères irréductibles. Si χ_i est la caractéristique de $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(E_i)$, on dénote $\text{Ind}_H^G \rho_i$ par $\text{Ind}_H^G E_i$ (pareillement, $\text{Res}_H^G \rho_i$ par $\text{Res}_H^G E_i$). Donc, l'égalité que l'on veut prouver équivaut à

$$\dim \text{Hom}(\text{Ind}_H^G E_1, E_2)^G = \dim \text{Hom}(E_1, \text{Res}_H^G E_2)^H.$$

Ce n'est rien d'autre que la propriété universelle appliquée à $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(E_2)$. □

Montrons maintenant comment la cinquième représentation de l'exemple 4.11 peut être vue comme une représentation induite.

Exemple 4.12 Soit $H = \langle i \rangle$ un sous-groupe de Q . Alors $|H| = 4$ et donc $[Q : H] = 2$. Considérons la représentation $\sigma : H \rightarrow \mathbb{C}^\times$ donnée par $\sigma(\widehat{i}^k) = i^k$. Alors, on utilisant la représentation matricielle de $\text{Ind}_H^G \sigma(g)$ donné dans la démonstration de la proposition 4.22 avec $t_1 = \widehat{1}$ et $t_2 = \widehat{j}$ on voit que

$$\begin{aligned} \text{Ind}_H^G \sigma(\pm \widehat{1}) &= \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{Ind}_H^G \sigma(\pm \widehat{i}) &= \pm \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \\ \text{Ind}_H^G \sigma(\pm \widehat{j}) &= \pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \text{Ind}_H^G \sigma(\pm \widehat{k}) &= \pm \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D'où on conclut que le caractère de $\text{Ind}_H^G \sigma$ est χ_5 .

4.8 LES REPRÉSENTATIONS DU GROUPE SYMÉTRIQUE

Comme on verra, les partitions d'un entier sont étroitement liées aux classes de conjugaison de S_n . En particulier, chaque partition de n donne de façon bijective une classe de conjugaison et donc une représentation irréductible de S_n .

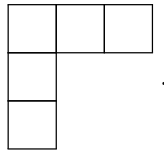
Définition 4.13 — Partitions. Une *partition* d'un entier $n > 0$ est une décomposition de cet entier en une somme d'entiers strictement positifs $\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell = n$ telle que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell$. On écrit $\lambda \vdash n$ pour dire que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ est une partition de n . Le nombre de partitions de n est dénoté par $p(n)$.

Exemple 4.13 L'entier 5 a 7 partitions :

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4 + 1 \\ &= 3 + 2 \\ &= 3 + 1 + 1 \\ &= 2 + 2 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Les partitions sont toujours écrites par ordre décroissant et sans zéros.

On va utiliser les *diagrammes de Young* pour écrire ces partitions. Étant donné une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ de n , son diagramme de Young se compose de λ_1 boîtes dans la première ligne, λ_2 boîtes dans la deuxième ligne et ainsi de suite.¹⁷ Le diagramme de Young de $(3, 1, 1)$ est



Si $\lambda \vdash n$, la partition transposée λ^T est la partition dont le diagramme de Young est obtenu du diagramme de λ en échangeant des lignes et des colonnes.

Exemple 4.14 La partition transposée de $(2, 2, 1)$ est la partition dont le diagramme est

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \right)^T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array}.$$

D'où, $(2, 2, 1)^T = (3, 2)$.

Définition 4.14 — Type d'une permutation. Le *type* de $\sigma \in S_n$ est la partition de n donnée par les longueurs de cycles dans la décomposition de σ en tant que produit de cycles disjoints.

Exemple 4.15 On peut écrire la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_8$$

comme $\sigma = (18632)(47)$ et donc le type de σ est $(5, 2, 1)$. (Ne pas oublier que l'on a omis l'élément 5, qui est fixé par σ .)

17. Certains auteurs préfèrent écrire les diagrammes de Young avec $\lambda_{\ell-i}$ boîtes sur la i -ème ligne.

La proposition suivante est la raison pour laquelle on étudie les partitions dans ce contexte.

Proposition 4.24 Deux éléments de S_n sont dans la même classe de conjugaison si et seulement s'ils ont le même type.

Démonstration. D'abord on voit que si $(a_1 \cdots a_k)$ est un cycle et $\sigma \in S_n$,

$$\sigma(a_1 \cdots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_k)).$$

Cela peut être prouvé en regardant l'action des deux cotés en $\sigma(a_i)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \sigma(a_1 \cdots a_k) \cdots (b_1 \cdots b_s)\sigma^{-1} &= [\sigma(a_1 \cdots a_k)\sigma^{-1}] \cdots [\sigma(b_1 \cdots b_s)\sigma^{-1}] \\ &= (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_k)) \cdots (\sigma(b_1) \cdots \sigma(b_s)). \end{aligned}$$

Ce résultat implique que deux permutations conjugués ont le même type. En revanche, si

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (a_1 \cdots a_k) \cdots (b_1 \cdots b_s) \\ \sigma_2 &= (a_1 \cdots a_k) \cdots (b_1 \cdots b_s) \end{aligned}$$

sont deux permutations avec le même type, on peut choisir une permutation $\tau \in S_n$ telle que $a_1 = \tau(a_1), \dots, a_k = \tau(a_k), \dots, b_1 = \tau(b_1), \dots, b_s = \tau(b_s)$. Enfin on a $\sigma_2 = \tau\sigma_1\tau^{-1}$, donc σ_1 et σ_2 sont dans la même classe de conjugaison. \square

Corollaire 4.25 Le groupe S_n a $p(n)$ classes de conjugaison et donc $p(n)$ représentations irréductibles.

On va maintenant remplir les diagrammes de Young avec des entiers $1, \dots, n$.

Définition 4.15 — Tableaux de Young. Soit $\lambda \vdash n$ une partition de n . Un λ -tableau t est un diagramme de Young de λ , rempli avec des entiers $1, \dots, n$. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$, le λ -tableau qui a les entiers $1, \dots, \lambda_1$ sur la première ligne, $\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2$ sur la deuxième, et ainsi de suite est dénoté t_λ .

Exemple 4.16 Ce sont des 6 tableaux de Young associés à la partition $(2, 1)$ de l'entier 3 :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}.$$

Bien sûr, il y a $n!$ tableaux de Young pour chaque partition $\lambda \vdash n$.

Exemple 4.17 Le tableau $t_{(4,2,1)}$ est

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Ce qui nous intéresse vraiment dans cette numérotation, ce sont les numéros de chaque ligne, mais pas sa position. Cela nous motive à dire que deux tableaux sont équivalents s'ils ont les mêmes entrées dans chaque ligne. Cette relation \sim est une relation d'équivalence.

Exemple 4.18 On a

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

mais

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

puisque le tableau de gauche a des chiffres $\{4, 5, 6\}$ dans la première ligne et le tableau de droite a $\{4, 2, 6\}$.

Définition 4.16 — Tabloïd de Young. Une classe d'équivalence de λ -tableaux est un λ -*tabloïd*. L'ensemble des λ -tabloïds est dénoté T^λ . On appelle T_λ la classe d'équivalence du tableau t_λ .

Le groupe S_n agit (transitivement) de façon naturelle sur des λ -tableaux en appliquant $\sigma \in S_n$ aux entrées de la boîte.

Exemple 4.19

$$(1\ 4\ 3) \cdot \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}.$$

Cette action passe bien au quotient. C'est ce que montre la proposition suivante.

Proposition 4.26 Soient t_1, t_2 des λ -tableaux et $\sigma \in S_n$. Alors $t_1 \sim t_2$ implique $\sigma \cdot t_1 \sim \sigma \cdot t_2$. C'est-à-dire que l'on peut définir une action sur T^λ en faisant $\sigma \cdot [t] = [\sigma \cdot t]$.

Démonstration. On veut montrer que deux entiers i, j sont dans la même ligne de $\sigma \cdot t_1$ si et seulement s'ils sont dans la même ligne de $\sigma \cdot t_2$. Alors,

$$\begin{aligned} i, j \text{ sont dans la même ligne de } \sigma \cdot t_1 &\iff \sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j) \text{ sont dans la même ligne de } t_1 \\ &\iff \sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j) \text{ sont dans la même ligne de } t_2 \\ &\iff i, j \text{ sont dans la même ligne de } \sigma \cdot t_2. \end{aligned}$$

Le résultat suit. □

On calcule alors le stabilisateur de T_λ , où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$. On veut trouver tous les permutations $\sigma \in S_n$ telles que $\sigma \cdot T_\lambda = T_\lambda$. Bien sûr on a

$$\text{Stab}_{S_n}(T_\lambda) = S_{\{1, \dots, \lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{\lambda_1+\dots+\lambda_{\ell-1}+1, \dots, n\}},$$

où S_X , pour $X \subset \{1, \dots, n\}$, est défini comme l'ensemble des permutations qui fixent tous les éléments en dehors de X . Par la formule des classes (Corollaire A.16),

$$|T^\lambda| = |O_{S_n}(T_\lambda)| = \frac{|S_n|}{|\text{Stab}_{S_n}(T_\lambda)|} = \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_\ell!}.$$

Étant donné une partition λ , on l'associera à la représentation de permutation $\rho^\lambda : S_n \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}[T^\lambda])$.

Exemple 4.20 Si $\lambda = (n-1, 1)$, deux λ -tableaux sont équivalents si et seulement s'ils ont la même entrée dans la seconde ligne. C'est-à-dire que chaque élément de T^λ peut être identifié par l'élément de $\{1, \dots, n\}$ dans la seconde ligne. On en déduit que $\mathbb{C}[T^\lambda] \cong \mathbb{C}[\{1, \dots, n\}] = \mathbb{C}^n$. L'action est bien sûr donnée par

$$\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}, \quad \sigma \in S_n.$$

On peut décomposer cette action comme

$$\mathbb{C}^n = \left\langle \sum_{i=1}^n e_i \right\rangle \oplus \left\{ \sum_{i=1}^n c_i e_i \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n c_i = 0 \right\}.$$

Les deux termes sont irréductibles. Le premier est isomorphe à la représentation triviale et le second est appelé la *représentation standard*.

Comme l'on a vu, normalement la représentation ρ^λ n'est pas irréductible. Cependant, chaque représentation irréductible de S_n est un constituant de ρ^λ pour une certaine partition $\lambda \vdash n$. C'est ce constituant que l'on veut isoler.

Pour simplifier la notation, on écrit C_t pour le stabilisateur des colonnes d'un tableau t , défini comme $\text{Stab}_{S_n}(t^T)$. Si C_1, \dots, C_k sont des colonnes de t , alors

$$C_t = S_{C_1} \times \dots \times S_{C_k}.$$

Définition 4.17 — Polytabloïd. Soit $\lambda \vdash n$ et t un λ -tableau. L'élément

$$\kappa_t := \sum_{\pi \in C_t} (\text{sgn } \pi) \rho^\lambda(\pi)[t]$$

de $\mathbb{C}[T^\lambda]$ est appelé le *polytabloïd* associé à t .

Cette formule doit être interprétée comme suit : étant donné un λ -tableau t , on considère sa classe d'équivalence $[t]$ et prenons son image (un élément de $\mathbb{C}[T^\lambda]$) par $\rho^\lambda(\pi)$, pour $\pi \in C_t$. Enfin, on fait une combinaison linéaire de ces vecteurs avec des poids $\text{sgn}(\pi)$.

- À ce stade, on a deux interprétations plausibles pour l'expression $\sigma \cdot [t]$. Cela peut être le λ -tabloïd donné par l'action de S_n ou l'image de $[t]$ par la représentation de permutation $\rho^\lambda(\sigma)$. Pour éviter toute confusion, on utilisera systématiquement la première interprétation.

Proposition 4.27 Soit $\sigma \in S_n$ et t un λ -tableau. Alors, $\rho^\lambda(\sigma)\kappa_t = \kappa_{\sigma \cdot t}$.

Démonstration. Par la proposition A.14, $C_{\sigma \cdot t} = \sigma C_t \sigma^{-1}$. Alors, si $\tau = \sigma \pi \sigma^{-1}$,

$$\begin{aligned} \rho^\lambda(\sigma)\kappa_t &= \rho^\lambda(\sigma) \left(\sum_{\pi \in C_t} (\text{sgn } \pi) \rho^\lambda(\pi)[t] \right) \\ &= \sum_{\tau \in C_{\sigma \cdot t}} (\text{sgn } \sigma^{-1} \tau \sigma) \rho^\lambda(\sigma) \rho^\lambda(\sigma^{-1} \tau \sigma)[t] \\ &= \sum_{\tau \in C_{\sigma \cdot t}} (\text{sgn } \tau) \rho^\lambda(\tau \sigma)[t] \\ &= \sum_{\tau \in C_{\sigma \cdot t}} (\text{sgn } \tau) \rho^\lambda(\tau)[\sigma \cdot t]. \end{aligned}$$

Le résultat suit. □

Cette proposition indique, en d'autres termes, que le sous-espace de $\mathbb{C}[T^\lambda]$ engendré par les polytabloïds κ_t est stable sous l'action de S_n . C'est-à-dire que ce sous-espace a une sous-représentation correspondante.

Définition 4.18 — Représentation de Specht. Soit $\lambda \vdash n$. On définit S^λ comme le sous-espace de $\mathbb{C}[T^\lambda]$ engendré par les polytabloïds κ_t . La sous-représentation correspondante $\psi^\lambda : S_n \rightarrow \text{GL}(S^\lambda)$ est la *représentation de Specht* associé à λ .

Exemple 4.21 Si $\lambda = (n)$, il n'y a qu'un λ -tabloïd : la classe d'équivalence T_λ du tableau t_λ

$$\boxed{1 \mid 2 \mid 3 \mid \cdots \mid n}.$$

Aussi, $C_t = \{\text{id}\}$ pour tout λ -tableau t . Alors,

$$\kappa_t = (\text{sgn id}) \rho^\lambda(\text{id})[t] = T_\lambda.$$

Il suit que la représentation de Specht associé à λ est isomorphe à représentation triviale.

Exemple 4.22 Soit $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ une partition de n et t un λ -tableau. Puisque t n'a qu'une colonne, $C_t = S_n$. Alors on calcule $\psi^\lambda(\sigma)\kappa_t$ pour $\sigma \in S_n$:

$$\begin{aligned} \rho^\lambda(\sigma)\kappa_t &= \sum_{\pi \in S_n} (\text{sgn } \pi) \rho^\lambda(\sigma) \rho^\lambda(\pi)[t] \\ &= \sum_{\tau \in S_n} (\text{sgn } \sigma^{-1} \tau) \rho^\lambda(\tau)[t] \\ &= (\text{sgn } \sigma) \kappa_t, \end{aligned}$$

où $\tau = \sigma \pi$. La représentation ψ^λ est isomorphe à représentation de la signature, définie par

$$\begin{aligned} S_n &\rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}) \\ \sigma &\mapsto (z \mapsto (\text{sgn } \sigma)z). \end{aligned}$$

Cette représentation est toujours irréductible.

Exemple 4.23 On revient à l'exemple 4.20 où $\lambda = (n - 1, 1)$. Soit t_i le λ -tableau

1	2	...	\hat{i}	...	n
i					

où \hat{i} indique que l'élément i a été omis. Pour faciliter la notation, on écrira les éléments $e_{[t_i]}$ de $\mathbb{C}[T^\lambda]$ comme e_i . Alors, si t est de la forme

i		...		
j				

on voit que $\kappa_t = e_i - e_j$. D'où il suit que

$$S^\lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i e_i \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n c_i = 0 \right\}$$

et que la représentation de Specht associé est la représentation standard.

Le lecteur peut deviner l'étonnant prochain théorème :

Théorème 4.28 Les représentations de Specht ψ^λ , pour $\lambda \vdash n$, forment un ensemble complet de représentations irréductibles inéquivalentes de S_n .

La preuve de ce théorème est basée sur une série de lemmes et échappe à la portée de cet exposé. On pourra la trouver dans la référence [29]. Il est préférable d'étudier quelques corollaires de ce résultat.

Définition 4.19 — Tableau de Young Standard. Soit $\lambda \vdash n$. On dit qu'un λ -tableau est *standard* si les entrées sont croissantes dans les lignes et dans les colonnes.

Exemple 4.24 Les tableaux

1	2	4
3	5	6
7	8	
9		

et

1	3	4	7
2	5		
6			

sont standards tandis que

1	2	4
5	3	6
7	8	
9		

et

2	3	4	7
1	5		
6			

ne le sont pas.

Comme nous l'avons vu dans les exemples 4.21 et 4.22, les polytabloïds sont généralement linéairement dépendants dans S^λ . Heureusement, cet espace vectoriel a une base naturelle.

Proposition 4.29 Soit λ une partition de n . Alors

$$\{\kappa_t \mid t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$$

est une base de S^λ .

Soit f^λ le nombre de λ -tableaux de Young standard. Le résultat précédent a les corollaires suivants.

Corollaire 4.30 Si $\lambda \vdash n$, alors $\dim S^\lambda = f^\lambda$.

Corollaire 4.31 Si n est un entier positif,

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!,$$

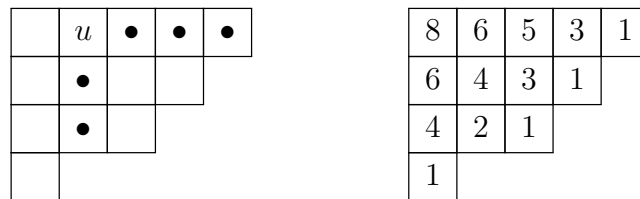
où la somme est sur toutes les partitions λ de n .

Démonstration. Cela découle des corollaires 4.18 et 4.30. □

Étant donnée une partition λ de n , on peut calculer le nombre $f^\lambda = \dim S^\lambda$ en utilisant la formule des équerres (en anglais, « hook-length formula ») que l'on verra maintenant. Pour faciliter la notation, notons par λ une partition de n et son diagramme de Young correspondant.

Définition 4.20 Soit λ un diagramme de Young. Pour une boîte u dans le diagramme (noté $u \in \lambda$), on définit l'équerre de u comme étant l'ensemble de tous les boîtes directement à droite de u ou directement en dessous u , y compris lui-même. Le nombre de l'équerre s'appelle la longueur de l'équerre de u et est noté $h_\lambda(u)$.

Exemple 4.25 On considère la partition $\lambda = (5, 4, 3, 1)$. À gauche on voit l'équerre de u et à droite on voit les longueurs des équerres de chaque boîte.



Le résultat suivant sera démontré à l'aide du théorème 4.36 qui sera présenté dans la dernière section de ce chapitre. Pour cette raison on omettra sa preuve pour l'instant.

Proposition 4.32 — Formule des équerres. Soit λ une partition de n . Alors,

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{u \in \lambda} h_\lambda(u)}.$$

Dans le cas $\lambda = (5, 4, 3, 1)$ de l'exemple 4.25, on a

$$f^\lambda = \frac{13!}{8 \cdot 6^2 \cdot 5 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = 15015.$$

4.9 LE TREILLIS DE YOUNG

Les groupes symétriques portent une inclusion naturelle :

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots \subset S_n \subset \dots,$$

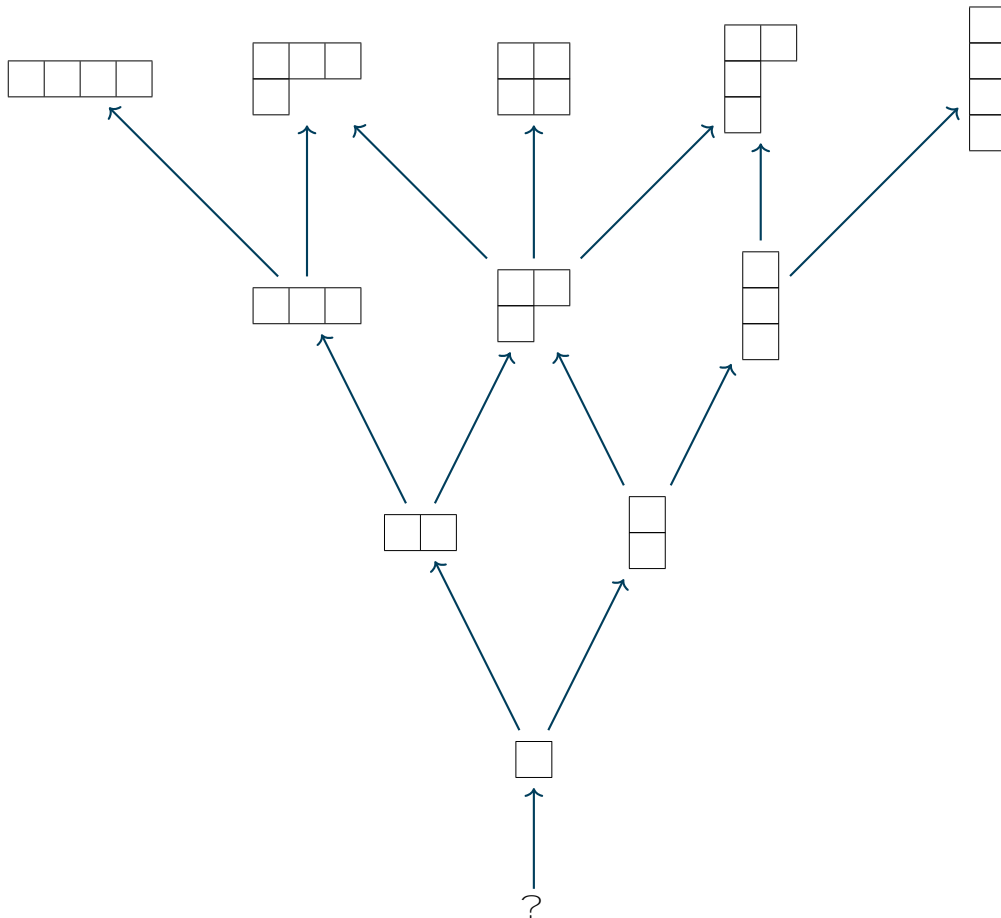
où, pour $n \leq m$, on voit $\sigma \in S_n$ comme une permutation de S_m fixant les derniers $m - n$ numéros. Cela nous amène à étudier la représentation induite de S_n dans S_{n+1} et sa restriction dans S_{n-1} .

Définition 4.21 — Treillis de Young. Soient λ et μ deux diagrammes de Young. On note $\lambda \rightarrow \mu$ si μ peut être obtenu à partir de λ en ajoutant une seule boîte. Alors, l'ensemble de diagrammes de Young, avec l'ordre partielle

$$\lambda \leq \mu \quad \text{s'il existe} \quad \nu_1, \dots, \nu_n \quad \text{tel que} \quad \lambda \rightarrow \nu_1 \rightarrow \dots \rightarrow \nu_n \rightarrow \mu,$$

est appelé *treillis de Young*.

On peut représenter graphiquement le treillis de Young comme suit.



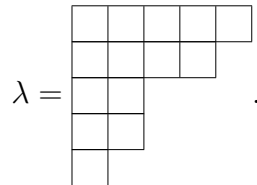
Évidemment on n'a dessiné que le bas du diagramme. Ce diagramme est généralement appelé *diagramme de Hasse*. Dans une série d'articles, Alfred Young a présenté le beau théorème ci-dessous, qui montre une façon facile de calculer la représentation induite de S_n dans S_{n+1} et sa restriction dans S_{n-1} .

Nous omettrons la démonstration du prochain théorème énoncé. Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails sur ce théorème dans [33].

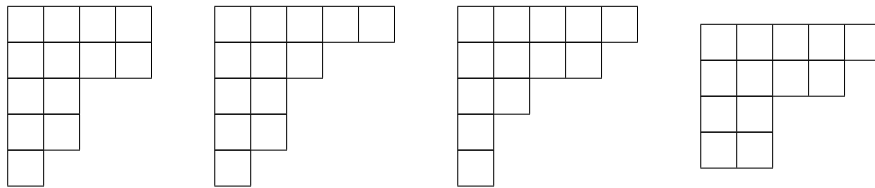
Théorème 4.33 — Règle de branchement de Young. Soit $\lambda \vdash n$. Alors,

$$\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} \psi^\lambda \cong \bigoplus_{\mu \vdash \lambda} \psi^\mu \quad \text{et} \quad \text{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} \psi^\lambda \cong \bigoplus_{\mu \vdash \lambda} \psi^\mu.$$

Exemple 4.26 Pour illustrer ce résultat, considérons $\lambda = (5, 4, 2, 2, 1) \vdash 14$. Le diagramme de Young correspondante est



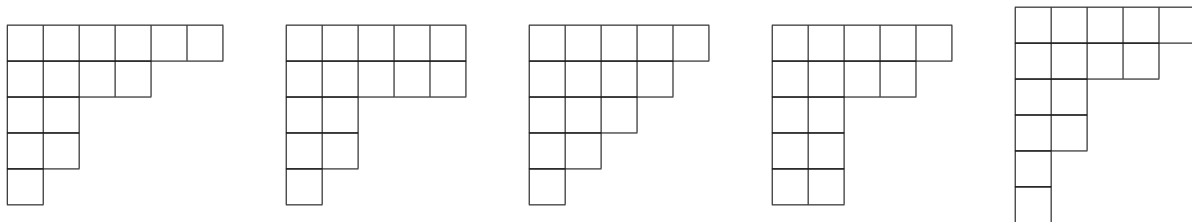
Alors, en élevant une seule boîte on obtient les diagrammes de Young suivantes.



On en déduit que

$$\text{Res}_{S_{13}}^{S_{14}} \psi^{(5,4,2,2,1)} = \psi^{(4,4,2,2,1)} \oplus \psi^{(5,3,2,2,1)} \oplus \psi^{(5,4,2,1,1)} \oplus \psi^{(5,4,2,2)}.$$

De même, en ajoutant une seule boîte on obtient les diagrammes de Young ci-dessous.



Donc,

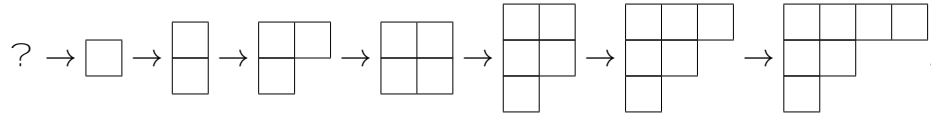
$$\text{Ind}_{S_{14}}^{S_{15}} \psi^{(5,4,2,2,1)} = \psi^{(6,4,2,2,1)} \oplus \psi^{(5,5,2,2,1)} \oplus \psi^{(5,4,3,2,1)} \oplus \psi^{(5,4,2,2,2)} \oplus \psi^{(5,4,2,2,1,1)}.$$

La règle de branchement de Young nous donne une nouvelle façon de regarder la proposition 4.29, qui nous donne une base de S^λ en termes des λ -tableaux standards. Le théorème 4.33 implique que

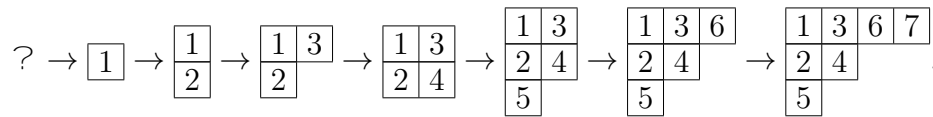
$$S^\lambda \cong \bigoplus_{\mu_1 \vdash \lambda} S^{\mu_1} \cong \bigoplus_{\mu_2 \vdash \mu_1 \vdash \lambda} S^{\mu_2} \cong \dots \cong \bigoplus_{\mu_n \vdash \dots \vdash \mu_1 \vdash \lambda} S^{\mu_n}.$$

Puisque $\dim S^\lambda = 1$, on a une correspondance directe entre une base de S^λ et des chemins entre \varnothing et λ dans le treillis de Young. Néanmoins, un tel chemin donne lieu à un λ -tableau standard comme on voit dans l'exemple suivante.

Exemple 4.27 Considérons le chemin entre \varnothing et $\lambda = (4, 2, 1)$:



On peut numéroter les diagrammes de gauche à droite :



Bien sûr, le λ -tableau à droite est standard. De façon similaire, chaque λ -tableau standard donne lieu à un chemin.

4.10 LA FORMULE DE FROBENIUS

Dans cette section, nous étudierons une formule, due à Frobenius, qui relie un problème combinatoire à la théorie des représentations de groupes finis.

Étant donné un groupe fini G et des classes de conjugaison C_1, \dots, C_k , on s'intéresse à calculer le nombre

$$\mathcal{N}(G; C_1, \dots, C_k) := |\{(c_1, \dots, c_k) \in C_1 \times \dots \times C_k \mid c_1 \dots c_k = e_G\}|.$$

On observe d'abord que $\mathcal{N}(G; C_1, \dots, C_k)$ ne dépend pas de l'ordre des arguments puisque l'identité $c_i c_{i+1} = c_{i+1} c_i^{-1} c_i c_{i+1}$ nous permet d'échanger C_i pour C_{i+1} .

Théorème 4.34 — Formule de Frobenius. Soit G un groupe fini et des classes de conjugaison C_1, \dots, C_k dans G . Alors,

$$\mathcal{N}(G; C_1, \dots, C_k) = \frac{|C_1| \cdots |C_k|}{|G|} \sum_{\chi} \frac{\chi(C_1) \cdots \chi(C_k)}{\chi(e_G)^{k-2}},$$

où la somme est sur tous les caractères irréductibles de G .

Démonstration. Pour chaque classe de conjugaison C , considérons l'élément $e_C := \sum_{g \in C} e_g \in \mathbb{C}[G]$. Si ρ est une représentation irréductible de G (vue dans $\mathbb{C}[G]$), e_C peut être vu comme une application ρ -équivariante de $\mathbb{C}[G]$ dans lui-même.¹⁸ Par le lemme de Schur, on conclut qu'il existe un nombre complexe $\nu_\rho(C)$ tel que $\rho(e_C) = \nu_\rho(C) \text{id}$. Alors, puisque $\chi(C) = \chi(g)$ pour tout $g \in C$,

$$|C| \chi(C) = \sum_{g \in C} \chi(g) = \text{tr}(\rho(e_C)) = \nu_\rho(C) \chi(e_G).$$

18. On définit $e_C(e_g) = \sum_{h \in C} e_{hg}$ et on étend par linéarité.

On en déduit que

$$\nu_\rho(C) = \frac{\chi(C)}{\chi(e_G)} |C|.$$

Alors on calcule la trace de l'action de

$$E = e_{C_1} \circ e_{C_2} \circ \dots \circ e_{C_k} = \sum_{c_1} \dots \sum_{c_k} e_{c_1 \dots c_k}$$

dans $\mathbb{C}[G]$. Puisque le caractère de la représentation régulière est

$$\chi_{\mathbb{C}[G]}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e_G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

on conclut que cette trace vaut $|G|\mathcal{N}(G; C_1, \dots, C_k)$. Aussi, comme $\mathbb{C}[G]$ est somme directe des représentations irréductibles (corollaire 4.17)

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i E_i^{\dim E_i},$$

où les E_i forment un ensemble complet de représentations irréductibles, et e_C agit par multiplication par scalaire, on en déduit que la trace vaut

$$\sum_i \nu_{\rho_i}(C_1) \dots \nu_{\rho_i}(C_k) (\dim E_i)^2 = |C_1| \dots |C_k| \sum_\chi \frac{\chi(C_1) \dots \chi(C_k)}{\chi(e_G)^{k-2}}.$$

Le résultat suit. □

On va nous intéresser principalement au cas $G = S_n$ qui, suivant Schur, est généralement écrit en utilisant la notation suivante.

Définition 4.22 Soit C une classe de conjugaison de S_n et λ une partition de n . On définit f_C comme la fonction suivante :

$$f_C(\lambda) = |C| \frac{\chi^\lambda(C)}{f^\lambda},$$

où $\chi^\lambda(C)$ est le caractère de la représentation de Specht associé à λ évalué sur n'importe quel élément de C . Si C est la classe d'un m -cycle, on écrira f_m au lieu de f_C .

Corollaire 4.35 — Formule de Frobenius pour S_n . Soient C_1, \dots, C_k des classes de conjugaison dans S_n . Alors,

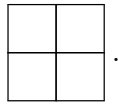
$$\mathcal{N}(S_n; C_1, \dots, C_k) = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 f_{C_1}(\lambda) \dots f_{C_k}(\lambda).$$

Une application intéressante est une formule pour les caractères des représentations de Specht (ce résultat s'appelle également *formule de Frobenius*).

Théorème 4.36 — Formule de Frobenius. Soit χ^λ le caractère de la représentation du groupe symétrique S_n correspondant à une partition $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ et on pose $\ell_j = \lambda_j + k - j$. Notons C_μ la classe de conjugaison de S_n correspondant aux permutations de type μ et soit i_j le nombre de fois où j apparaît dans μ . Alors $\chi^\lambda(C_\mu)$ est le coefficient de $x_1^{\ell_1} \dots x_k^{\ell_k}$ dans

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j) \prod_j (x_1^j + \dots + x_k^j)^{i_j}.$$

Exemple 4.28 Pour illustrer ce résultat, on recalcule la valeur du caractère χ_5 de S_4 calculé dans l'exemple 4.9. En fait, on va montrer que le caractère χ_5 provient de la représentation correspondant à $\lambda = (2, 2)$. C'est-à-dire au diagramme de Young



Dans ce cas on a $\ell_1 = 2 + 2 - 1 = 3$ et $\ell_2 = 2 + 2 - 2 = 2$. Les types des classes de conjugaison de S_4 sont

$$\begin{aligned} \mu_{\text{id}} &= (1, 1, 1, 1), & \mu_{(1\ 2)} &= (2, 1, 1), & \mu_{(1\ 2\ 3)} &= (3, 1), \\ \mu_{(1\ 2\ 3\ 4)} &= (4), & \mu_{(1\ 2)(3\ 4)} &= (2, 2). \end{aligned}$$

Enfin, les valeurs de χ^λ sont les coefficients de $x_1^3 x_2^2$ dans les polynômes suivants :

- $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^4 = x_1^5 + 3x_1^4 x_2 + 2x_1^3 x_2^2 - 2x_1^2 x_2^3 - 3x_1 x_2^4 - x_2^5$
- $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2(x_1^2 + x_2^2) = x_1^5 + x_1^4 x_2 + 0x_1^3 x_2^2 - x_1 x_2^4 - x_2^5$;
- $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^3 + x_2^3) = x_1^5 - 1x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 - x_2^5$;
- $(x_1 - x_2)(x_1^4 + x_2^4) = x_1^5 - x_1^4 x_2 + 0x_1^3 x_2^2 + x_1 x_2^4 - x_2^5$;
- $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^5 - x_1^4 x_2 + 2x_1^3 x_2^2 - 2x_1^2 x_2^3 + x_1 x_2^4 - x_2^5$.

On voit ainsi que

$$\chi^\lambda(\text{id}) = 2, \quad \chi^\lambda((1\ 2)) = 0, \quad \chi^\lambda((1\ 2\ 3)) = -1, \quad \chi^\lambda((1\ 2\ 3\ 4)) = 0 \quad \text{et} \quad \chi^\lambda((1\ 2)(3\ 4)) = 2.$$

Cela implique que χ_5 est le caractère provenant de la représentation de Specht ψ^λ .

L'un des corollaires du théorème 4.36 est la réponse à notre observation précédente selon laquelle les tables de caractères des représentations S_n n'avaient que des entiers.

Corollaire 4.37 Les caractères des représentations de Specht ont des valeurs entières.

On peut également démontrer la proposition 4.32 à l'aide de ce théorème.

Corollaire 4.38 — Formule des équerres. Soit λ une partition de n . Alors,

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_u \lambda h_\lambda(u)}.$$

Démonstration. Tout d'abord, notons que la dimension de l'espace vectoriel S^λ peut être trouvée en évaluant son caractère dans la classe de conjugaison de l'identité ($\mu = (1, 1, \dots, 1)$). C'est-à-dire que f^λ est le coefficient de $x_1^{\ell_1} \dots x_k^{\ell_k}$ dans

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j) (x_1 + \dots + x_k)^n.$$

On rappelle que le déterminant de Vandermonde est

$$\begin{vmatrix} 1 & x_k & \cdots & x_k^{k-1} \\ 1 & x_{k-1} & \cdots & x_{k-1}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) x_k^{\sigma(1)-1} \cdots x_1^{\sigma(k)-1} = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

et que, par la formule du multinôme de Newton,

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!} x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}.$$

Après multiplier les deux sommes, on voit que le coefficient de $x_1^{\ell_1} \cdots x_k^{\ell_k}$ est égal à

$$\sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \frac{n!}{(\ell_1 - \sigma(k) + 1)! \cdots (\ell_k - \sigma(1) + 1)!}.$$

En effectuant quelques manipulations algébriques, on s'aperçoit que l'expression ci-dessus est équivalente à

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{\ell_1! \cdots \ell_k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^k \ell_j (\ell_j - 1) \cdots (\ell_j - k + \sigma(j) + 1) \\ &= \frac{n!}{\ell_1! \cdots \ell_k!} \begin{vmatrix} 1 & \ell_k & \ell_k(\ell_k - 1) & \cdots & \ell_k \cdots (\ell_k - k + 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ell_1 & \ell_1(\ell_1 - 1) & \cdots & \ell_1 \cdots (\ell_1 - k + 2) \end{vmatrix} = \frac{n!}{\ell_1! \cdots \ell_k!} \prod_{i < j} (\ell_i - \ell_j), \end{aligned}$$

car on peut réduire ce déterminant-là au déterminant de Vandermonde en faisant des opérations de réduction sur les colonnes.

On note également que chaque ℓ_j correspond à la longueur du j -ième équerre de la première colonne (que l'on dénote u_j). Il suffit, maintenant, de montrer que

$$\frac{n!}{\ell_1! \cdots \ell_k!} \prod_{i < j} (\ell_i - \ell_j) = \frac{n!}{\prod_{u \in \lambda} h_\lambda(u)}.$$

On suit par récurrence du nombre de colonnes de λ . Si λ n'a qu'une colonne, $\ell_j = n - j + 1 = h_\lambda(u_j)$ et donc

$$\dim S^\lambda = \frac{n!}{n!(n-1)! \cdots 1!} \prod_{i=1}^{n-1} (n-i)! = 1 = \frac{n!}{n!}.$$

Soient $\bar{\lambda}$ la partition de $n - k$ obtenue en supprimant la première colonne de λ , \bar{k} le nombre des lignes de $\bar{\lambda}$ et $\bar{\ell}_j = \bar{\lambda}_j + \bar{k} - j$. On a $\bar{\ell}_j - \ell_j = -(k - \bar{k}) - 1$ et $\bar{\ell}_j - \bar{\ell}_i = \ell_j - \ell_i$. Par hypothèse de récurrence

$$\frac{\prod_{i < j} (\bar{\ell}_i - \bar{\ell}_j)}{\prod_{i=1}^{\bar{k}} \bar{\ell}_i!} = \frac{1}{\prod_u \bar{\lambda} h_{\bar{\lambda}}(u)}$$

et du fait que $\ell_j = h_{\lambda}(u_j)$, on obtient

$$\dim S^{\lambda} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^k \ell_j} \cdot \frac{\prod_{i < j} (\ell_i - \ell_j)}{\prod_{j=1}^k (\ell_j - 1)!} = \frac{n!}{\prod_u \lambda h_{\lambda}(u)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\bar{k}} \bar{\ell}_i!}{\prod_{j=1}^k (\ell_j - 1)!} \prod_{\substack{i < j \\ \bar{k} < j}} (\ell_i - \ell_j).$$

Notons que

$$\prod_{\substack{i < j \\ \bar{k} < j}} (\ell_i - \ell_j) = \prod_{i=1}^k \prod_{j > \max(i, \bar{k})} (\ell_i - \ell_j) = \prod_{i=1}^k \frac{(\ell_i - 1)!}{(\ell_i - 1 - k + \max(i, \bar{k}))!}.$$

Si $i > \bar{k}$, alors $\ell_i = k - i + 1$ (car il n'aura aucune boîte à droite pour de u_i), ce qui nous donne

$$\prod_{i=1}^{\bar{k}} \frac{(\ell_i - 1)!}{\ell_i!} \prod_{i=\bar{k}+1}^k (\ell_i - 1)!.$$

En substituant dans l'expression trouvée précédemment, on obtient le résultat désiré. \square

Exemple 4.29 On va calculer la valeur de f_m , liée à un m -cycle. En effet, tout d'abord on a que la taille de la classe de conjugaison C_m correspondant à un m -cycle est

$$|C_m| = \frac{n!}{m(n-m)!}.$$

Cela découle du fait que pour avoir une permutation σ que a un m -cycle, il suffit de fixer $n - m$ éléments (ce qu'on peut faire de $\binom{n}{n-m}$ façons) et après compter les nombres des permutations cycliques qu'on peut avoir avec les m éléments qui restent (évidemment $(m-1)!$).

De plus, la démonstration du corollaire ci-dessus nous montre que

$$f^{\lambda} = \frac{n!}{\ell_1! \cdots \ell_k!} \prod_{i < j} (\ell_i - \ell_j).$$

Il suffit donc de calculer $\chi^{\lambda}(C_m)$.

On pose $\Delta(\ell_1, \dots, \ell_k) := \prod_{i < j} (\ell_i - \ell_j)$. Par le théorème 4.36, $\chi^{\lambda}(C_m)$ est le coefficient de $x_1^{\ell_1} \cdots x_k^{\ell_k}$ dans l'expression :

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j)(x_1 + \dots + x_k)^m (x_1^m + \dots + x_k^m) = \sum_{s=1}^k x_s^m \prod_{i < j} (x_i - x_j)(x_1 + \dots + x_k)^m$$

Encore par ce que l'on a vu dans la démonstration du corollaire précédent, le coefficient désiré est

$$\sum_{s=1}^k \frac{(n-m)! \Delta(\ell_1, \dots, \ell_s - m, \dots, \ell_k)}{\ell_1! \cdots (\ell_s - m)! \cdots \ell_k!}.$$

On conclut que

$$f_m(\lambda) = |C_m| \frac{\chi^\lambda(C_m)}{f^\lambda} = \frac{n!}{m(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{n!} \sum_{s=1}^k \frac{\ell_s!}{(\ell_s - m)!} \prod_{j=s}^k \frac{\ell_s - \ell_j - m}{\ell_s - \ell_j},$$

où $\frac{\ell_s!}{(\ell_s - m)!} = \ell_s(\ell_s - 1) \cdots (\ell_s - m + 1)$ même si $\ell_s < m$. On peut également écrire :

$$f_m(\lambda) = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^k \frac{\ell_s!}{(\ell_s - m)!} \prod_{j=s}^k \left(1 - \frac{m}{\ell_s - \ell_j}\right).$$

Ce résultat nous sera utile dans le chapitre 5.

Enfin, un dernier corollaire sera important pour notre étude ; il traduit le fait que $\lambda \mapsto \chi^\lambda(C)$ ne dépend que de la différence $\lambda_j - j$.

Corollaire 4.39 Pour toute classe de conjugaison C de S_n , on a $f_C \in \Lambda$, l'algèbre des fonctions symétriques décalées (cf. exemple A.17).

On ne montrera que f_C est symétrique décalé ; le raisonnement plus complet, qui prouve que en plus que f_C est en fait un polynôme, peut être trouvé dans [17].

Démonstration. D'abord, on observe que les coefficients des monômes $x_1^{\ell_1} \dots x_i^{\ell_i} \dots x_j^{\ell_j} \dots x_k^{\ell_k}$ et $x_1^{\ell_1} \dots x_i^{\ell_j} \dots x_j^{\ell_i} \dots x_k^{\ell_k}$ dans

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j) \prod_j (x_1^j + \dots + x_k^j)^{i_j}$$

sont les mêmes à signe près. (Ils ont les signes inversés.) On en déduit que $\chi^\lambda(C)/\chi^\lambda(\text{id})$ est invariant par transposition des ℓ_i et donc f_C est symétrique dans les variables $\lambda_i - i$. \square

5

L'APPROCHE ALGÈBRIQUE AUX VOLUMES DE TEICHMÜLLER

5.1 APERÇU DE LA MÉTHODE

On revient sur le troisième chapitre, où on a obtenu une méthode de calcul des volumes de Teichmüller ; à savoir le théorème 3.1. De manière explicite, si $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ est une partition de $2g - 2$, alors

$$\mu_1(\mathcal{H}_1(\kappa_1, \dots, \kappa_n)) = 2(2g + n - 1) \lim_r \frac{1}{r^{2g+n-1}} \cdot m(r),$$

où $m(r)$ est le nombre de surfaces à petits carreaux avec des singularités coniques d'angles $2\pi(\kappa_1 + 1), \dots, 2\pi(\kappa_n + 1)$ qui peuvent être construites avec au plus r carrés.

Après A. Eskin et A. Okounkov [7], on considère le nombre $\mathcal{C}_d(\kappa)$ des surfaces à petits carreaux X qui ont des singularités coniques d'angles $2\pi\kappa_1, \dots, 2\pi\kappa_n$ et peuvent être construites en utilisant d carrés avec des poids $|\text{Aut}(X)|^{-1}$, où $\text{Aut}(X)$ est le groupe des automorphismes de X .

- *On observe que l'article [7] utilise une normalisation différente de celle utilisée jusqu'à présent pour la mesure de Masur-Veech. Par conséquent, certaines de nos formules ont un aspect différent.*

Normalement, le groupe des automorphismes $\text{Aut}(X)$ est trivial. Par conséquent, $m(r)$ et $\sum_{d=1}^r \mathcal{C}_d(\kappa + \vec{1})$, où $\vec{1} = (1, \dots, 1)$, ont le même comportement asymptotique lorsque $r \rightarrow \infty$. Néanmoins, ces poids simplifient beaucoup de nos formules.¹⁹

L'approche décrite dans ce chapitre est basée sur une certaine forme multilinéaire

$$\langle \cdot | \dots | \cdot \rangle_h : \Lambda \times \dots \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}[h^{-1}],$$

où Λ est l'algèbre des fonctions symétriques décalées (voir l'exemple A.17). Cette forme est telle que

$$\langle f_{\kappa_1+1} | \dots | f_{\kappa_n+1} \rangle_h = \mu_1(\mathcal{H}_1(\kappa)) \frac{(2g + n - 2)!}{2h^{2g+n-1}} + \dots,$$

où les f_k sont des fonctions de la définition 4.22 et les points représentent les termes de degré inférieur en h^{-1} . Le calcul de cette forme sera basé sur les étapes suivantes :

1. On écrit les fonctions f_k en termes des fonctions p_k définies par

$$p_k(x) := \sum_{i=0} \left[(x_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k \right] + (1 - 2^{-k})\zeta(-k), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

¹⁹. Une autre raison de considérer ces valeurs est le fait que $q \mapsto \sum_{d=0} q^d \mathcal{C}_d(\kappa)$ est une forme quasi-modulaire. En d'autres termes, il s'agit d'un polynôme en les séries d'Eisenstein $G_k(q)$, pour $k = 2, 4, 6$. (Voir [7].)

où ζ est la fonction zêta de Riemann. (Théorème 5.2.)

2. En utilisant la multilinéarité de $\langle \cdot | \dots | \cdot \rangle_h$, il suffit de calculer $\langle p_{\kappa_1} | \dots | p_{\kappa_n} \rangle_h$, qui est de la forme

$$\langle p_{\kappa_1} | \dots | p_{\kappa_n} \rangle_h = \frac{\langle\langle \kappa \rangle\rangle}{h^{2g-1}} + \dots,$$

où les $\langle\langle \kappa \rangle\rangle$ sont des constantes que l'on appelle des *cumulants élémentaires*. (Théorème 5.4.)

3. Enfin, on calcule les cumulants $\langle\langle \kappa \rangle\rangle$ en termes des valeurs de la fonction zêta aux entiers positives paires. (Théorème 5.5.)

Le fait que $\zeta(2k)$ soit toujours un multiple rationnel de π^{2k} impliquera alors le résultat conjecturé à la fin du troisième chapitre.

5.2 CALCUL DU VOLUME DE $\mathcal{H}_1(3, 1)$

A titre d'exemple de cette méthode, on va calculer le volume de Teichmüller de la strate $\mathcal{H}(3, 1)$. Comme on l'a décrit, la première étape consiste à écrire f_2 et f_4 en fonction des p_k , ce qui est possible grâce au théorème 5.1 :

$$f_2 = \frac{1}{2}p_2, \quad f_4 = \frac{1}{4}p_4 - p_2p_1 + \dots,$$

où, comme toujours, les points représentent des termes de « poids » inférieur qui ne contribuent en rien au résultat. Ces « poids » constituent une filtration sur Λ avec la propriété que $\langle \cdot | \dots | \cdot \rangle_h$ les envoient vers la filtration naturelle de $\mathbb{C}[h^{-1}]$ par degré, ce qui nous permet d'identifier beaucoup de termes négligeables. Par multilinéarité il suffit donc de calculer

$$\langle p_4 | p_2 \rangle_h \quad \text{et} \quad \langle p_2 p_1 | p_2 \rangle_h.$$

Le théorème 5.4 implique alors que

$$\langle f_4 | f_2 \rangle_h = \frac{1}{8} \langle p_4 | p_2 \rangle - \frac{1}{2} \langle p_2 p_1 | p_2 \rangle_h + \dots = \frac{1}{8h^7} \langle\langle 4, 2 \rangle\rangle - \frac{1}{2h^7} \langle\langle 2 \rangle\rangle \langle\langle 2, 1 \rangle\rangle - \frac{1}{2h^7} \langle\langle 1 \rangle\rangle \langle\langle 2, 2 \rangle\rangle + \dots.$$

Enfin, le théorème 5.5 nous permet de calculer les cumulants élémentaires en termes de la fonction zêta :

$$\begin{aligned} \langle\langle 1 \rangle\rangle &= \frac{\pi^2}{6}, & \langle\langle 2 \rangle\rangle &= 0 \\ \langle\langle 4, 2 \rangle\rangle &= \frac{416}{315} \pi^6, & \langle\langle 2, 2 \rangle\rangle &= \frac{16}{45} \pi^6, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\langle f_4 | f_2 \rangle_h = \left(\frac{128}{945} \pi^6 \right) \frac{1}{h^7} + \dots.$$

On obtient ainsi le volume voulu :

$$\mu_1(\mathcal{H}_1(3, 1)) \frac{6!}{2} = \frac{128}{945} \pi^6 \implies \mu_1(\mathcal{H}_1(3, 1)) = \frac{16}{42525} \pi^6.$$

C'est exactement la valeur décrite à la fin du troisième chapitre.

5.3 LE TERME DE POIDS MAXIMUM DE f_m

Cette section est consacrée à un résultat très utile qui nous permet d'explicitier les termes de f_m dont on aura besoin pour calculer le terme le plus important de l'expression $\langle f_{m_1} | \cdots | f_{m_n} \rangle_h$ en utilisant sa multilinéarité. Tout d'abord, on définit une nouvelle filtration de Λ en attribuant un *poids* $k + 1$ au élément

$$p_k(\lambda) := \sum_{i=1}^n [(\lambda_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k] + (1 - 2^{-k})\zeta(-k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ces fonctions constituent une base de Λ sur laquelle on veut écrire les f_m . On note que cette filtration n'est pas la même que la filtration obtenue à la limite projective.

On rappelle que l'algèbre Λ est une limite projective des algèbres Λ_ℓ de fonctions symétriques décalées à ℓ variables. En d'autres termes, l'algèbre Λ_ℓ est constituée des polynômes symétriques en

$$\xi_i = \lambda_i - i, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

La filtration hérité par Λ_n est la même que l'on peut obtenir en attribuant des poids $k + 1$ aux polynômes

$$\bar{p}_k := \sum_{i=1}^n \xi_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

qui forment une base naturelle de Λ_n (comme vu dans l'exemple A.17)

On considère des partitions $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (définition 4.13). Comme définie dans l'énoncé du théorème 4.36, i_j sera le nombre de fois que j apparaît dans λ . On note alors $i! = \prod_j i_j!$. Enfin, on définit l'élément $\bar{m}_\lambda \in \Lambda_n$ par

$$\bar{m}_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n \xi_{\sigma(i)}^{\lambda_i}.$$

Avant d'énoncer et démontrer le principal théorème de cette section, la notion de poids d'une partition sera définie, ainsi qu'un lemme que l'on peut obtenir sans trop d'efforts.

Définition 5.1 Soit λ une partition de longueur n . Alors le poids associé à λ est

$$\text{wt}(\lambda) = |\lambda| + n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n + n.$$

Également, $\text{wt}(\lambda)$ est le poids de $p_\lambda := \prod_{i=1}^n p_{\lambda_i}$.

Lemme 5.1 Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une partition de longueur n et i_j le nombre des fois que j apparaît dans λ . Alors

$$\bar{p}_\lambda := \prod_{j=1}^n \bar{p}_{\lambda_j} = i! \bar{m}_\lambda + \dots,$$

où les points signifient des termes de poids plus petit.

Démonstration. Par définition,

$$\bar{p}_\lambda = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^n \xi_m^{\lambda_i} \right).$$

Comme chaque monôme a le même degré, il faut juste extraire ceux qui ont la quantité la plus grande des variables différentes, c'est-à-dire les termes de la forme $\prod_{i=1}^n \xi_{\sigma(i)}^{\lambda_i}$. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on peut avoir $i_j!$ permutations des variables sans changer la valeur du monôme, de façon que chaque terme de la forme désirée apparaît $\prod_{j \in \mathbb{N}} i_j! = i!$ fois. Le résultat suit. \square

Finalement, on a le théorème suivant :

Théorème 5.2 La fonction f_m peut être écrite comme :

$$f_m = \frac{1}{m} \sum_{\text{wt}(\lambda)=m+1} \frac{(-m)^{n-1}}{i!} p_\lambda + \dots,$$

où la somme est sur tous les partitions $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de poids $m+1$ et les points signifient des termes de poids plus petit.

Démonstration. On rappelle d'abord la formule que l'on a obtenu dans l'exemple 4.29 :

$$f_m(\lambda) = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^n \frac{\xi_s!}{(\xi_s - m)!} \prod_{j=s} \left(1 - \frac{m}{\xi_s - \xi_j} \right).$$

Comme f_m est symétrique par rapport aux variables ξ_j , on peut supposer²⁰ que $i < j$ implique $|\xi_i| > |\xi_j|$ et faire l'expansion en série géométrique, en trouvant :

$$f_m = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^n \frac{\xi_s!}{(\xi_s - m)!} \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 + m \sum_{d=0} \frac{\xi_s^d}{\xi_j^{d+1}} \right) \prod_{j=s+1}^n \left(1 - m \sum_{d=0} \frac{\xi_j^d}{\xi_s^{d+1}} \right).$$

Étant donné une partition λ telle que $\text{wt}(\lambda) = m+1$, on s'intéresse à calculer le coefficient de $\xi_1^{\lambda_1} \dots \xi_\ell^{\lambda_\ell}$ dans l'expression ci-dessus.

On s'aperçoit que l'unique terme de la somme qui nous donne des puissances positives de ξ_1 est celui correspondant à $s=1$, et que les monômes de poids maximal viennent de l'expansion de

$$\xi_1^m \prod_{j=2}^{\ell} \left(1 - m \sum_{d=0} \frac{\xi_j^d}{\xi_1^{d+1}} \right).$$

Le coefficient de $\xi_1^{\lambda_1} \dots \xi_n^{\lambda_n}$ dans cette expression est $(-m)^{n-1}$ (car on a besoin du terme $\frac{\xi_j^{\lambda_j}}{\xi_1^{\lambda_j+1}}$ pour chaque $j = 2, \dots, n$). En considérant que \bar{p}_λ et p_λ ont le même terme de poids maximal, lorsqu'on permute les λ_i on retrouve $i! \bar{m}_\lambda$. Par le lemme 5.1, le résultat suit. \square

20. Après on permute les variables, de façon que cette supposition est sans perte de généralité.

Exemple 5.1 On va calculer les termes de poids maximum de f_2 et f_4 . Il n'y a qu'une seule partition telle que $\text{wt}(\lambda) = 3$, à savoir $\lambda = (2)$. D'où,

$$f_2 = \frac{1}{2}p_2 + \dots$$

Pareillement, il y a deux partitions $\lambda = (2, 1)$ et (4) de poids égal à 5. Ainsi,

$$f_4 = \frac{1}{4}(p_4 + (-4)p_2p_1) + \dots = \frac{1}{4}p_4 - p_2p_1 + \dots$$

5.4 LA FORME MULTILINÉAIRE

Dans cette section, on étudiera la forme multilinéaire $\langle \cdot | \dots | \cdot \rangle_h$ décrite au début de ce chapitre et on développera une méthode systématique pour la calculer sur la base des p_k . Pour cela, il faut d'abord comprendre la notation habituelle utilisée pour décrire les partitions d'un ensemble. (Ne pas confondre avec les partitions d'un entier !)

Rappelons qu'une *partition* α d'un ensemble S est une présentation de S sous la forme d'une union disjointe non ordonnée de sous-ensembles non vides

$$S = \alpha_1 \amalg \alpha_2 \amalg \dots \amalg \alpha_\ell,$$

appelés *blocs* de α . Le nombre $\ell = \ell(\alpha)$ est la *longueur* de la partition α . On note Π_n l'ensemble de toutes les partitions de $\{1, \dots, n\}$.

Étant donné deux partitions α et β , on note $\alpha \vee \beta$ la *jointure* de α et β , qui est la partition la plus fine qui est plus grossière que α et β . Par exemple, si

$$\alpha = \{1, 2\} \amalg \{3\} \amalg \{4\} \quad \text{et} \quad \beta = \{1\} \amalg \{2, 3\} \amalg \{4\},$$

alors $\alpha \vee \beta = \{1, 2, 3\} \amalg \{4\}$. On dit que $\alpha, \beta \in \Pi_n$ sont transversaux et on note $\alpha \perp \beta$ si

$$\ell(\alpha) + \ell(\beta) - \ell(\alpha \vee \beta) = n.$$

Par exemple, dans le cas ci-dessus, α et β sont transversaux. Pareillement, on dit que $\alpha, \beta \in \Pi_n$ sont complémentaires et on note $\alpha \top \beta$ si α, β sont transversaux et $\alpha \vee \beta = \{1, \dots, n\}$.

Enfin et surtout, on définit la forme $\langle \cdot | \dots | \cdot \rangle_h$.

Définition 5.2 Pour tout $F \in \Lambda$, on définit la forme linéaire

$$\langle F \rangle_q = \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \right] \sum_{\lambda} q^{|\lambda|} F(\lambda).$$

Plus généralement, pour $s \in \mathbb{N}$, on définit la forme multilinéaire suivante sur $(\Lambda)^s$:

$$\langle F_1 | F_2 | \dots | F_s \rangle_q = \sum_{\alpha \in \Pi_n} (-1)^{\ell(\alpha)-1} (\ell(\alpha) - 1)! \prod_{k=1}^{\ell(\alpha)} \left\langle \prod_{i \in \alpha_k} F_i \right\rangle_q.$$

Finalement, on fait $q = e^{-h}$ et on dénote par $\langle \cdot | \dots | \cdot \rangle_h$ le polynôme en h^{-1} qui fait partie du développement asymptotique de $\langle \cdot | \dots | \cdot \rangle_q$ lorsque $q \rightarrow 1$.

L'importance de cette définition découle de la proposition ci-dessous.

Proposition 5.3 Soit κ une partition de $2g - 2$. Alors,

$$\langle f_{\kappa_1+1} | \dots | f_{\kappa_n+1} \rangle_h = \mu_1(\mathcal{H}_1(\kappa)) \frac{(2g + n - 2)!}{2h^{2g+n-1}} + \dots,$$

où les f_k sont des fonctions de la définition 4.22.

Par la section précédente et cette proposition, tout ce qu'il faut pour calculer les volumes de Teichmüller est de pouvoir calculer la forme multilinéaire sur des produits des p_k . En fait, comme on le verra maintenant, tout ce que l'on a besoin de savoir, c'est comment calculer $\langle p_{m_1} | \dots | p_{m_n} \rangle_h$ pour un multi-indice $m = (m_1, \dots, m_n)$.

Définition 5.3 — Les cumulants élémentaires. On appelle les coefficients $\langle\langle m \rangle\rangle = \langle\langle m_1, \dots, m_n \rangle\rangle$ dans l'expansion

$$\langle p_{m_1} | \dots | p_{m_n} \rangle_h = \frac{\langle\langle m \rangle\rangle}{h^{m/2+1}} + \dots$$

les *cumulants élémentaires*.

Étant donné un multi-indice $m = (m_1, \dots, m_n)$ et une partition $\rho \in \Pi_n$ de longueur $\ell = \ell(\rho)$, on écrit

$$\langle |_\rho p_m \rangle_h = \left\langle \prod_{i \in \rho_1} p_{m_i} \mid \dots \mid \prod_{i \in \rho_\ell} p_{m_i} \right\rangle_h.$$

Le prochain théorème nous permet de calculer les $\langle |_\rho p_m \rangle_h$ en fonction des cumulants élémentaires.

Théorème 5.4 Soit $m = (m_1, \dots, m_n)$ un multi-indice et $\rho \in \Pi_n$ une partition de longueur ℓ . Alors,

$$\langle |_\rho p_m \rangle_h = \frac{1}{h^{m/2-\ell+n+1}} \sum_{\alpha} \prod_{k=1}^{\ell(\alpha)} \langle\langle m_{\alpha_k} \rangle\rangle + \dots,$$

où $m_{\alpha_k} = \{m_i \mid i \in \alpha_k\}$.

Exemple 5.2 On utilise ce théorème pour calculer $\langle p_\mu | p_\nu \rangle_h$, où $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ et $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$. Dans ce cas,

$$\rho = \{1, \dots, n\} \amalg \{n+1, \dots, n+m\}$$

et donc $\ell = 2$. D'où,

$$\langle p_\mu | p_\nu \rangle_h = \frac{1}{h^{\mu/2+\nu/2+n+m-1}} \sum_{i,j} \langle\langle \mu_i, \nu_j \rangle\rangle \prod_{k=i} \langle\langle \mu_k \rangle\rangle \prod_{l=j} \langle\langle \nu_l \rangle\rangle + \dots.$$

Particulièrement, $\langle p_2 p_1 | p_2 \rangle = h^{-7} (\langle\langle 2 \rangle\rangle \langle\langle 2, 1 \rangle\rangle + \langle\langle 1 \rangle\rangle \langle\langle 2, 2 \rangle\rangle)$.

5.5 LES CUMULANTS ÉLÉMENTAIRES

Dans les deux dernières sections, on a réduit le problème du calcul des volumes de Teichmüller au calcul des cumulants élémentaires. On aborde maintenant ce dernier problème. Pour cela, on utilise la variante suivante de la fonction zêta :

$$\mathfrak{z}(k) = \begin{cases} (2 - 2^{2-k})\zeta(k) & \text{si } k \text{ est paire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette variante correspond exactement aux coefficients de la série entière de $\pi x / \sin(\pi x)$:

$$\frac{\pi x}{\sin(\pi x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{z}(k)x^k.$$

Le prochain théorème fournit une méthode pour calculer les cumulants élémentaires.

Théorème 5.5 Pour tout multi-indice $m = (m_1, \dots, m_n)$,

$$\langle\langle m \rangle\rangle = \sum_{\alpha \in \Pi_n} (-1)^{\ell(\alpha)-1} (\ell(\alpha) - 2)! \sum_d \frac{1}{d!} \prod_{k=1}^{\ell(\alpha)} |m_{\alpha_k}|! \mathfrak{z}(|m_{\alpha_k}| - |\alpha_k| - d_k + 1),$$

où $|m_{\alpha_k}| := \sum_i \alpha_k m_i$ et la somme est sur tous les $\ell(\alpha)$ -uplets

$$d = (d_1, \dots, d_{\ell(\alpha)})$$

d'entiers non négatifs tels que $\sum d_k = \ell(\alpha) - 2$ et

$$d_k \equiv 1 + |m_{\alpha_k}| - |\alpha_k| \pmod{2}$$

pour tout $k = 1, \dots, \ell(\alpha)$. Le terme $\alpha = \{1, \dots, n\}$ doit être compris comme $|m|! \mathfrak{z}(|m| - n + 2)$.

Exemple 5.3 D'abord, il est clair que $\langle\langle k \rangle\rangle = k! \mathfrak{z}(k + 1)$ pour tout entier k . Ensuite on calcule $\langle\langle k, l \rangle\rangle$ pour des entiers k et l . Dans ce cas,

$$\Pi_2 = \{\{1, 2\}, \{1\} \amalg \{2\}\}$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle\langle k, l \rangle\rangle &= (k + l)! \mathfrak{z}(k + l) - \sum_d \frac{k! l!}{d!} \mathfrak{z}(k - d_1) \mathfrak{z}(l - d_2) \\ &= (k + l)! \mathfrak{z}(k + l) - k! l! \mathfrak{z}(k) \mathfrak{z}(l), \end{aligned}$$

où la somme n'a que le terme $d = (0, 0)$.

Comme on l'a vu, les volumes de Teichmüller sont écrits sous forme de sommes et de produits des nombres rationnels et des cumulants élémentaires qui, selon le théorème 5.5, sont écrits en fonction de la fonction zêta modifiée \mathfrak{z} . Puisque $\mathfrak{z}(k)/\pi^k$ est toujours un nombre rationnel, on obtient la conjecture du fin du troisième chapitre !

Théorème 5.6 Les volumes de Teichmüller sont toujours des multiples rationnels de π^{2g} . En d'autres termes,

$$\mu_1(\mathcal{H}_1(\kappa_1, \dots, \kappa_n))\pi^{-2g} \in \mathbb{Q},$$

où $\kappa_1 + \dots + \kappa_n = 2g - 2$.

A

PRÉLIMINAIRES ALGÈBRIQUES

A.1 CATÉGORIES

La théorie des catégories fournit un langage qui imprègne une grande partie des mathématiques modernes. Cela nous permet, d'un côté, d'unifier résultats apparaissant dans différents contextes et, d'autre part, de changer la focalisation des objets sur les applications entre eux, ce qui s'est avéré une approche très fructueuse.

Une catégorie consiste essentiellement en une collection d'objets et de morphismes entre ces objets, qui satisfont certaines conditions naturelles.

Définition A.1 — Catégorie. Une *catégorie* \mathbf{C} consiste en une classe d'objets $\text{Ob}(\mathbf{C})$ et, pour chaque pair d'objets $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, une classe de morphismes $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ tels que :

1. pour chaque objet $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ il existe un morphisme $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$, appelé *identité* de A ;
2. pour chaque pair $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ et $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C)$, il existe un morphisme $g \circ f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C)$ appelé *composée* de f et g ;
3. la composition est associative : pour tous $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C)$ et $h \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, D)$,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f);$$

4. les identités sont des éléments neutres de la composition : pour tout morphisme $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$,

$$\text{id}_B \circ f = f \circ \text{id}_A.$$

- Notez que l'on s'est abstenu de dire que $\text{Ob}(\mathbf{C})$ et $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ sont des ensembles. En pratique, ces classes sont souvent trop grandes pour être des ensembles. Cependant, cela ne posera aucun problème dans notre étude.

Si la catégorie est implicite dans le contexte, nous omettrons l'index \mathbf{C} et écrirons simplement $\text{Hom}(A, B)$. Dans ce cas, il sera également habituel d'écrire $f : A \rightarrow B$ de manière analogue aux applications entre ensembles.

Un morphisme d'un objet $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ dans lui-même s'appelle un *endomorphisme*. On écrit $\text{End}_{\mathbf{C}}(A)$ pour $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$. Observons que si $f, g \in \text{End}_{\mathbf{C}}(A)$, alors $f \circ g$ l'est aussi.

Exemple A.1 — Catégories concrètes. Bien entendu, l'exemple type d'une catégorie est constitué d'ensembles et de fonctions entre ensembles. La catégorie **Set**, où $\text{Ob}(\mathbf{Set})$ est la classe de tous les ensembles et $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B) = B^A$.

Plusieurs catégories importantes sont formées à partir de structures algébriques. C'est le cas de **Grp**, la catégorie des groupes, **Ring**, la catégorie des anneaux et **k-Vect**, la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k .

Exemple A.2 — « Slice category ». Étudions maintenant une catégorie très utile dont les objets ne sont pas des ensembles « avec une structure algébrique ». Soit \mathbf{C} une catégorie et A un objet de \mathbf{C} . On va définir une catégorie $\mathbf{C} \downarrow A$ dont les objets sont des morphismes dans \mathbf{C} d'un objet quelconque à A . C'est-à-dire que

$$\text{Ob}(\mathbf{C} \downarrow A) := \bigcup_{Z \in \text{Ob}(\mathbf{C})} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, A).$$

Étant donné cette classe d'objets, il n'y a qu'une seule manière raisonnable de définir les morphismes entre deux objets : si f_1, f_2 sont des objets de $\mathbf{C} \downarrow A$

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & & Z_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ A & & A \end{array}$$

alors des morphismes $f_1 \rightarrow f_2$ sont précisément des diagrammes commutatifs²¹

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{\varphi} & Z_2 \\ f_1 \searrow & & \swarrow f_2 \\ & A & \end{array}$$

dans \mathbf{C} . En d'autres termes,

$$\text{Hom}_{\mathbf{C} \downarrow A}(f_1, f_2) := \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z_1, Z_2) \mid f_1 = f_2 \circ \varphi\}.$$

Vérifions que $\mathbf{C} \downarrow A$ est en fait une catégorie : si $f : Z \rightarrow A$ est un objet de $\mathbf{C} \downarrow A$, l'identité id_f n'est rien d'autre que l'identité de Z . La commutativité du diagramme

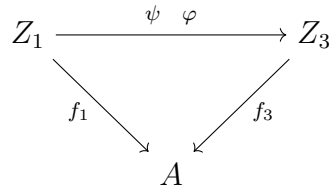
$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\text{id}_Z} & Z \\ f \searrow & & \swarrow f \\ & A & \end{array}$$

découle du fait que \mathbf{C} est une catégorie. La composition en $\mathbf{C} \downarrow A$ provient également de la composition en \mathbf{C} :

$$\begin{array}{ccccc} Z_1 & \xrightarrow{\varphi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \\ f_1 \searrow & & \downarrow f_2 & & \swarrow f_3 \\ & & A & & \end{array}$$

21. Un diagramme commutatif est un diagramme tel que tous les chemins dirigés dans le diagramme avec les mêmes points de départ et d'arrivée aboutissent au même résultat.

il suffit de mettre les diagrammes côte à côte! La composition est bien définie parce que le diagramme obtenu en supprimant la flèche centrale



commute également. Le fait que la composition soit associative et possède des identités en tant qu'éléments neutres découle de manière analogue.

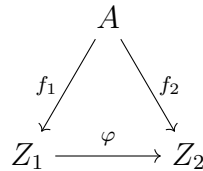
Exemple A.3 — « Coslice category ». En inversant toutes les flèches en $\mathbf{C} \downarrow A$, on obtient une nouvelle catégorie $A \downarrow \mathbf{C}$, définie par

$$\text{Ob}(A \downarrow \mathbf{C}) := \text{Ob}(\mathbf{C} \downarrow A)$$

et pour tous $f_1, f_2 \in \text{Ob}(A \downarrow \mathbf{C})$,

$$\text{Hom}_{A \downarrow \mathbf{C}}(f_1, f_2) := \text{Hom}_{\mathbf{C} \downarrow A}(f_2, f_1).$$

C'est-à-dire que les morphismes entre deux objets f_1 et f_2 de $A \downarrow \mathbf{C}$ sont des diagrammes commutatifs



dans \mathbf{C} . Ceci est un exemple d'une construction plus générale : étant donné une catégorie \mathbf{C} , on définit la catégorie opposée \mathbf{C}^{op} où

$$\text{Ob}(\mathbf{C}^{\text{op}}) := \text{Ob}(\mathbf{C})$$

et pour tous $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C}^{\text{op}})$,

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, B) := \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A).$$

Dans notre cas, $A \downarrow \mathbf{C}$ a été définie comme la catégorie opposée à $\mathbf{C} \downarrow A$. Le préfixe « co- » indique généralement que l'on inverse toutes les flèches.

Étant donné que la théorie des catégories met davantage l'accent sur les morphismes que sur les objets, on peut se demander s'il existe des notions analogues à l'injection, à la surjection et à la bijection qui fonctionnent avec les morphismes généraux. La proposition suivante, bien connue, répond à cette question.

Proposition A.1 Soient A, B des ensembles avec $A \neq \emptyset$ et soit $f : A \rightarrow B$ une application. Alors,

1. f a un inverse à gauche si et seulement si elle est injective ;
2. f a un inverse à droite si et seulement si elle est surjective.

Cette réinterprétation des classifications usuelles d'injectivité et de surjectivité se traduit comme suit pour les morphismes généraux.

Définition A.2 — Monomorphismes et épimorphismes. Soit \mathbf{C} une catégorie. Un morphisme $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ est un *monomorphisme* si pour tout objet $Z \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ et tous morphismes $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, A)$:

$$f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2 \implies \alpha_1 = \alpha_2.$$

Pareillement, $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ est un *épimorphisme* si pour tout objet $Z \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ et tous morphismes $\beta_1, \beta_2 \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, Z)$:

$$\beta_1 \circ f = \beta_2 \circ f \implies \beta_1 = \beta_2.$$

Comme d'habitude, il est habituel de décrire ces propriétés à l'aide de diagrammes commutatifs. Un monomorphisme est tel que la commutativité du diagramme

$$Z \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\alpha_2} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

implique $\alpha_1 = \alpha_2$. De même, un épimorphisme est tel que la commutativité du diagramme

$$A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_1} \\ \xrightarrow{\beta_2} \end{array} Z$$

implique $\beta_1 = \beta_2$.

Certes, dans **Set** les monomorphismes correspondent précisément aux injections et les épimorphismes aux surjections. Cependant, ce n'est pas toujours le cas, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple A.4 Dans **Ring**, un (homo)morphisme surjectif est certainement un épimorphisme (puisqu'il s'agit d'un épimorphisme dans **Set**). Cependant, considérons l'inclusion d'anneaux suivante :

$$\iota : Z \hookrightarrow \mathbb{Q}.$$

J'affirme que même sans être une surjection, ι est un épimorphisme d'anneaux. En fait, si β_1 et β_2 sont tels que le diagramme

$$Z \xleftarrow{\iota} \mathbb{Q} \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_1} \\ \xrightarrow{\beta_2} \end{array} R$$

commute, $\beta_1|_Z = \beta_2|_Z$. Alors, pour $p, q \in Z$ avec $q \neq 0$,

$$\beta_1 \left(\frac{p}{q} \right) = \beta_1(p)\beta_1(q)^{-1} = \beta_2(p)\beta_2(q)^{-1} = \beta_2 \left(\frac{p}{q} \right).$$

On conclut que ι est un épimorphisme.

Comme on a vu dans la proposition A.1, une application est bijective si et seulement si elle a un inverse à gauche et un inverse à droite. Dans ce cas, les deux inverses sont égaux. Cette notion se situe bien dans le contexte catégorique.

Définition A.3 — Isomorphisme. Soit \mathbf{C} une catégorie. Un morphisme $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ est un *isomorphisme* s'il existe $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$ tel que

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{id}_B.$$

Dans ce cas, on dit que g est le morphisme inverse de f et on note $g = f^{-1}$. S'il existe un isomorphisme entre deux objets A et B , on dit que A et B sont isomorphes et on note $A \cong B$.

Ainsi que l'on pouvait s'y attendre, l'inverse d'un isomorphisme est unique.

Proposition A.2 Soit \mathbf{C} une catégorie et $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ un isomorphisme. Alors, f admet un unique morphisme inverse.

Démonstration. Soient $g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$ deux inverses de f . Alors,

$$g_1 = g_1 \circ \text{id}_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \text{id}_A \circ g_2 = g_2.$$

Ceci conclut la démonstration. □

Notez que c'est exactement le même argument que celui utilisé pour prouver que si une application entre ensembles a un inverse à gauche et un inverse à droite, alors elle a un inverse unique et est une bijection. De plus, bien sûr, les isomorphismes dans **Set** sont précisément les bijections.

Définition A.4 — Automorphisme. Soit \mathbf{C} une catégorie et A un objet de \mathbf{C} . Alors, un *automorphisme* de A est un isomorphisme de A sur lui-même. L'ensemble des automorphismes est noté $\text{Aut}_{\mathbf{C}}(A)$.

Comme on peut le constater, l'ensemble des automorphismes avec l'opération de composition forme un groupe.

A.2 OBJETS TERMINAUX ET PROBLÈMES UNIVERSELS

Plusieurs concepts dans ce rapport auront deux descriptions : une construction explicite et une description de l'objet en tant que solution d'un « problème universel ». Habituellement, cette dernière description clarifie de nombreux aspects et met en évidence la motivation derrière la définition.

Pour comprendre ce qu'est un problème universel, on commence par définir quelques objets « distingués » qui existent dans certaines catégories.

Définition A.5 — Objets terminaux. Soit \mathbf{C} une catégorie. Un objet $I \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ est *initial* si pour tout objet $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$,

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(I, A) \text{ est un singleton.}$$

Pareillement, un objet $F \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ est *final* si pour tout objet $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$,

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, F) \text{ est un singleton.}$$

On utilise *terminal* pour indiquer l'une de ces possibilités.

Exemple A.5 — Objets terminaux dans Set. Un ensemble I est initial dans **Set** si pour tout ensemble A , il existe une unique application $f : I \rightarrow A$. Ce n'est le cas que si $I = \{ \}$.

La catégorie **Set** a aussi des objets finaux : si $F = \{s\}$ est un singleton, pour chaque ensemble A , il existe une unique application $f : A \rightarrow F$. L'application constante définie par $f(a) = s$ pour tout $a \in A$. On conclut que tout singleton est final dans **Set**.

Exemple A.6 — Objets terminaux dans Ring. L'anneau des entiers \mathbb{Z} est initial dans **Ring**. En fait, pour tout anneau R il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow R$ déterminé par les conditions

$$\varphi(1) = 1_R \quad \text{et} \quad \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Ce morphisme est donné par $\varphi(n) = n \cdot 1_R$.

Énonçons une propriété fondamentale qui sera utilisée sans arrêt au long de ce rapport. C'est précisément cette propriété qui garantira que les solutions aux problèmes universels, si elles existent, sont uniques à isomorphisme près.

Proposition A.3 Soit \mathbf{C} une catégorie. Alors si I_1 et I_2 sont initiaux dans \mathbf{C} , il existe un unique isomorphisme dans $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(I_1, I_2)$. De même, si F_1 et F_2 sont finaux dans \mathbf{C} , il existe un unique isomorphisme dans $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(F_1, F_2)$.

Démonstration. On va prouver l'énoncé sur les objets initiaux. L'énoncé sur les objets finaux est analogue.

Comme I_1 et I_2 sont initiaux, il existe un unique morphisme $f : I_1 \rightarrow I_2$ et un unique morphisme $g : I_2 \rightarrow I_1$. Considérons $g \circ f : I_1 \rightarrow I_1$. Comme I_1 est initial, il existe un unique morphisme dans $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(I_1, I_1)$: le morphisme identité id_{I_1} . On conclut que

$$g \circ f = \text{id}_{I_1}.$$

Pareillement, on peut conclure que $f \circ g = \text{id}_{I_2}$. Le résultat s'en suit. \square

La proposition A.3 illustre bien le fait que même si les objets finaux de **Set** ne sont pas uniques, ils sont tous isomorphes.

Exemple A.7 Considérons une variante (très utile) de la catégorie de l'exemple A.3. Étant donné un ensemble A et une catégorie \mathbf{C} donc les objets sont des ensembles (avec peut-être plus

de structure), on définit une catégorie \mathbf{C}_A où les objets sont des paires (j, R) avec $R \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ et $j \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, R)$. Un morphisme $(j_1, R_1) \rightarrow (j_2, R_2)$ dans \mathbf{C}_A est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ j_1 \swarrow & & \searrow j_2 \\ R_1 & \xrightarrow{\varphi} & R_2 \end{array}$$

où $\varphi : R_1 \rightarrow R_2$ est un morphisme dans \mathbf{C} (pas dans \mathbf{Set} !).

Cette construction apparaît couramment dans l'algèbre moderne. On donne un exemple classique.

Soit $\mathbf{C} = \mathbf{Grp}$. Le composant de groupe d'un objet initial dans \mathbf{Grp}_A s'appelle le groupe libre $F(A)$. La proposition A.3 dit que si un objet initial existe, il est unique à isomorphisme près. Cela justifie le fait que l'on ait appelé $F(A)$ le groupe libre.

On peut réécrire le fait que $F(A)$ est un objet initial de la manière suivante : $F(A)$ est le groupe libre sur l'ensemble A s'il existe une application $j : A \rightarrow F(A)$ telle que pour tout groupe G et pour toute application $f : A \rightarrow G$ il existe un unique homomorphisme de groupes $\varphi : F(A) \rightarrow G$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ j \swarrow & & \searrow f \\ F(A) & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

commute. Cette description de $F(A)$ est un exemple de problème universel.

La prochaine étape consiste à montrer qu'il existe un groupe satisfaisant la propriété de $F(A)$. Cette construction (et son analogue dans la catégorie \mathbf{Ab} des groupes abéliens) est assez belle mais échappe à la portée de cet exemple. Le lecteur peut le voir dans [1].

La notion de « problème universel » peut être comprise de plusieurs manières équivalentes. Puisque le contexte le plus naturel est trop lourd pour nos besoins, on se contente donc d'une définition pratique et de nombreux exemples.

Définition A.6 — Problème universel. On dit qu'un objet est la solution d'un *problème universel* lorsqu'il s'agit d'un objet terminal d'une catégorie. Habituellement, cette catégorie sera l'une des catégories $\mathbf{C} \downarrow A$ ou $A \downarrow \mathbf{C}$, définies dans les exemples A.2 et A.3, ou une variante simple, comme dans le cas de l'exemple A.7.

En raison de la proposition A.3, la procédure à suivre sera toujours la même : on définit un objet en termes de problème universel et on montre qu'un tel problème admet une solution explicite. Dès lors, la propriété universelle nous donnera toutes les informations dont on a besoin sur cet objet.

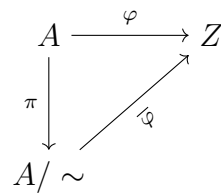
Prenons quelques exemples !

Exemple A.8 — Quotients. Soit \sim une relation d'équivalence et A un ensemble.

Que peut-on atteindre du quotient A/\sim ? D'abord, il faut que l'on ait une manière de voir A dans A/\sim . C'est-à-dire que l'on veut une application

$$\pi : A \rightarrow A/\sim .$$

Aussi, pour traduire l'idée que des éléments équivalents deviennent égaux dans le quotient, si $a \sim b$ sont des éléments équivalents dans A , on doit avoir $\pi(a) = \pi(b)$. En fait, on a même plus que ça : si $\varphi : A \rightarrow Z$ est une application telle que $a \sim b$ implique $\varphi(a) = \varphi(b)$, il doit exister une unique application $\bar{\varphi} : A/\sim \rightarrow Z$ telle que le diagramme



commute. Ce problème universel détermine A/\sim à isomorphisme près. Dans ce cas, la condition est que π soit un objet initial d'une catégorie similaire à $A \downarrow \mathbf{Set}$, où on ne considère que des morphismes satisfaisant une condition spéciale. Voyons comment la construction habituelle du quotient résout ce problème universel : si $\varphi : A \rightarrow Z$ est telle que $a \sim b$ implique $\varphi(a) = \varphi(b)$, la commutativité du diagramme implique que

$$\bar{\varphi}([a]) = \varphi(a).$$

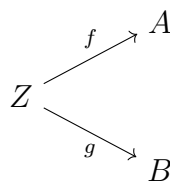
C'est-à-dire que, si $\bar{\varphi}$ est, en fait, une application, elle est unique et définie par l'équation ci-dessus. Néanmoins, par définition de φ ,

$$[a] = [b] \implies a \sim b \implies \varphi(a) = \varphi(b).$$

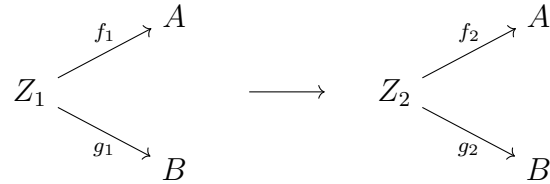
Ce qui implique que $\bar{\varphi}$ est bien définie. Bien entendu, la construction catégorique de quotients de structures algébriques (ou même d'espaces topologiques) est analogue.

Les catégories $\mathbf{C} \downarrow A$ et $A \downarrow \mathbf{C}$ nous ont aidés à décrire catégoriquement les objets définis à partir d'un objet $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$. Pour étudier des produits (et coproduits), il faut définir une catégorie similaire prenant en compte deux objets A et B .

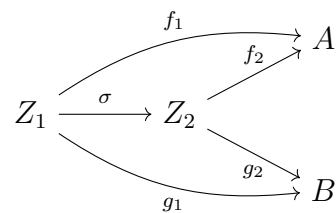
Soit \mathbf{C} une catégorie et A, B des objets de \mathbf{C} . On définit la catégorie $\mathbf{C}_{A,B}$, où les objets sont des diagrammes



dans \mathbf{C} et un morphisme



est un diagramme commutatif comme le suivant.



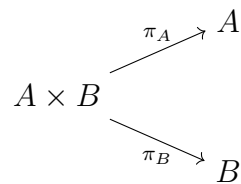
Plus formellement, on a

$$\text{Ob}(\mathbf{C}_{A,B}) := \{(f, g, Z) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, A) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, B) \times \text{Ob}(\mathbf{C})\}$$

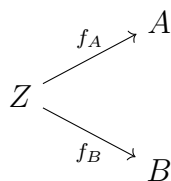
et

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}_{A,B}}((f_1, g_1, Z_1), (f_2, g_2, Z_2)) := \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z_1, Z_2) \mid f_1 = f_2 \circ \sigma \text{ et } g_1 = g_2 \circ \sigma\}.$$

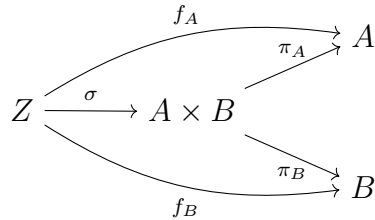
Exemple A.9 — Produits. Le produit entre deux objets A et B d'une catégorie \mathbf{C} est la troisième composante d'un objet final de la catégorie $\mathbf{C}_{A,B}$. Voyons comment cela fonctionne dans le cas $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$. Considérons le produit cartésien $A \times B$ avec ses deux projections naturelles.



Pour montrer que $A \times B$ est le produit catégorique, on doit prouver que pour chaque diagramme



il existe une unique application $\sigma : Z \rightarrow A \times B$ telle que le diagramme



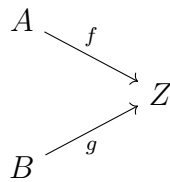
commute. Définissons donc

$$\begin{aligned}
 \sigma : Z &\rightarrow A \times B \\
 z &\mapsto (f_A(z), f_B(z)).
 \end{aligned}$$

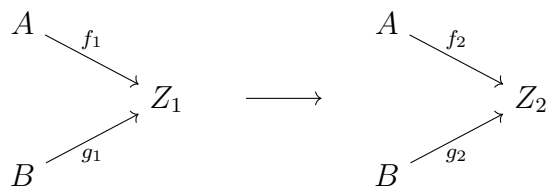
Pour définition, $f_A = \pi_A \circ \sigma$ et $f_B = \pi_B \circ \sigma$. Le résultat suit.

Le produit direct des groupes et les produits habituels des anneaux et des espaces vectoriels sont tous des produits catégoriques. De plus, le produit catégorique entre deux espaces topologiques porte la topologie produit.

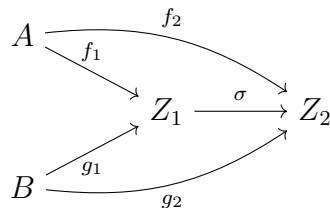
Comme le préfixe l'indique déjà, pour étudier les coproduits, on va inverser toutes les flèches dans $\mathbf{C}_{A,B}$ et examiner la catégorie $\mathbf{C}^{A,B}$ dont les objets sont des diagrammes



et les morphismes



sont des diagrammes commutatifs comme le suivant.



Voyons comment on peut utiliser cela pour construire le coproduit.

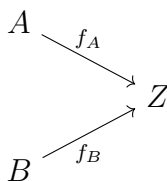
Exemple A.10 — Coproduits. Le coproduit entre deux objets A et B d'une catégorie \mathbf{C} est (la troisième composante d'un objet initial de la catégorie $\mathbf{C}^{A,B}$). La catégorie **Set** a un coproduit : l'union disjointe. Considérons l'union disjointe entre A et B définie par

$$A \amalg B := (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B).$$

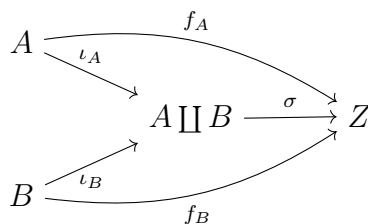
Cet ensemble est doté d'inclusions canoniques

$$\begin{aligned} \iota_A : A &\rightarrow A \amalg B & \text{et} & & \iota_B : B &\rightarrow A \amalg B \\ a &\mapsto (0, a) & & & b &\mapsto (1, b). \end{aligned}$$

On doit montrer donc que pour tout diagramme



il existe une unique application $\sigma : A \amalg B \rightarrow Z$ telle que le diagramme



commute. Comme d'habitude, la commutativité du diagramme force la définition du morphisme σ , donnée par

$$\sigma(c) = \begin{cases} f_A(a) & \text{si } c = (0, a) \in \{0\} \times A \\ f_B(b) & \text{si } c = (1, b) \in \{1\} \times B \end{cases}.$$

Contrairement aux produits, les coproduits catégoriques peuvent être très différents d'une union disjointe. Par exemple, le coproduit des groupes abéliens et des espaces vectoriels est donné par la somme directe. Le coproduit dans la catégorie **Grp** est donné par une construction analogue à l'exemple A.7 et est appelé produit libre.

Dans les espaces vectoriels (et les groupes abéliens), le produit cartésien et la somme directe satisfont aux conditions du produit et du coproduit catégorique en même temps. C'est une explication du fait que, pour les familles finies d'espaces vectoriels, le produit cartésien et la somme directe sont isomorphes. Ceci est un phénomène général qui se passe avec des catégories étonnamment bien comportés : les catégories « abéliennes ».

A.3 LIMITE PROJECTIVE

Les limites projectives, en théorie des catégories, sont des constructions similaires aux séquences de Cauchy, en analyse, où on utilise des approximations toujours meilleures de notre « objet idéal ». Tout comme on peut utiliser une suite de Cauchy de nombres rationnels pour représenter un nombre réel, on utilisera des séquences pour décrire les objets-limites que l'on obtiendra.

Définition A.7 — Système projectif. Soit (I, \leq) un ensemble ordonné et \mathbf{C} une catégorie. Un *système projectif* d'objets de \mathbf{C} indexé par I est la donnée d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathbf{C} et de morphismes $f_i^j \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A_j, A_i)$ pour tout $i \leq j \in I$ tels que

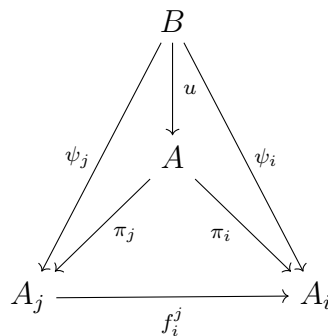
- Pour tout $i \in I$, $f_i^i = \text{id}_{A_i}$;
- Pour tous $i, j, k \in I$ tels que $i \leq j \leq k$, $f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$.

Presque toujours notre ensemble ordonné sera l'ensemble des entiers positifs. Dans ce cas, le choix d'un système projectif est le choix d'un diagramme

$$\dots \xrightarrow{f_4^5} A_4 \xrightarrow{f_3^4} A_3 \xrightarrow{f_2^3} A_2 \xrightarrow{f_1^2} A_1$$

dans \mathbf{C} . Notez que tous les morphismes non représentés sont implicites par la définition du système projectif.

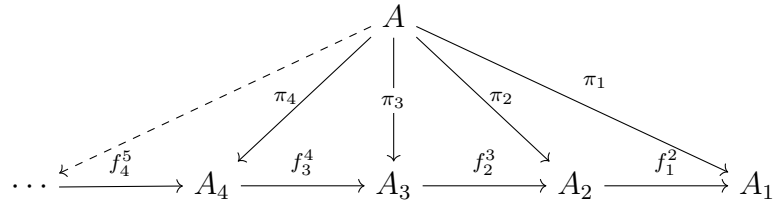
Définition A.8 — Limite projective. Étant donné un système projectif (A_i, f_i^j) dans une catégorie \mathbf{C} , une limite projective des A_i suivant les morphismes f_i^j est un pair (A, π_i) où A est un objet de \mathbf{C} et $\pi_i \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A_i)$ sont des morphismes tels que $\pi_i = f_i^j \circ \pi_j$ pour tous $i \leq j$. De plus, il faut que pour tout autre pair (B, ψ_i) , où B est un objet de \mathbf{C} et $\psi_i \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A_i)$, il existe un unique morphisme $u \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$ tel que le diagramme



soit commutatif pour tous $i \leq j$. Comme toujours, lorsqu'elle existe, la limite projective est unique à isomorphisme près. On la note $A = \varprojlim A_i$.

En pratique, où on utilisera $I = \mathbb{N}$, la limite inverse est un objet A , doté des morphismes

π_i tels que le diagramme



commute et cette condition doit être universelle, au sens donné par la définition ci-dessus.

Exemple A.11 — Limite projective d'ensembles. Dans la catégorie **Set**, on peut toujours explicitement écrire la limite projective

$$\varprojlim A_i = \left\{ (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid a_i = f_i^j(a_j) \text{ pour tous } i \leq j \right\}.$$

Dans ce cas, les projections π_i sont les projections canoniques données par le produit. La limite projective fonctionne exactement de la même manière dans toutes les catégories qui ont des produits, telles que **Grp**, **Ab**, **Ring**, **k-Vect**, etc. Une exception notable est le cas de la catégorie des corps, où le produit de deux corps n'est pas nécessairement un corps.

L'exemple ci-dessous, donné par [2], n'est pas nécessaire pour la suite de notre étude mais illustre merveilleusement bien ce qu'est une limite projective.

Exemple A.12 — L'anneau des entiers p -adiques. Supposons que l'on veuille résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$ dans \mathbb{Z} . Certes, cette équation n'a pas de solution, mais ignorons ce fait pour l'instant.

On peut observer que cette équation a deux solutions dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ qui, à signe près, sont égales. Cherchons donc une solution que satisfait $x \equiv 2 \pmod{5}$.

Puisque x satisfait $x = 5y + 2$, on remplace ceci dans notre équation pour obtenir

$$(5y + 2)^2 = -1 \implies 25y^2 + 20y = -5 \implies 20y \equiv -5 \pmod{25} \implies 4y \equiv -1 \pmod{5}.$$

Cette dernière équation a l'unique solution $y \equiv 1 \pmod{5}$. D'où on voit que

$$x = 5y + 2 \equiv 5 \cdot 1 + 2 \equiv 7 \pmod{25}.$$

On peut montrer que ce processus peut être étendu indéfiniment (lemme de Hensel), en trouvant ainsi une séquence de résidus $(x_k)_{k \geq 1} \in \mathbb{Z}/5^k\mathbb{Z}$ qui résolvent notre équation dans l'anneau dans lequel ils vivent. Ces résidus sont cohérents en ce sens que si $f_k : \mathbb{Z}/5^{k+1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/5^k\mathbb{Z}$ est l'application associant au résidu de $n \pmod{5^{k+1}}$ le résidu de $n \pmod{5^k}$

$$\dots \xrightarrow{f_4} \mathbb{Z}/5^4\mathbb{Z} \xrightarrow{f_3} \mathbb{Z}/5^3\mathbb{Z} \xrightarrow{f_2} \mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z} \xrightarrow{f_1} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

alors $f_k(x_{k+1}) = x_k$. On a ainsi construit un anneau $\mathbb{Z}_5 := \varprojlim \mathbb{Z}/5^k\mathbb{Z}$, qui contient une copie isomorphe de \mathbb{Z} , où l'équation $x^2 + 1 = 0$ a une solution.

A.4 PRODUIT TENSORIEL

Soit E, F des espaces vectoriels sur un corps commutatif k . Notre motivation derrière la définition du produit tensoriel est la volonté de traiter des fonctions bilinéaires « comme si » elles étaient linéaires. Autrement dit, nous voulons un nouvel k -espace vectoriel $E \otimes_k F$ et une fonction bilinéaire τ telle que pour tout espace vectoriel G , et pour toute application bilinéaire φ de $E \times F$ dans G , il existe une unique application linéaire $\bar{\varphi}$ de $E \otimes_k F$ dans G telle que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \tau \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ E \otimes_k F & & \end{array}$$

En d'autres termes, telle que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \tau$. On écrit alors l'élément $\tau(x, y)$ de $E \otimes_k F$ comme $x \otimes y$. Comme on a vu, l'espace $E \otimes_k F$ (ou, plus formellement, le morphisme τ) est solution d'un problème universel et donc, s'il existe, est unique à moins d'un isomorphisme. Alors, il faut construire le produit tensoriel.

Théorème A.4 Le produit tensoriel existe.

Démonstration. Soit $\{e_i : i \in I\}$ une base de E et $\{f_j : j \in J\}$ une base de F . Pour chaque pair (e_i, f_j) on définit un symbole purement formel $e_i \otimes f_j$ et on définit l'espace vectoriel $E \otimes_k F$ comme l'espace engendré par les vecteurs linéairement indépendants $e_i \otimes f_j$.

Puisque τ doit être bilinéaire, τ est déterminée par ses valeurs en (e_i, f_j) . Ensuite, on définit τ comme étant l'unique fonction bilinéaire telle que $\tau(e_i, f_j) = e_i \otimes f_j$ pour tout $i \in I, j \in J$.

Enfin, si $\varphi : E \times F \rightarrow G$ est une fonction bilinéaire quelconque, on définit $\bar{\varphi}$ comme l'unique application linéaire telle que $\bar{\varphi}(e_i \otimes f_j) = \varphi(e_i, f_j)$ pour tout $i \in I, j \in J$. \square

- Notez que, bien que $E \otimes_k F$ soit engendré par $\{e \otimes f \in E \otimes_k F : e \in E, f \in F\}$, cet ensemble n'est pas linéairement indépendant.

Corollaire A.5 Si E et F sont à dimension finie,

$$\dim(E \otimes_k F) = \dim(E) \dim(F).$$

Théorème A.6 Soient E, F, G espaces vectoriels sur un corps k . Alors,

$$\text{Hom}(E, F; G) \cong \mathcal{L}(E \otimes_k F, G),$$

où $\text{Hom}(E, F; G)$ est l'espace vectoriel des applications bilinéaires $E \times F \rightarrow G$ et $\mathcal{L}(E \otimes_k F, G)$ est l'espace vectoriel des applications linéaires $E \otimes_k F \rightarrow G$.

Démonstration. La propriété définissant le produit tensoriel implique que pour chaque $\varphi \in \text{Hom}(E, F; G)$ il existe une unique application $\bar{\varphi} \in \mathcal{L}(E \otimes_k F, G)$ telle que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \tau$. C'est-à-dire, il existe une fonction

$$\Lambda : \text{Hom}(E, F; G) \rightarrow \mathcal{L}(E \otimes_k F, G)$$

$$\varphi \quad \mapsto \quad \bar{\varphi}.$$

En fait, Λ est elle-même linéaire parce que si $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Hom}(E, F; G)$ on a

$$[r\Lambda(\varphi_1) + s\Lambda(\varphi_2)](x \otimes y) = r\bar{\varphi}_1(x, y) + s\bar{\varphi}_2(x, y) = \overline{[r\varphi_1 + s\varphi_2]}(x, y).$$

Si $f \in \mathcal{L}(E \otimes_k F, G)$, on voit que $\Lambda(f \circ \tau) = f$, ce qui implique que Λ est une surjection. Enfin, si $\Lambda(\varphi) = 0$ on a $\varphi = \Lambda(\varphi) \circ \tau = 0$, ce qui implique que Λ est une injection. \square

On énonce sans preuve quelques propriétés simples du produit tensoriel et de ses éléments.

Proposition A.7 Soient E, F, G des k -espaces vectoriels. Alors,

1. $E \otimes_k F \cong F \otimes_k E$;
2. $(E \otimes_k F) \otimes_k G \cong E \otimes_k (F \otimes_k G)$.

Aussi, $E \otimes_k F$ est un groupe abélien tel que

3. $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$;
4. $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$;
5. $c(x \otimes y) = (cx) \otimes y = x \otimes (cy)$.

pour tout $x, x_1, x_2 \in E, y, y_1, y_2 \in F$ et $c \in k$.

De manière analogue, on peut définir le produit d'un nombre fini de k -espaces vectoriels.

Définition A.9 Étant donné E_1, \dots, E_m k -espaces vectoriels, on définit leur produit tensoriel comme le pair $(E_1 \otimes_k \dots \otimes_k E_m, \tau)$, où τ est multilinéaire, tel que pour tout espace vectoriel G , et pour toute application multilinéaire φ de $E_1 \times \dots \times E_m$ dans G , il existe une unique application linéaire $\bar{\varphi}$ de $E_1 \otimes_k \dots \otimes_k E_m$ dans G telle que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_m & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \tau \downarrow & \searrow \bar{\varphi} & \nearrow \\ E_1 \otimes_k \dots \otimes_k E_m & & \end{array}$$

On écrit l'élément $\tau(x_1, \dots, x_m)$ comme $x_1 \otimes \dots \otimes x_m$.

Comme avant, le produit tensoriel existe et est unique à moins d'un isomorphisme. Le corollaire A.5, le théorème A.6 et la proposition A.7 se généralisent comme attendu.

A.5 PUISSANCE EXTÉRIEURE ET SYMÉTRIQUE

Dans cette section, on étudie deux constructions analogues à celle de la section précédente en utilisant des classes spéciales d'applications multilinéaires. Pour simplifier la notation, on définit

$$E^m := \underbrace{E \otimes_k \dots \otimes_k E}_{m \text{ fois}},$$

où $E^0 := k$.

Définition A.10 Soit $\varphi : E^m \rightarrow G$ une application multilinéaire. On dit que φ est *symétrique* si pour tout permutation $\sigma \in S_m$ et tout $x_1, \dots, x_m \in E$,

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

D'autre part, on dit que φ est *alternée* si

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \quad \text{lorsque} \quad x_i = x_j \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Le lecteur pourrait imaginer que l'on définirait les applications multilinéaires alternées comme celles satisfaisant

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = (-1)^\sigma \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

pour tout permutation $\sigma \in S_m$ et tout $x_1, \dots, x_m \in E$. Toutefois, si la caractéristique de k est 2, cette définition coïncide avec la définition des applications multilinéaires symétriques. Pour $\text{char}(k) \neq 2$, la définition ci-dessus est équivalente à la définition des applications multilinéaires alternées. C'est-à-dire,

Proposition A.8 Soit $\varphi : E^m \rightarrow G$ une application multilinéaire. Si φ est alternée, alors pour tout permutation $\sigma \in S_m$ et tout $x_1, \dots, x_m \in E$,

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = (-1)^\sigma \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Si la caractéristique de k n'est pas 2, la réciproque est vraie aussi.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas $m = 2$. Comme φ est multilinéaire et alternée,

$$0 = \varphi(x_1 + x_2, x_1 + x_2) = \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_2, x_1).$$

La première partie suit. Enfin, si la condition de l'énoncé est satisfaite, $\varphi(x, x) = -\varphi(x, x)$. C'est-à-dire, $2\varphi(x, x) = 0$. Donc, pour $\text{char}(k) \neq 2$, le résultat suit. \square

Les définitions qui suivent découlent de la volonté de traiter les classes d'applications multilinéaires que l'on vient de définir comme linéaires. Le lecteur doit comprendre que ces constructions sont totalement analogues à la construction du produit tensoriel. Comme auparavant, la puissance extérieure et la puissance symétrique sont des solutions aux problèmes universels et sont donc uniques à moins d'un isomorphisme.

Définition A.11 Étant donné un k -espace vectoriel E , on définit ses puissances extérieures comme le pair $(\wedge^m E, \eta)$, où η est multilinéaire alternée, tel que pour tout espace vectoriel G , et pour toute application multilinéaire alternée φ de E^m dans G , il existe une unique application linéaire $\bar{\varphi}$ de $\wedge^m E$ dans G telle que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccc} E^m & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \eta \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ \wedge^m E & & \end{array}$$

On écrit l'élément $\eta(x_1, \dots, x_m)$ comme $x_1 \wedge \dots \wedge x_m$.

Soit $W \subset E^m$ le sous-espace engendré par les vecteurs de la forme $x_1 \otimes \dots \otimes x_m$ tels que $x_i = x_j$ pour $i \neq j$. Soit aussi $q : E^m \rightarrow E^m/W$ l'application canonique. Alors, le pair $(E^m/W, \tau \circ q)$ satisfait la propriété de la puissance extérieure.

Comme avant, les propriétés de $\wedge^m E$ découlent du fait que η est multilinéaire alternée.

Proposition A.9 Soient E un k -espace vectoriel. Alors, $\wedge^2 E$ est un groupe abélien tel que

1. $(x_1 + x_2) \wedge y = x_1 \wedge y + x_2 \wedge y$;
2. $x \wedge (y_1 + y_2) = x \wedge y_1 + x \wedge y_2$;
3. $c(x \wedge y) = (cx) \wedge y = x \wedge (cy)$;
4. $x \wedge x = 0$.

pour tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$ et $c \in k$.

Les propriétés de $\wedge^m E$, pour $m > 2$, sont analogues.

Théorème A.10 Soit E un espace vectoriel à dimension finie. Alors, si $\dim E = n$,

$$\dim(\wedge^m E) = \binom{n}{m}.$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . On affirme que l'ensemble

$$B = \{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n\}$$

est une base de $\wedge^m E$. Étant donné un vecteur $x_1 \wedge \dots \wedge x_m \in \wedge^m E$, on peut écrire chacun des x_i comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base. Si un vecteur e_i apparaît deux fois dans le produit, le résultat est le vecteur nul et si les e_i apparaissent dans le mauvais ordre, on peut les réorganiser. Il en résulte que B engendre $\wedge^m E$.

Pour montrer que B est linéairement indépendant, on suppose qu'il existe une combinaison linéaire non triviale d'éléments de B résultant le vecteur nul. Comme aucun élément de B n'est le vecteur nul, il existe un i tel que certains éléments de cette combinaison linéaire contiennent le vecteur e_i mais pas tous. On prend alors le produit extérieur avec e_i . Le résultat est une

combinaison linéaire non triviale des vecteurs de la base de $\wedge^{m+1} E$ qui résulte le vecteur nul. La preuve se réduit alors au cas $n = m$, ce qui est trivial. \square

Enfin, on définit la puissance symétrique comme prévu.

Définition A.12 Étant donné un k -espace vectoriel E , on définit ses puissances symétriques comme le pair $(\text{Sym}^m E, \nu)$, où ν est multilinéaire symétrique, tel que pour tout espace vectoriel G , et pour toute application multilinéaire symétrique φ de E^m dans G , il existe une unique application linéaire $\bar{\varphi}$ de $\text{Sym}^m E$ dans G telle que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccc} E^m & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \nu \downarrow & \searrow \bar{\varphi} & \\ \text{Sym}^m E & & \end{array}$$

On écrit l'élément $\nu(x_1, \dots, x_m)$ comme $x_1 \vee \dots \vee x_m$.

Soit $V \subset E^m$ le sous-espace engendré par les vecteurs de la forme

$$x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(m)} - x_1 \otimes \dots \otimes x_m$$

pour une permutation $\sigma \in S_m$. Soit aussi $q : E^m \rightarrow E^m/V$ l'application canonique. Alors, le pair $(E^m/V, \tau \circ q)$ satisfait la propriété de la puissance symétrique.

Comme avant, les propriétés de $\text{Sym}^m E$ découlent du fait que ν est multilinéaire symétrique.

Proposition A.11 Soient E un k -espace vectoriel. Alors, $\text{Sym}^2 E$ est un groupe abélien tel que

1. $(x_1 + x_2) \vee y = x_1 \vee y + x_2 \vee y$;
2. $x \vee (y_1 + y_2) = x \vee y_1 + x \vee y_2$;
3. $c(x \vee y) = (cx) \vee y = x \vee (cy)$;
4. $x \vee y = y \vee x$.

pour tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$ et $c \in k$.

Les propriétés de $\text{Sym}^m E$, pour $m > 2$, sont analogues.

Théorème A.12 Soit E un espace vectoriel à dimension finie. Alors, si $\dim E = n$,

$$\dim(\text{Sym}^m E) = \binom{n+m-1}{m}.$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Cette fois-ci, c'est assez clair que

$$B = \{e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_m} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n\}$$

est une base de $\text{Sym}^m E$. La partie difficile est compter le nombre d'éléments dans cet ensemble. Heureusement, il existe une astuce merveilleuse qui le rend cela facile. Soit $x_k = i_{k+1} - i_k$, où

on écrit $i_0 = 1$ et $i_{m+1} = n$. On observe que

$$x_0 + x_1 + \dots + x_m = i_m - i_1 = n - 1.$$

Chaque solution de l'équation $x_0 + \dots + x_m = n - 1$ en entiers positifs donné lieu à un élément de la base B . Donc, il suffit de compter le numéro de solutions de cette équation. La stratégie consiste à considérer m tirets et $n - 1$ boules. Chaque solution de cette équation est équivalent à mettre x_0 boules avant le premier taret, x_1 boules avant le deuxième taret et ainsi de suite.

$$x_0 \mid x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_m$$

Donc, le nombre de solutions dans cette équation est égal au nombre de façons d'échanger des m tirets et $n - 1$ boules. C'est-à-dire,

$$\frac{(m + n - 1)!}{m!(n - 1)!} = \binom{n + m - 1}{m}.$$

□

A.6 ALGÈBRES SUR UN CORPS COMMUTATIF

Soit k un corps commutatif et considérons $k[x_1, \dots, x_n]$, l'anneau des polynômes à coefficients dans k en n indéterminées. Bien que $k[x_1, \dots, x_n]$ soit normalement vu comme un anneau, il est plus naturellement décrit comme un espace vectoriel sur k , avec une multiplication bilinéaire. Cette structure algébrique est appelée algèbre.

Définition A.13 — Algèbre. Une *algèbre* sur un corps commutatif k est un espace vectoriel $(A, +, \cdot)$ sur k avec une multiplication bilinéaire $\times : A \times A \rightarrow A$. Un morphisme entre deux k -algèbres A et B est une application linéaire $f : A \rightarrow B$ telle que

$$f(x \times y) = f(x) \times f(y)$$

pour tous $x, y \in A$. Ainsi, on a défini la catégorie $k\text{-Alg}$, des algèbres sur k .

On va généralement ignorer la distinction entre \times , le produit entre deux vecteurs, et \cdot , le produit entre un scalaire et un vecteur, désignant les deux par juxtaposition.

Exemple A.13 Les algèbres sur un corps commutatif imprègnent les mathématiques. L'ensemble des nombres complexes, l'ensemble de toutes les matrices avec des coefficients dans un corps, les quaternions et même \mathbb{R}^3 avec le produit vectoriel sont des exemples d'algèbres.

Exemple A.14 Considérons une définition équivalente d'algèbre *commutative* (c'est-à-dire quand \times forme une opération commutative) sur k . On peut dire qu'une algèbre commutative est la donnée d'un anneau commutatif A avec un homomorphisme $\varphi : k \rightarrow A$. Dans ce cas on a une multiplication par scalaire donnée par

$$\begin{aligned} k \times A &\rightarrow A \\ (k, a) &\mapsto \varphi(k)a. \end{aligned}$$

Pour préserver cette multiplication par scalaire, on dit qu'un morphisme entre deux algèbres commutatives A et B est un morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ tel que

$$f(cx) = cf(x)$$

pour tout $c \in k$ et $x \in A$. C'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ \varphi_A \swarrow & & \searrow \varphi_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

commute. On réalise que la catégorie des algèbres commutatives est la catégorie $k \downarrow \mathbf{CRing}$, où \mathbf{CRing} est la catégorie des anneaux commutatives.

La description de $k[x_1, \dots, x_n]$ en tant que k -algèbre est déjà plus précise que sa description en tant qu'anneau. Cependant, on ignore toujours le fait que tout polynôme $p \in k[x_1, \dots, x_n]$ a un entier $\deg p$ associé, son degré. Cela motive la définition de l'algèbre graduée.

Définition A.14 — Algèbre graduée. Soit A une algèbre sur un corps commutatif k . Une *graduation* sur A est la donnée d'une famille $(A_n)_{n \geq 0}$ de sous-espaces vectoriels de A vérifiant

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$$

et, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$A_n A_m \subset A_{n+m},$$

où $A_n A_m$ est défini comme l'algèbre engendré par des produits de vecteurs de A_n et A_m . En d'autres termes, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$x \in A_n, y \in A_m \implies x \times y \in A_{n+m}.$$

L'algèbre A est alors dite *graduée* et les éléments de A_n sont dits *homogènes* de degré n .

Un morphisme $f : A \rightarrow B$ d'algèbres graduées sur le même corps est un morphisme d'algèbres tel que $f(A_n) \subset B_n$ pour tout n . Ainsi, on a défini la catégorie $k\text{-GAlg}$, des algèbres graduées sur k .

On peut certainement écrire $k[x_1, \dots, x_n]$ comme

$$k[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} k_d[x_1, \dots, x_n],$$

où les $k_d[x_1, \dots, x_n]$ sont constitués des polynômes homogènes de degré d . En d'autres termes, ces polynômes dont les termes non nuls ont tous le même degré d .

Les constructions que l'on a vu dans les sections précédentes forment également, de manière naturelle, des algèbres graduées.

Exemple A.15 — L’algèbre tensorielle. Soit E un espace vectoriel. On aimerait utiliser le produit tensoriel pour former une algèbre avec E . Le problème est que v et $v \otimes v$ ne vivent pas dans le même espace. Le moyen le plus simple de résoudre ce problème consiste à considérer tous les espaces E^m en même temps et à former l’algèbre tensorielle :

$$T(E) := \bigoplus_{m=0} E^m,$$

où l’opération d’algèbre est donnée par

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \times (w_1 \otimes \cdots \otimes w_j) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_j$$

et étendue par linéarité. Bien sûr, $T(E)$ est une algèbre graduée.

De même, on définit l’algèbre extérieure et l’algèbre symétrique de E :

$$\bigwedge(E) := \bigoplus_{m=0} \bigwedge^m E, \quad \text{Sym}(E) := \bigoplus_{m=0} \text{Sym}^m E.$$

On observe que l’algèbre extérieure satisfait

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha,$$

si $\alpha \in \bigwedge^p E$ et $\beta \in \bigwedge^q E$. De plus, l’algèbre symétrique est commutative alors que l’algèbre tensorielle ne l’est pas.

L’exemple suivant et sa variante, illustré à l’exemple A.17, revêtent une importance fondamentale pour la théorie des représentations du groupe symétrique et en particulier pour notre étude.

Exemple A.16 — L’algèbre des fonctions symétriques. En continuant à étudier l’algèbre des polynômes, considérons le sous-espace Λ_n de $k[x_1, \dots, x_n]$ constitué des polynômes p tels que

$$p(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = p(x_1, \dots, x_n), \quad \text{pour tout } \sigma \in S_n.$$

Ces polynômes sont appelés *symétriques*. Certainement Λ_n hérite la structure d’algèbre graduée de $k[x_1, \dots, x_n]$:

$$\Lambda_n = \bigoplus_{d=0} \Lambda_n^d,$$

où Λ_n^d se compose des polynômes homogènes symétriques de degré d . Pour $m \geq n$ on a des morphismes naturels

$$k[x_1, \dots, x_m] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$$

qui envoient chacun de x_{n+1}, \dots, x_m à zéro et les autres x_i à eux-mêmes. En restreignant à Λ_m , on obtient les morphismes

$$\rho_n^m : \Lambda_m \rightarrow \Lambda_n$$

d’algèbres graduées. On a ainsi un système projectif dans $k\text{-GAlg}$. On appelle alors

$$\Lambda = \varprojlim \Lambda_n$$

l'algèbre des fonctions symétriques. Notons qu'un élément de Λ n'est pas un polynôme, mais une séquence $(p_n)_{n \geq 1}$ de polynômes telle que $p_n \in \Lambda_n$,

$$p_m(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = p_n(x_1, \dots, x_n), \quad \text{pour } m \geq n$$

et $\sup_n \deg(p_n) < \infty$. On utilisera la notation naturelle et dénotera un élément de Λ comme un polynôme symétrique dans une quantité dénombrable de variables. Par exemple, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ est dans Λ mais $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i)$ n'est pas.

- *Soulignons que la différence entre la limite projective dans la catégorie $k\text{-GAlg}$ et celle dans $k\text{-Alg}$ correspond exactement à la condition $\sup_n \deg(p_n) < \infty$. Si la limite était dans la catégorie $k\text{-Alg}$, le produit infini $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i)$ serait un élément de Λ .*

Examinons dorénavant une variante de l'exemple précédent, dont l'expérience s'est révélée très utile pour notre propos.

Exemple A.17 — L'algèbre des fonctions symétriques décalées. Considérons maintenant le sous-espace Λ_n de $k[x_1, \dots, x_n]$ constitué des polynômes p tels que

$$p(\xi_{\sigma(1)} + 1, \dots, \xi_{\sigma(n)} + n) = p(\xi_1 + 1, \dots, \xi_n + n), \quad \text{pour tout } \sigma \in S_n.$$

Autrement dit, constitué des polynômes qui sont symétriques dans les variables $\xi_i = x_i - i$. Ces polynômes sont appelés *symétriques décalés*. Tout comme avant, Λ_n est une algèbre graduée par degré. Pareillement, on aimerait prendre la limite projective. Cependant, la restriction $\tilde{\rho}_n^m$ du morphisme

$$k[x_1, \dots, x_m] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$$

considérée avant à Λ_m est un morphisme d'algèbres mais pas un morphisme d'algèbres graduées. Par exemple,

$$(x_1 - 1)(x_2 - 2) + (x_1 - 1)(x_3 - 3) + (x_2 - 2)(x_3 - 3)$$

est un élément de Λ_3 . Cependant, sa image par $\tilde{\rho}_2^3$ est

$$(x_1 - 1)(x_2 - 2) - 3(x_1 - 1) - 3(x_2 - 2),$$

qui est dans Λ_2 mais n'est pas homogène. Cela nous empêche de prendre la limite projective dans la catégorie $k\text{-GAlg}$. Pour résoudre ce problème, on va définir la catégorie des algèbres filtrées, une généralisation du concept d'algèbre graduée.

Définition A.15 — Algèbre filtrée. Soit A une algèbre sur un corps commutatif k . Une *filtration* sur A est la donnée d'une famille croissante $\{0\} \subset F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \dots \subset A$ de sous-espaces vectoriels de A vérifiant

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n, \quad \text{et, pour tout } n, m \in \mathbb{N}, \quad F_n F_m \subset F_{n+m}.$$

L'algèbre A est alors dite *filtrée*. Un morphisme $f : A \rightarrow B$ d'algèbres filtrées sur le même corps est un morphisme d'algèbres tel que $f(F_n) \subset Q_n$, où $(Q_n)_{n \geq 0}$ est une filtration sur B , pour tout n . Ainsi, on a défini la catégorie $k\text{-FAlg}$, des algèbres filtrées sur k .

Bien sûr, toute algèbre graduée a une filtration naturelle, donnée par

$$F_n := \bigoplus_{i=0}^n A_i, \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Exemple A.18 — L’algèbre des fonctions symétriques décalées (suite). Bien que les morphismes $\tilde{\rho}_n^m$, considérés dans l’exemple précédent, ne soient pas des morphismes d’algèbres graduées, ce sont certainement des morphismes d’algèbres filtrées. Cela nous permet de construire la limite projective

$$\Lambda := \varprojlim \Lambda_n$$

dans la catégorie $k\text{-FAIg}$. Cette limite s’appelle l’algèbre des fonctions symétriques décalées. Comme auparavant, un élément de Λ est une séquence $(p_n)_{n \geq 1}$ de polynômes telle que $p_n \in \Lambda_n$,

$$p_m(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = p_n(x_1, \dots, x_n), \quad \text{pour } m \geq n$$

et $\sup_n \deg(p_n) < \infty$. Dans la suite de notre étude, on ne considérera que l’algèbre complexe des fonctions symétriques décalées. C’est-à-dire le cas $k = \mathbb{C}$. Tout comme l’algèbre Λ a la base naturelle

$$\sum_{i=1}^k x_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

cette algèbre a la base naturelle

$$\sum_{i=1}^k [(x_i - i)^k - (-i)^k], \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Cependant, on utilisera généralement une variante commode, donnée par

$$p_k(x) := \sum_{i=1}^k [(x_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k] + (1 - 2^{-k})\zeta(-k), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann. Cette base simplifiera beaucoup de nos formules. Par exemple, en définissant la fonction génératrice

$$e^x(t) := \sum_{i=1}^{\infty} e^{(x_i - i + 1/2)t},$$

on obtient

$$p_k(x) = k! [t^k] e^x(t),$$

où $[x^k]$ est l’opérateur qui envoie une fonction au coefficient de x^k dans sa série de Laurent. Cette formule sera au cœur de notre étude au cinquième chapitre.

A.7 ACTIONS DE GROUPES

En tout généralité, une action d'un groupe G sur un objet A d'une catégorie \mathbf{C} est un homomorphisme

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbf{C}}(A).$$

Toutefois, le cas $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ a déjà une théorie très riche et est plus approprié pour cette introduction. On écrit alors juste $\text{Aut}(A)$ pour dénoter $\text{Aut}_{\mathbf{Set}}(A)$. La notion d'action de groupe illustre clairement l'idée qu'un groupe peut « encoder » les symétries (les automorphismes) d'un ensemble quelconque.

Définition A.16 Une action d'un groupe G sur un ensemble non-vide A est une fonction $\sigma : G \times A \rightarrow A$ telle que $\sigma(e_G, a) = a$ pour tout $a \in A$ et

$$\sigma(gh, a) = \sigma(g, \sigma(h, a))$$

pour tout $g, h \in G$ et $a \in A$.

En fait, les deux définitions données sont équivalentes. Si on a un homomorphisme $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(A)$, alors la fonction $\sigma : G \times A \rightarrow A$ définie par $\sigma(g, a) = \rho(g)(a)$ est tel que $\sigma(e_G, a) = \rho(e_G)(a) = \text{id}_A(a) = a$ et

$$\sigma(g, \sigma(h, a)) = \sigma(g, \rho(h)(a)) = \rho(g)(\rho(h)(a)) = (\rho(g) \circ \rho(h))(a) = \rho(gh)(a) = \sigma(gh, a).$$

De façon similaire, étant donné une fonction $\sigma : G \times A \rightarrow A$ qui satisfait la définition A.16, la fonction $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ définie par $\rho(g)(a) = \sigma(g, a)$ est un homomorphisme. On utilisera donc les deux notations de manière interchangeable. On fera aussi un abus de notation et on écrira $g \cdot a$ ou même ga pour l'élément $\sigma(g, a)$. Les conditions de la définition A.16 s'écrivent alors comme $(gh) \cdot a = g(h \cdot a)$ et $e_G \cdot a = a$.

Définition A.17 Une action d'un groupe G dans un ensemble A est appelé *fidèle* si l'application $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ est-elle injective. Ceci se produit si et seulement si l'identité est l'unique élément $g \in G$ tel que $g \cdot a = a$ pour tout $a \in A$. Si $\rho(e_G)$ est l'unique automorphisme de A avec un point fixe, l'action est dite *libre*.

Exemple A.19 Tout groupe G agit sur lui-même de façon naturelle. Dans ce cas-là $\rho : G \times G \rightarrow G$ est simplement la multiplication de groupe.

$$\sigma(g, h) = gh$$

Cet action est libre (et donc fidèle). Tout groupe agit sur lui-même aussi pour conjugaison. Dans ce cas, l'action est donné par

$$\sigma(g, h) = ghg^{-1}.$$

Cet action est fidèle si et seulement si le centre de G est trivial.

Exemple A.20 Étant donné un groupe G et un sous-groupe (pas nécessairement normal) H . Dans ce cas G agit sur G/H en faisant

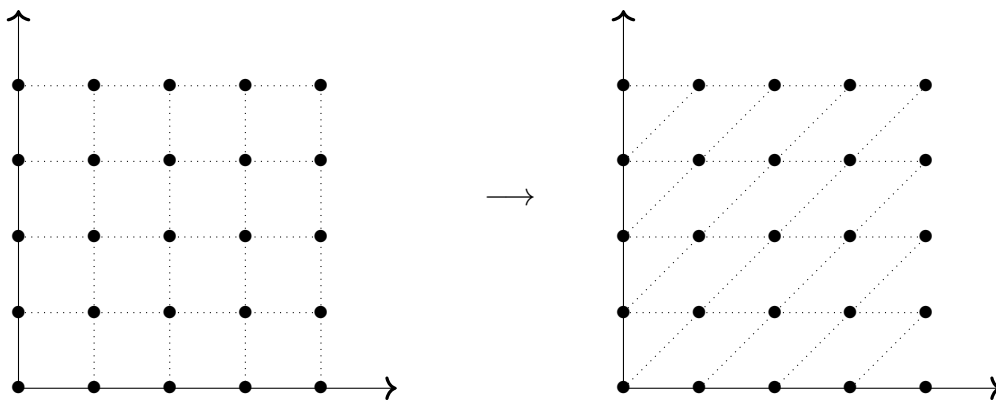
$$\sigma(g, aH) = (ga)H.$$

Cet action n'est pas fidèle. Si H est normal et $g \in H$, $g \cdot aH = aH$ pour tout $a \in G$.

Exemple A.21 Le groupe $GL(n, \mathbb{Z})$ agit sur \mathbb{Z}^n par multiplication matricielle. Par exemple, l'élément

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$$

transforme le réseau \mathbb{Z}^2 de la façon suivante.



Cet action est fidèle mais pas libre. La matrice que l'on a considéré fixe tous les vecteurs de la forme $(x, 0)$, pour $x \in \mathbb{Z}$, par exemple.

Remarquez que l'énoncé du théorème suivant ne semble pas simple, mais avec notre notation, sa démonstration devient triviale.

Théorème A.13 — Cayley. Tout group agit de façon fidèle sur un ensemble. C'est-à-dire, tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation.

Démonstration. Tout groupe agit sur lui-même de façon fidèle par multiplication. Donc G est toujours isomorphe à un sous-groupe de $\text{Aut}(G)$. \square

Définition A.18 Une action d'un groupe G dans un ensemble A est dite *transitive* si pour tout $a, b \in A$ il existe $g \in G$ tel que $g \cdot a = b$.

L'action de $GL(n, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{Z}^n n'est pas transitive parce que si $a = (2, 4, \dots, 2^n)$ et $b = (1, 1, \dots, 1)$, le théorème de Bachet-Bézout implique qu'il n'existe pas $g \in GL(n, \mathbb{Z})$ tel que $g \cdot a = b$. L'action de G dans lui-même par conjugaison n'est pas transitive non plus. Toutefois, l'action d'un groupe sur lui-même par multiplication et l'action de G sur G/H sont toujours transitives.

Exemple A.22 Le groupe S_n agit de façon naturelle sur $\{1, 2, \dots, n\}$ par permutation de ses éléments. C'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \rho : S_n \times \{1, \dots, n\} &\rightarrow \{1, \dots, n\} \\ (\sigma, m) &\mapsto \sigma(m) \end{aligned}$$

est une action de S_n sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Cette action est fidèle et transitive.

Définition A.19 L'orbite d'un élément $a \in A$ est définie par

$$O_G(a) := \{g \cdot a \in A \mid g \in G\}.$$

On voit que la relation \sim définie par $a \sim b$ si $a \in O_G(b)$ est une relation d'équivalence. En particulier, les orbites forment une partition de A .

L'action induite dans chaque orbite est toujours transitive. C'est-à-dire, si $x, y \in O_G(a)$, alors $x = g_1 \cdot a$ et $y = g_2 \cdot a$ pour $g_1, g_2 \in G$. On conclut que $(g_2 g_1^{-1}) \cdot x = y$. Par conséquent, pour comprendre toutes les actions, il suffit que l'on comprenne les actions transitives. Pour cela on va utiliser le concept suivante.

Définition A.20 Le sous-groupe stabilisateur d'un élément $a \in A$ est défini par

$$\text{Stab}_G(a) := \{g \in G \mid g \cdot a = a\}.$$

Une action est fidèle si et seulement si

$$\bigcap_{a \in A} \text{Stab}_G(a) = \{e_G\}.$$

Aussi, une action est libre si et seulement si $\text{Stab}_G(a) = \{e_G\}$ pour tout $a \in A$.

Proposition A.14 Soit $a \in A$ et $g \in G$. Alors,

$$\text{Stab}_G(g \cdot a) = g \text{Stab}_G(a) g^{-1}.$$

Démonstration. On a $h \in \text{Stab}_G(g \cdot a)$ si et seulement si

$$h \cdot (g \cdot a) = g \cdot a \iff (hg) \cdot a = g \cdot a \iff (g^{-1}hg) \cdot a = a,$$

qui est la définition de $g^{-1}hg \in \text{Stab}_G(a)$. Le résultat suit. \square

Exemple A.23 Quand G agit sur lui-même par multiplication à gauche le stabilisateur est toujours trivial

$$\text{Stab}_G(a) = \{g \in G \mid ga = a\} = \{e\}$$

et on a juste une orbite (puisque $O_G(e) = G$).

Exemple A.24 Quand G agit sur lui-même par conjugaison le stabilisateur est le centralisateur

$$\text{Stab}_G(a) = \{g \in G \mid gag^{-1} = a\} = \{g \in G \mid ga = ag\} = Z_G(a)$$

et l'orbite de a est la classe de conjugaison de a .

Exemple A.25 Quand G agit sur G/H par multiplication à gauche le stabilisateur est

$$\text{Stab}_G(aH) = \{g \in G \mid gaH = aH\} = \{g \in G \mid a^{-1}ga \in H\} = aHa^{-1}$$

et on a juste une orbite (puisque $gH \in O_G(H)$ pour tout $g \in G$).

On définit alors des isomorphismes entre actions. Cette notion nous aidera à tirer le résultat le plus important de cette section : la formule des classes.

Définition A.21 Étant donné un groupe G , deux actions $\sigma : G \times A \rightarrow A$ et $\sigma' : G \times A \rightarrow A$ sont isomorphes s'il existe une bijection $\varphi : A \rightarrow A$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \times A & \xrightarrow{\text{id}_G \times \varphi} & G \times A \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma' \\ A & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array}$$

commute. C'est-à-dire, telle que $g \cdot \varphi(a) = \varphi(g \cdot a)$ pour tout $g \in G$ et $a \in A$. On appellera les fonctions (pas nécessairement bijectives) qui satisfont cette propriété *équivariantes*.

On voit alors que toute action transitive est, en fait, « la même » que l'action de l'exemple A.20.

Théorème A.15 Soit G un groupe agissant transitivement sur A et $a \in A$. Alors cette action est isomorphe à multiplication à gauche dans $G/\text{Stab}_G(a)$.

Démonstration. Soit $H = \text{Stab}_G(a)$ et $\varphi : G/H \rightarrow A$ définie par

$$\varphi(gH) := g \cdot a.$$

D'abord, il faut montrer que φ est bien définie. Si $g_1H = g_2H$, alors $g_1^{-1}g_2 \in H$. C'est-à-dire, $(g_1^{-1}g_2) \cdot a = a$. Il suit que $g_1 \cdot a = g_2 \cdot a$. J'affirme donc que φ est un isomorphisme. L'équivariance est triviale :

$$\varphi(g_1(g_2H)) = \varphi((g_1g_2)H) = (g_1g_2) \cdot a = g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = g_1 \cdot \varphi(g_2H).$$

Pour montrer la bijectivité on observe que la fonction

$$\begin{aligned} \Psi : A &\rightarrow G/H \\ g \cdot a &\mapsto gH \end{aligned}$$

est bien définie (par le même raisonnement d'avant et par la transitivité) et est l'inverse de φ . □

Corollaire A.16 — Formule des classes. Soit G un groupe fini agissant en un ensemble A et $a \in A$. Alors, $O_G(a)$ est un ensemble fini et

$$|O_G(a)| |\text{Stab}_G(a)| = |G|.$$

Démonstration. Puisque l'action induite dans $O_G(a)$ est transitive, le théorème précédent nous donne une bijection entre $O_G(a)$ et $G/\text{Stab}_G(a)$. Le résultat suit. \square

- *En fait, cette même démonstration donne un résultat un peu plus fort : si $a \in A$ et $b \in O_G(a)$, on a $|O_G(a)| |\text{Stab}_G(b)| = |G|$. En particulier, les stabilisateurs de tous les éléments d'une orbite ont la même cardinalité.*

La formule des classes est une méthode efficace pour calculer le nombre d'éléments d'une orbite donnée. Par contre, le résultat que l'on verra ensuite nous permet de compter le nombre d'orbites d'une action. Ce résultat est généralement appelé « Lemme de Burnside », mais Cauchy le savait déjà environ 50 ans plus tôt.

Théorème A.17 — Lemme (qui n'est pas) de Burnside. Soit G un groupe fini agissant en un ensemble A . Alors le nombre d'orbites est

$$\frac{1}{|G|} \sum_g |A^g|,$$

où $A^g := \{a \in A \mid g \cdot a = a\}$ est l'ensemble de points de A fixés par g .

Démonstration. D'abord on compte le nombre d'éléments de $\{(g, a) \in G \times A \mid g \cdot a = a\}$ de deux manières différentes :

$$\sum_g |A^g| = \sum_g |\{a \in A \mid g \cdot a = a\}| = |\{(g, a) \in G \times A \mid g \cdot a = a\}| = \sum_a |\text{Stab}_G(a)|.$$

Ensuite, la formule des classes nous donne

$$\frac{1}{|G|} \sum_g |A^g| = \sum_a \frac{1}{|O_G(a)|}.$$

Pour calculer la somme de droite, on observe que dans une orbite O , chaque $a \in O$ contribue à la somme de $1/|O|$ et il y a $|O|$ de tels a . Il en résulte que chaque orbite contribue 1 à cette somme. Le résultat suit. \square

L'exemple suivant illustre une application du théorème A.17 pour des problèmes de comptage. Cet exemple est tiré du test AIME (American Invitational Mathematics Examination) de 1996.

Exemple A.26

Deux des carrés d'un damier 7×7 sont peints en jaune, et le reste est peint en vert. Deux colorations sont équivalentes si on peut obtenir une de l'autre en appliquant une rotation dans le plan du damier. Combien de colorations inéquivalentes sont possibles ?

Soit A l'ensemble des $\binom{49}{2}$ colorations possibles. Le groupe $G = Z/4Z = \{e, r, r^2, r^3\}$ agit sur A de façon naturelle : en faisant tourner le damier 90° . Le nombre de colorations inéquivalentes est le nombre de orbites de cette action. On calcule alors $|A^g|$ pour chaque $g \in G$.

- Pour $g = e$, $|A^g| = |A| = 1176$.
- Pour $g = r^2$, les points fixes apparaissent lorsque les deux carrés jaunes sont des réflexions sur le centre. Donc, $|A^g| = (49 - 1)/2 = 24$.
- Pour $g = r$ ou $g = r^3$ il n'y a pas des points fixes.

Le théorème A.17 implique qu'il existent

$$\frac{1176 + 24 + 0 + 0}{4} = 300$$

colorations inéquivalentes possibles.

RÉFÉRENCES

- [1] P. ALUFFI : *Algebra : chapter 0*, vol. 104. American Mathematical Soc., 2009.
- [2] G. M. BERGMAN : *An invitation to general algebra and universal constructions*. Springer, 2015.
- [3] A. I. BOBENKO : Introduction to compact Riemann surfaces. *In Computational Approach to Riemann Surfaces*, p. 3–64. Springer, 2011.
- [4] R. CAVALIERI et E. MILES : *Riemann surfaces and algebraic curves*, vol. 87. Cambridge University Press, 2016.
- [5] V. DELECROIX, P. HUBERT et S. LELIEVRE : Diffusion for the periodic wind-tree model. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 47(6):1085–1110, 2014.
- [6] P. EHRENFEST et T. EHRENFEST : Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, 2:10–13, 1912.
- [7] A. ESKIN et A. OKOUNKOV : Asymptotics of numbers of branched coverings of a torus and volumes of moduli spaces of holomorphic differentials. *Inventiones Mathematicae*, 145(1):59–103, 2001.
- [8] P. I. ETINGOF, O. GOLBERG, S. HENSEL, T. LIU, A. SCHWENDNER, D. VAINTROB et E. YUDOVINA : *Introduction to representation theory*, vol. 59. American Mathematical Soc., 2011.
- [9] W. FULTON et J. HARRIS : *Representation theory : a first course*, vol. 129. Springer Science & Business Media, 2013.
- [10] E. GIRONDO et G. GONZÁLEZ-DIEZ : *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*, vol. 79. Cambridge University Press, 2012.
- [11] C. GODBILLON : *Éléments de topologie algébrique*, vol. 155. Hermann Paris, 1971.
- [12] R. GURIÉRREZ : *Théorie combinatoire du cocycle de Kontsevich-Zorich*. Thèse de doctorat, Université Sorbonne Paris Cité, 2019.
- [13] J. HARDY et J. WEBER : Diffusion in a periodic wind-tree model. *Journal of Mathematical Physics*, 21(7):1802–1808, 1980.
- [14] A. HATCHER : *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [15] Y. IMAYOSHI et M. TANIGUCHI : *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] G. A. JONES et D. SINGERMAN : *Complex functions : an algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press, 1987.
- [17] S. KEROV : Polynomial functions on the set of young diagrams. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 319:121–126, 1994.
- [18] M. KONTSEVICH et A. ZORICH : Connected components of the moduli spaces of abelian differentials with prescribed singularities. *Inventiones mathematicae*, 153(3):631–678, 2003.

- [19] J. LEE : *Introduction to topological manifolds*, vol. 202. Springer Science & Business Media, 2010.
- [20] H. MASUR : Interval exchange transformations and measured foliations. *Annals of Mathematics*, 115(1):169–200, 1982.
- [21] R. MIRANDA : *Algebraic curves and Riemann surfaces*, vol. 5. American Mathematical Society, 1995.
- [22] A. OKOUNKOV et G. OLSHANSKI : Shifted schur functions. *Algebra i Analiz*, 9(2):73–146, 1997.
- [23] H. POINCARÉ : Analysis situs. *Journal de l'École Polytechnique*, 1895.
- [24] E. REYSSAT : Quelques aspects des surfaces de riemann. *Progress in mathematics Boston, Mass.*, 1989.
- [25] S. ROMAN : *Advanced linear algebra*, vol. 3. Springer, 2005.
- [26] C. M. S. SANTOS : *Dynamical aspects of Teichmüller theory : $SL(2, R)$ -action on moduli spaces of flat surfaces*, vol. 7. Springer, 2018.
- [27] C. M. S. SANTOS : Three lectures on square-tiled surfaces, 2018.
- [28] J.-P. SERRE : Représentation linéaire des groupes finis. *Hermann, Paris*, 1971.
- [29] B. STEINBERG : *Representation theory of finite groups : an introductory approach*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [30] T. TAO : Meromorphic functions on Riemann surfaces, and the Riemann-Roch theorem. <https://bit.ly/2pX0ysa>. Consulté le 01/04/2019.
- [31] W. A. VEECH : Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *Annals of Mathematics*, 115(1):201–242, 1982.
- [32] D. ZAGIER : Applications of the representation theory of finite groups. In S. K. LANDO et A. K. ZVONKIN, édés : *Graphs on Surfaces and Their Applications*, vol. 141. Springer Science & Business Media, 2013.
- [33] Y. ZHAO : Young tableaux and the representations of the symmetric group. *The Harvard College Mathematics Review*, p. 33–45, 2008.
- [34] A. ZORICH : Square tiled surfaces and teichmüller volumes of the moduli spaces of abelian differentials. In *Rigidity in dynamics and geometry*, p. 459–471. Springer, 2002.