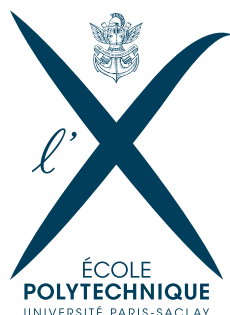




DE LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX AU THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

Tuteur : Benjamin SCHRAEN

Gabriel RIBEIRO



INTRODUCTION

PRÉSENTATION DU SUJET

Dans la continuité d'une étude des fondements de la théorie des schémas réalisée dans la période précédente sous la direction de Gaëtan Chenevier, ce projet (proposé et encadré par Benjamin Schraen) a consisté en l'approfondissement des concepts fondamentaux et la démonstration adélique du théorème de Riemann-Roch.

Cet enseignement d'approfondissement m'a permis d'avoir un premier contact avec plusieurs sujets qui feront partie intégrante de ma carrière. Ainsi, je pourrai approfondir beaucoup plus pendant mon stage, où je vais étudier le groupe fondamental d'un schéma et le théorème de Riemann-Roch du point de vue de la thèse de Tate, et ensuite pendant le M2, où je continuerai à étudier les bases de la géométrie algébrique et des domaines voisins.

En raison du grand nombre de sujets abordés, plusieurs démonstrations ont été omises. Nonobstant, toutes les définitions nécessaires ont été données dans leur intégralité afin de maintenir la cohérence logique (et didactique) du sujet. De plus, en ce qui concerne le théorème de Riemann-Roch, presque toutes les démonstrations ont été faites en détail.

REMERCIEMENTS

Je ne pourrais pas commencer ce texte sans remercier mon tuteur dans ce projet, Benjamin Schraen. Son dévouement et son attention ont été essentiels pour que je puisse apprendre un peu plus sur ce domaine profond et intéressant.

TABLE DES MATIÈRES

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Théorie des faisceaux | 1 |
| 1.1 | (Pré)faisceaux | 1 |
| 1.2 | Fibres et morphismes de préfaisceaux | 3 |
| 1.3 | Faisceautisation | 5 |
| 1.4 | \mathbf{Ab}_X est une catégorie abélienne | 7 |
| 1.5 | Espaces annelés et \mathcal{O}_X -modules | 9 |
| 1.6 | Faisceaux sur une base | 11 |
| 2 | Introduction à la théorie des schémas | 13 |
| 2.1 | $\text{Spec } A$ comme un ensemble | 13 |
| 2.2 | $\text{Spec } A$ comme un espace topologique | 15 |
| 2.3 | $\text{Spec } A$ comme un espace annelé | 17 |
| 2.4 | Schémas et ses morphismes | 19 |
| 2.5 | Le produit fibré et propriétés associés | 23 |
| 2.6 | Retour à la théorie des faisceaux | 25 |
| 2.7 | Diviseurs sur une courbe régulière | 26 |
| 2.8 | Différentielles de Kähler | 27 |
| 3 | Théorème de Riemann-Roch | 29 |
| 3.1 | Cohomologie des faisceaux | 29 |
| 3.2 | Le théorème | 33 |
| 3.3 | Preuve de la dualité de Serre | 35 |
| A | Préliminaires algébriques | 39 |
| A.1 | Localisation | 39 |
| A.2 | Nullstellensätze | 42 |
| | Références | 44 |

1

THÉORIE DES FAISCEAUX

Dans un avenir proche, on verra les éléments d'un anneau A comme fonctions sur son spectre. Pour cela, il faudra que l'on ait une notion naturelle de restriction de ses éléments dans un ouvert de son domaine. L'objet qui décrit ce type de construction s'appelle *faisceau* et a été introduit par Jean Leray alors qu'il était prisonnier de guerre en Autriche.

Considérons un espace topologique X . Pour chaque ouvert $U \subset X$, il y a l'anneau $C(U)$ des fonctions continues sur U à valeurs dans \mathbb{R} . Étant donné une fonction $f \in C(U)$, on peut restreint son domaine à un ouvert plus petit $V \subset U$ pour obtenir une nouvelle fonction $f|_V \in C(V)$. Enfin, si $W \subset V \subset U$ sont trois ouverts et $f \in C(U)$, évidemment $(f|_V)|_W$ est la même chose que $f|_W$. La compilation de toutes les anneaux $C(U)$ et de toutes les applications de restriction est précisément la donnée d'un préfaisceau.

1.1 (PRÉ)FAISCEAUX

Dans cette section, on formalisera l'idée d'un préfaisceau et on fera certaines constructions de base.

Définition 1.1 — Préfaisceau. Soit X un espace topologique et \mathbf{C} une catégorie concrète. Un *préfaisceau* \mathcal{F} sur X est la donnée de :

- Pour tout ouvert U de X , on objet $\mathcal{F}(U)$ de \mathbf{C} dont les éléments sont appelés des *sections* de \mathcal{F} sur U ;
- Pour toute inclusion d'ouverts $V \subset U$, un morphisme $\text{res}_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ appelé *morphisme de restriction*.

Ces morphismes doivent satisfaire :

- Le morphisme $\text{res}_{U,U}$ est l'identité de $\mathcal{F}(U)$. En d'autres termes, $\text{res}_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$;
- Si $W \subset V \subset U$ est une inclusion d'ouverts, alors $\text{res}_{U,W} = \text{res}_{V,W} \circ \text{res}_{U,V}$.

Une section de \mathcal{F} sur X est aussi appelé une *section globale*. On écrit également $\Gamma(U, \mathcal{F})$ pour l'ensemble des sections $\mathcal{F}(U)$.



Soit $\text{Ouv}(X)$ la catégorie dont les objets sont des ouverts de X et les morphismes sont les inclusions d'ouverts. Un préfaisceau \mathcal{F} sur X est alors précisément un foncteur contravariant $\text{Ouv}(X) \rightarrow \mathbf{C}$.

Comme on l'a dit précédemment, l'exemple type d'un préfaisceau est l'anneau des fonctions continues sur un ouvert d'un espace topologique à valeurs dans \mathbb{R} . Néanmoins, les

sections d'un préfaisceau ne sont pas forcément des fonctions définies sur un ouvert, comme le montre on voit ci-dessous.

■ **Exemple 1.1 — (Pré)faisceau des distributions.** Étant donné un ouvert U de \mathbb{R}^n , soit $\mathcal{D}'(U)$ l'espace vectoriel des distributions définies sur U . Dans ce cas, la restriction naturelle n'est pas donnée par une restriction du domaine des sections. L'application de restriction de \mathcal{D}' est l'application duale à l'extension des fonctions par zéro en dehors du domaine. ■

Un autre exemple similaire est le (pré)faisceau des formes différentielles dans une variété lisse.

Comme il y a habituellement une pléthore d'ouverts dans un espace topologique, il est très difficile de déterminer un préfaisceau. Pour cette raison, il est important que l'on puisse poursuivre notre étude avec des informations locales. C'est ce qui motive la définition ci-dessous.

Définition 1.2 — Faisceau. Un préfaisceau \mathcal{F} sur un espace topologique X est appelé *faisceau* lorsque pour tout ouvert $U \subset X$ et tout recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de U , il satisfait les deux axiomes suivants.

- (Axiome d'unicité) Si f_1, f_2 sont des sections de \mathcal{F} sur U telles que $\text{res}_{U, U_i} f_1 = \text{res}_{U, U_i} f_2$ pour tout i , alors $f_1 = f_2$;
- (Axiome de recollement) Étant donné une collection de sections $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ qui coïncident sur l'intersection de leurs domaines (i.e. $\text{res}_{U_i, U_i \cap U_j} f_i = \text{res}_{U_j, U_i \cap U_j} f_j$ pour tout i, j), alors il existe une section $f \in \mathcal{F}(U)$ telle que $\text{res}_{U, U_i} f = f_i$ pour tout i .



L'axiome d'unicité est équivalent au fait que la section obtenue par l'axiome de recollement est unique. C'est-à-dire qu'il y a une seule section $f \in \mathcal{F}(U)$ telle que $\text{res}_{U, U_i} f = f_i$ pour tout i .

Évidemment, tous les exemples de préfaisceaux que l'on a vus jusqu'ici sont en fait des faisceaux. L'exemple ci-dessous montre que le préfaisceau le plus simple qui peut être construit en général n'est pas un faisceau.

■ **Exemple 1.2 — Préfaisceau constant.** Soit X un espace topologique, et S un ensemble. Définissons $\mathcal{F}(U) = S$ pour tout ouvert non vide U et $\mathcal{F}(\emptyset) = \{*\}$, où $*$ est un élément quelconque. Il s'agit d'un préfaisceau avec l'identité comme application de restriction. Cependant, ce n'est presque toujours pas un faisceau, car il ne satisfait pas l'axiome de recollement. ■

Nonobstant, il y a une variante de cet exemple qui se comporte bien.

■ **Exemple 1.3 — Faisceau constant.** Maintenant, on dote S de la topologie discrète et on pose $\mathcal{F}(U)$ comme l'ensemble des applications continues $U \rightarrow S$. C'est ce que l'on appelle le *faisceau constant* associée à S . (Ne pas confondre avec le préfaisceau constant!) On note ce faisceau \underline{S} . ■

Définition 1.3 — Poussé-en-avant d'un (pré)faisceau. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques et \mathcal{F} un (pré)faisceau sur X . Alors on définit $\pi_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(\pi^{-1}(V))$ pour tout ouvert $V \subset Y$. C'est ce qu'on appelle le *poussé-en-avant* (ou *image directe*) de \mathcal{F} par π . On peut vérifier que $\pi_*\mathcal{F}$ est un préfaisceau et que c'est un faisceau si et seulement si \mathcal{F} l'est.

En voici sans doute l'exemple le plus important.

■ **Exemple 1.4 — Faisceau gratte-ciel.** Soit X un espace topologique, $p \in X$ et S un ensemble. Le *faisceau gratte-ciel* $i_{p,*}S$ est le poussé-en-avant du faisceau constant \underline{S} par le morphisme d'inclusion $i_p : \{p\} \hookrightarrow X$. Explicitement, pour tout ouvert $U \subset X$,

$$i_{p,*}S(U) = \begin{cases} S & \text{si } p \in U \\ \{e\} & \text{sinon} \end{cases},$$

où $\{e\}$ est un singleton. Dans une catégorie quelconque, $i_{p,*}S(U)$ pour $p \notin U$ doit être un objet final. ■

L'importance de ce faisceau réside dans la proposition ci-dessous, que l'on énonce sans preuve.

Proposition 1.1 Soit X un espace topologique et $p \in X$. Alors les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}_X & \rightarrow & \mathbf{Set} & \text{et} & \mathbf{Set} & \rightarrow & \mathbf{Set}_X \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}_p & & A & \mapsto & i_{p,*}A, \end{array}$$

où \mathcal{F}_p est la fibre de \mathcal{F} en p (définition 1.4), sont adjoints.

1.2 FIBRES ET MORPHISMES DE PRÉFAISCEAUX

Suite à notre motivation pour la définition des faisceaux, on aimerait utiliser des informations locales dans la mesure du possible. Ici, comme en géométrie différentielle, les *germes* nous permettront d'étudier des fonctions dans un voisinage d'un point.

Définition 1.4 — Fibres. Soit \mathcal{F} un préfaisceau sur un espace topologique X et $p \in X$. On définit la *fibre* de \mathcal{F} en p comme la limite inductive de tous les $\mathcal{F}(U)$ sur les ouverts U contenant p :

$$\mathcal{F}_p := \varinjlim \mathcal{F}(U).$$

Les éléments de \mathcal{F}_p sont appelés des *germes*. Si $p \in U$ et $f \in \mathcal{F}(U)$, l'image f_p de f dans \mathcal{F}_p est appelé le *germe de f en p* .

Plus concrètement, la définition catégorique de la limite inductive dit précisément que la

fibre \mathcal{F}_p est

$$\left(\coprod_{U \ni x} \mathcal{F}(U) \right) / \sim,$$

où $(f, U) \sim (g, V)$ ¹ s'il existe un ouvert $W \subset U \cap V$ contenant p tel que $\text{res}_{U,W} f = \text{res}_{V,W} g$.

Les germes illustrent très bien l'intérêt de considérer les faisceaux au lieu des préfaisceaux. Par exemple, les sections d'un faisceau sont déterminées par ses germes. C'est-à-dire que

$$(f_p = g_p \text{ pour tout } p) \implies f = g.$$

(C'est l'axiome d'unicité!) En d'autres termes, l'application naturelle

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$$

est injective. Les germes seront également très utiles pour comprendre les morphismes de (pré)faisceaux.

Définition 1.5 — Morphismes de (pré)faisceaux. Soit X un espace topologique et \mathcal{F}, \mathcal{G} des (pré)faisceaux sur X . Un morphisme $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est la donnée de morphismes $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ pour tout ouvert U tel que, pour toute inclusion d'ouverts $V \subset U$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \text{res}_{U,V} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

commute. Si \mathbf{C} est une catégorie concrète, on notera \mathbf{C}_X la catégorie des faisceaux de \mathbf{C} sur X . (Par exemple, \mathbf{Ab}_X est la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X .)



En interprétant les préfaisceaux comme des foncteurs contravariants, les morphismes de préfaisceaux ne sont rien d'autre que des transformations naturelles.

Un morphisme $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ entre faisceaux induit une application naturelle entre les fibres donnée par

$$\begin{aligned} \varphi_p : \mathcal{F}_p &\rightarrow \mathcal{G}_p \\ (f, U) &\mapsto (\varphi_U(f), U). \end{aligned}$$

La commutativité du diagramme montre que cette application est bien définie.

Naturellement, on aimerait dire que $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est injective / surjective si φ_U l'est pour tout ouvert U . Il s'avère que cette notion est un peu plus subtile que prévu et est plus claire au niveau des fibres, comme montre la proposition suivante.

1. Ici on commet un léger abus de notation en désignant $(f, \mathcal{F}(U))$ simplement pour (f, U) . Mais c'est la notation habituelle.

Proposition 1.2 Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur un espace topologique X . Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (a) φ est un monomorphisme dans la catégorie des faisceaux;
- (b) $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ est injective pour tout $p \in X$;
- (c) $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est injective pour tout ouvert $U \subset X$.

De plus, les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (a) φ est un épimorphisme dans la catégorie des faisceaux;
- (b) $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ est surjective pour tout $p \in X$.

Malheureusement, il existe des morphismes φ surjectifs au niveau des fibres (c'est-à-dire que φ_p est surjective pour tout $p \in X$) dont les images φ_U ne sont pas surjectives. Par exemple, soit $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec la topologie habituelle et soit $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ le faisceau de fonctions complexes continues qui ne s'annulent pas. Enfin, posons comme φ l'application $f \mapsto f^2$.

1.3 FAISCEAUTISATION

Étant donné un faisceau de groupes abéliens (ou toute autre catégorie abélienne), on aimerait avoir accès aux constructions habituelles de somme directe, produit tensoriel, quotients, etc. Parfois, ces constructions se comportent comme on le souhaite. Par exemple, si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des préfaisceaux de groupes abéliens, on définit $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ par

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) := \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U) \quad \text{pour tout ouvert } U.$$

C'est toujours un préfaisceau et c'est un faisceau si \mathcal{F} et \mathcal{G} le sont. Par contre, le produit tensoriel ne se comporte pas si bien; le préfaisceau défini par $\mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{G}(U)$ peut ne pas être un faisceau même si \mathcal{F} et \mathcal{G} le sont. C'est pourquoi on a besoin d'une méthode systématique de construction de faisceaux à partir des préfaisceaux.

Définition 1.6 — Faisceautisation. Soit \mathcal{F} un préfaisceau sur un espace topologique X . La *faisceautisation* de \mathcal{F} est initiale parmi les morphismes $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ où \mathcal{G} est un faisceau. (C'est-à-dire qu'il est l'objet initial dans la catégorie $\mathcal{F} \downarrow \mathbf{C}_X$.) En d'autres termes, la faisceautisation de \mathcal{F} est un morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$ tel que pour tout faisceau \mathcal{G} et pour tout morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, il existe un unique morphisme $\widetilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{F}} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

commute.

Bien sûr, si elle existe, la faisceautisation est unique à isomorphisme unique près. En outre, si \mathcal{F} est un faisceau, sa faisceautisation est tout simplement $\text{id} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Dorénavant, on dira que la faisceautisation est autant le morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$ que le faisceau $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Avant de construire la faisceautisation, comprenons quels sont les problèmes qui font qu'un préfaisceau ne soit pas un faisceau. Tout d'abord, un préfaisceau peut ne pas satisfaire l'axiome de recollement. En d'autres termes, il peut avoir des sections locales qui ne proviennent pas d'une section globale.

■ **Exemple 1.5** Soit S^1 le cercle unitaire et $p, q \in S^1$ deux points distincts. Considérons le préfaisceau de fonctions continues sur S^1 qui ont la même image à p et q . Si V est un voisinage de p ne rencontrant pas q , les sections sur V sont simplement les fonctions continues définies sur V . Cela nous permet d'avoir deux sections f et g , définies respectivement sur voisinages de p et q , telles que $f(p) \neq g(q)$. Pour cette raison, ces sections ne proviennent pas d'une section globale. ■

Dans ce premier cas, la faisceautisation ajoute simplement les sections manquantes (la faisceautisation du préfaisceau de l'exemple 1.5 est simplement le faisceau des fonctions continues). La deuxième possibilité est que le préfaisceau ne satisfait pas l'axiome d'unicité. C'est-à-dire qu'il y a des sections distinctes qui sont localement égales. Ici, ce que fait la faisceautisation est de supprimer les sections non nécessaires. Ce deuxième cas est plus rare mais existe.

Faisons la construction alors! Pour cela, on rappelle que l'application naturelle

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$$

est injective précisément lorsque le préfaisceau \mathcal{F} satisfait l'axiome d'unicité. En d'autres termes, l'image de cette application a les mêmes sections que $\mathcal{F}(U)$ à l'exception des sections superflues que la faisceautisation veut supprimer.

Soit $\widetilde{\mathcal{F}}(U)$ l'image de cette application. Comme on a vu, $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un préfaisceau qui satisfait l'axiome de l'unicité (un tel préfaisceau est parfois appelé *séparé* dans la littérature). Enfin, $\widetilde{\mathcal{F}}$ satisfait aussi l'axiome de recollement, ce qui en fait un faisceau. En fait, si $U = U_1 \cup U_2$ et

$$f_1 = (f_{1,p})_{p \in U_1} \in \widetilde{\mathcal{F}}(U_1), \quad f_2 = (f_{2,p})_{p \in U_2} \in \widetilde{\mathcal{F}}(U_2)$$

coïncident sur $U_1 \cap U_2$, alors $f_{1,p} = f_{2,p}$ pour tout $p \in U_1 \cap U_2$. On en déduit que l'on peut concaténer f_1 et f_2 pour obtenir une section sur U . Cette même procédure fonctionne avec un recouvrement ouvert arbitraire.

On obtient ainsi un faisceau $\widetilde{\mathcal{F}}$ et un morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$. En fait, ce morphisme satisfait la propriété universelle de la faisceautisation.

Proposition 1.3 Si \mathcal{F} est un préfaisceau sur un espace topologique X , alors il existe une faisceautisation de \mathcal{F} .

Démonstration. Soit \mathcal{G} un faisceau et $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme donné. Comme on a le morphisme induit $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$, on considère, pour tout ouvert U , le morphisme

$$\prod_{p \in U} \mathcal{F}_p \rightarrow \prod_{p \in U} \mathcal{G}_p.$$

En restreignant ce morphisme à $\widetilde{\mathcal{F}}(U)$, on obtient un morphisme des faisceaux $\widetilde{\mathcal{F}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$. Finalement, si $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ est le morphisme de la faisceautisation, on a déjà vu que φ_U est bijectif pour tout U . On obtient ainsi un morphisme de faisceaux $\widetilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$. En composant on trouve le morphisme $\widetilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{G}$ désiré. \square

Un simple calcul montre ensuite le résultat utile ci-dessous.

Corollaire 1.4 Le morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$ induit un isomorphisme $\mathcal{F}_p \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{F}}_p$ entre les fibres.

1.4 \mathbf{Ab}_X EST UNE CATÉGORIE ABÉLIENNE

Les (pré)faisceaux des groupes abéliens ont la structure nécessaire pour l'utilisation des outils d'algèbre homologique dans leur étude : la structure de catégorie abélienne. Cela signifie, notamment, qu'il existe une notion naturelle d'addition dans l'ensemble de morphismes de (pré)faisceaux de groupes abéliens. Cette addition est donnée par $(\varphi + \psi)_U := \varphi_U + \psi_U$. Comme on peut le voir, le morphisme $\varphi + \psi$ ainsi défini est en fait un morphisme de (pré)faisceaux. Dans cette section, on fera les constructions habituelles de la catégorie des modules dans ce contexte.

Définition 1.7 — Sous-(pré)faisceaux et noyaux. Soit \mathcal{F} un (pré)faisceau de groupes abéliens. Un sous-(pré)faisceau de \mathcal{F} est un (pré)faisceau \mathcal{F}' tel que pour tout ouvert U , $\mathcal{F}'(U)$ est un sous-groupe de $\mathcal{F}(U)$ et tel que, pour tout inclusion d'ouverts $V \subset U$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}'(U) & \hookrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \text{res}_{U,V} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{U,V} \\ \mathcal{F}'(V) & \hookrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

commute. Si $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de (pré)faisceaux, le noyau de φ est le (pré)faisceau de groupes abéliens donné par $(\ker \varphi)(U) := \ker \varphi_U$. Le noyau est un sous-(pré)faisceau de \mathcal{F} .

Il y a deux choses à vérifier dans cette définition : que $\ker \varphi$ est en fait un préfaisceau et que c'est un faisceau si \mathcal{F} et \mathcal{G} le sont. On fera le premier point en montrant l'existence et l'unicité du morphisme pointillé faisant commuter le diagramme ci-dessous. Le deuxième point est facilement vérifié par la définition des faisceaux.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker \varphi_V & \hookrightarrow & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V) \\
& & \downarrow \text{dotted} & & \downarrow \text{res}_{V,U} & & \downarrow \text{res}_{V,U} \\
0 & \longrightarrow & \ker \varphi_U & \hookrightarrow & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U)
\end{array}$$

On définit l'image d'un élément de $\ker \varphi_V$ en prenant son image réciproque dans $\mathcal{F}(U)$, ce qui est unique par injectivité de $\ker \varphi_U \rightarrow \mathcal{F}(U)$. C'est bien défini car si $g \in \ker \varphi_V$ on suit le diagramme de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
g & \longmapsto & g & \xrightarrow{\varphi_V} & 0 \\
& & & & \downarrow \text{res}_{V,U} \\
& & & & 0.
\end{array}$$

Alors, tout élément s de l'image de

$$\begin{array}{ccc}
\ker \varphi_V & \hookrightarrow & \mathcal{F}(V) \\
& & \downarrow \text{res}_{V,U} \\
& & \mathcal{F}(U)
\end{array}$$

satisfait $\varphi_U(s) = 0$ et donc est dans l'image de $\ker \varphi_U \rightarrow \mathcal{F}(U)$.

Grâce à cette définition, on peut ajouter un élément supplémentaire à la proposition 1.2 : un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un monomorphisme dans la catégorie des faisceaux si et seulement si $\ker \varphi = 0$. Dans ce cas on dit que φ est *injectif*.

On définit ensuite les faisceaux image, conoyau et quotient. Contrairement à ce qui se passait auparavant, les définitions « évidentes » ne génèrent pas de faisceaux et donc il faut « faisceautiser ».

Définition 1.8 — Images, conoyaux et quotients. Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux. L'*image* de φ , dénotée $\text{im } \varphi$, est la faisceautisation du préfaisceau $U \mapsto \text{im } \varphi_U$. Par la propriété universelle de la faisceautisation, il existe un morphisme naturel $\text{im } \varphi \rightarrow \mathcal{G}$, dont on peut vérifier l'injectivité. Ainsi, $\text{im } \varphi$ peut être identifié à un sous-faisceau de \mathcal{G} .

Pareillement, le *conoyau* de φ , dénoté $\text{coker } \varphi$, est la faisceautisation du préfaisceau $U \mapsto \text{coker } \varphi_U$. Si \mathcal{F}' est un sous-faisceau de \mathcal{F} , le *faisceau quotient* $\mathcal{F} / \mathcal{F}'$ est la faisceautisation du préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) / \mathcal{F}'(U)$. On peut vérifier que pour tout point p , on a l'égalité de fibres $(\mathcal{F} / \mathcal{F}')_p = \mathcal{F}_p / \mathcal{F}'_p$.

Tout comme on l'a observé à propos des morphismes injectifs, un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un épimorphisme dans la catégorie des faisceaux si et seulement si $\text{im } \varphi = \mathcal{G}$. Dans ce cas on dit que φ est *surjectif*. Enfin, on dit qu'une suite de faisceaux

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \dots$$

est exacte si $\ker \varphi_i = \text{im } \varphi_{i-1}$ pour tout i .

Les autres constructions de la théorie des modules se traduisent pour la catégorie des faisceaux de manière similaire.

Définition 1.9 — Sommes directes, produits tensoriels et faisceau Hom. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux faisceaux. La somme directe $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ est le faisceau donné par $U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ et le faisceau Hom, denoté par $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, est le faisceau donné par $U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$. Enfin, le produit tensoriel $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ est la faisceautisation de $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{G}(U)$.



Une source de confusion fréquente est la croyance que le faisceau Hom est défini par $U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$. Cela ne génère même pas un préfaisceau car il n'y a pas de notion naturelle de restriction. Un deuxième point important est que pour qu'une somme directe infinie de faisceaux soit un faisceau, il est nécessaire de faisceautiser.

1.5 ESPACES ANNELÉS ET \mathcal{O}_X -MODULES

Les faisceaux les plus importants avec lesquels on travaillera sont les faisceaux d'anneaux, lesquels ont une terminologie un peu particulière.

Définition 1.10 — Espaces Annelés. Un espace annelé est une paire (X, \mathcal{O}_X) , où X est un espace topologique et \mathcal{O}_X est un faisceau d'anneaux sur X . On appelle \mathcal{O}_X le faisceau structural du espace annelé et, si U est un ouvert de X , les éléments de $\mathcal{O}_X(U)$ sont généralement appelés fonctions sur U .

Un morphisme $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ d'espaces annelés est la donnée d'une application continue $f : X \rightarrow Y$ et d'un morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$.

En géométrie algébrique, on étudie des schémas, qui sont définis comme des espaces annelés localement isomorphes au spectre d'un anneau (avec une topologie et un faisceau d'anneaux qui seront définis ultérieurement). Ces objets ont la propriété que pour tout $p \in X$, la fibre $\mathcal{O}_{X,p} := (\mathcal{O}_X)_p$ est un anneau local. C'est ce qui motive la définition ci-dessous.

Définition 1.11 — Espaces Localement Annelés. Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé. On dit qu'il s'agit d'un espace localement annelé si pour tout $p \in X$, la fibre $\mathcal{O}_{X,p}$ est un anneau local. Dans ce cas on dit que $\mathcal{O}_{X,p}$ est l'anneau local de X en p et on dénote son (unique) idéal maximal $\mathfrak{m}_{X,p}$ où même \mathfrak{m}_p . En outre, le corps résiduel de X en p est le corps $\kappa(p) := \mathcal{O}_{X,p} / \mathfrak{m}_{X,p}$.

Un morphisme d'espaces localement annelés est un morphisme $(f, f^\#)$ d'espaces annelés tel que, pour tout $p \in X$, $f_p^\#(\mathfrak{m}_{Y, f(p)}) \subset \mathfrak{m}_{X,p}$, où $f_p^\# : \mathcal{O}_{Y, f(p)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ envoie (U, s) vers $(f^{-1}(U), f_U^\#(s))$.

Étant donné un morphisme d'anneaux $A \rightarrow B$, il y a un morphisme naturel de spectres $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$. Même s'il n'y a pas de façon naturelle d'associer un morphisme d'anneaux

à un morphisme de spectres, tout morphisme d'espaces annelés $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est induit par un morphisme d'anneaux $A \rightarrow B$. (Voir la proposition 2.3 dans [7].) Cela donne une deuxième justification à la définition ci-dessus.

En analogie aux modules sur un anneau, on utilisera constamment la notion de \mathcal{O}_X -module.

Définition 1.12 — \mathcal{O}_X -modules. Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé. Un \mathcal{O}_X -module est un faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} avec la structure supplémentaire suivante. Pour chaque ouvert U , $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$ -module. En outre, si $U \subset V$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \\ \text{res}_{V,U} \times \text{res}_{V,U} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{V,U} \\ \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

commute.

Un morphisme de \mathcal{O}_X -modules $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux tel que pour tout ouvert $U \subset X$, l'application $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est un morphisme de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules.

Tout comme un groupe abélien est la même chose qu'un \mathbb{Z} -module, un faisceau de groupes abéliens n'est rien d'autre qu'un $\underline{\mathbb{Z}}$ -module, où $\underline{\mathbb{Z}}$ est le faisceau constant associé à \mathbb{Z} .

Comme on peut s'y attendre, la catégorie des \mathcal{O}_X -modules est abélienne et toutes les constructions de la section 1.4 fonctionnent dans ce contexte. On voit alors quelques définitions spécifiques aux \mathcal{O}_X -modules.

Définition 1.13 — \mathcal{O}_X -modules libres. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. On dit que \mathcal{F} est *libre* s'il est isomorphe à $\mathcal{O}_X^{\oplus I}$ pour un ensemble d'indices I . Il est *localement libre* si X admet un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ tel que, pour tout i , $\mathcal{F}|_{U_i}$ est un $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ -module libre. Dans ce cas, on dit que le *rang* de \mathcal{F} en un tel ouvert est la cardinalité de l'ensemble d'indices. (Si X est connexe, le rang ne dépend pas de l'ouvert.)

Un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1 est aussi appelé *faisceau inversible*.

Définition 1.14 — Dual d'un \mathcal{O}_X -module. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Le *dual* de \mathcal{F} est le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$.

La proposition ci-dessous justifie la nomenclature des faisceaux inversibles.

Proposition 1.5 Si \mathcal{L} et \mathcal{M} sont des faisceaux inversibles sur un espace annelé X , alors $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ l'est aussi. Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur X , alors il existe un faisceau inversible \mathcal{L}^{-1} tel que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{O}_X$.

Démonstration. La première affirmation suit du fait que \mathcal{L} et \mathcal{M} sont localement libres de rang 1 et que $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X$. L'autre affirmation suit avec $\mathcal{L}^{-1} := \mathcal{L}^\vee$ par les formules

usuelles de la théorie des modules :

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\vee \cong \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = \mathcal{O}_X.$$

(Pour vérifier que $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G}$ vaut dans le cadre des \mathcal{O}_X -modules, on peut utiliser le morphisme naturel et montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme dans les fibres.) \square

Ainsi, l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur un espace annelé X a une multiplication naturelle (donnée par le produit tensoriel), ce qui lui donne une structure de groupe. On l'appelle le *groupe de Picard* et on le dénote $\text{Pic}(X)$.

1.6 FAISCEAUX SUR UNE BASE

En de nombreuses occasions, on n'aura pas le luxe de pouvoir définir un faisceau sur tous les ouverts d'une topologie. Heureusement, la construction que l'on vient de faire nous permet de récupérer toutes les données d'un faisceau en ne connaissant que ses valeurs sur une base de la topologie. C'est ce qui motive la définition ci-dessous.

Définition 1.15 — Faisceaux sur une base. Soit X un espace topologique, \mathcal{B} une base de X et \mathbf{C} une catégorie concrète. Un *préfaisceau* \mathcal{F} sur \mathcal{B} est la donnée de :

- Pour tout ouvert $B \in \mathcal{B}$, on objet $\mathcal{F}(B)$ de \mathbf{C} ;
- Pour toute inclusion d'ouverts de la base $B_i \subset B_j$, un morphisme de restriction $\text{res}_{B_j, B_i} : \mathcal{F}(B_j) \rightarrow \mathcal{F}(B_i)$.

Ces morphismes doivent satisfaire :

- Le morphisme $\text{res}_{B, B}$ est l'identité de $\mathcal{F}(B)$. En d'autres termes, $\text{res}_{B, B} = \text{id}_{\mathcal{F}(B)}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$;
- Si $B_i \subset B_j \subset B_k$ est une inclusion d'ouverts de \mathcal{B} , alors $\text{res}_{B_k, B_i} = \text{res}_{B_j, B_i} \circ \text{res}_{B_k, B_j}$.

Enfin, \mathcal{F} doit satisfaire les axiomes d'un faisceau. Si $B = \bigcup_i B_i$ est un recouvrement de $B \in \mathcal{B}$ par des ouverts de la base, alors :

- (Axiome d'unicité) Si f_1, f_2 sont des sections de \mathcal{F} sur B telles que $\text{res}_{B, B_i} f_1 = \text{res}_{B, B_i} f_2$ pour tout i , alors $f_1 = f_2$;
- (Axiome de recollement) Étant donné une collection de sections $f_i \in \mathcal{F}(B_i)$ qui coïncident sur l'intersection de leurs domaines (i.e. $\text{res}_{B_i, B_k} f_i = \text{res}_{B_j, B_k} f_j$ pour tout i, j et tout $B_k \subset B_i \cap B_j$), alors il existe une section $f \in \mathcal{F}(B)$ telle que $\text{res}_{B, B_i} f = f_i$ pour tout i .

Évidemment, tout faisceau est un faisceau sur une base. Le point important est que si l'on connaît un faisceau sur les éléments d'une base, alors on le connaît sur tous les ouverts.

Pourquoi? Eh bien, comme on l'a vu précédemment, si \mathcal{F} est un faisceau, alors on a un isomorphisme entre $\mathcal{F}(U)$ et

$$\widetilde{\mathcal{F}}(U) = \left\{ (f_p) \in \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p \mid \begin{array}{l} \text{pour tout } x \in U, \text{ il existe un voisinage } V \subset U \\ \text{de } x \text{ et } s \in \mathcal{F}(V) \text{ tel que } s_q = f_q \text{ pour tout } q \in V \end{array} \right\}.$$

Puisque les données sur la base sont suffisantes pour déterminer $\widetilde{\mathcal{F}}(U)$, on détermine aussi $\mathcal{F}(U)$. En utilisant cette idée, on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.6 Soit \mathcal{B} une base sur X et F un faisceau sur cette base. Alors il existe un faisceau \mathcal{F} prolongeant F (avec des isomorphismes $\mathcal{F}(B) \cong F(B)$ commutant avec les morphismes de restriction). Ce faisceau est unique à isomorphisme unique près.

Démonstration. D'abord, on définit la fibre de F en $p \in X$ par

$$F_p = \varinjlim F(B),$$

où la limite inductive est sur tous les ouverts $B \in \mathcal{B}$ contenant p . On définit alors \mathcal{F} de la même façon qu'avant :

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ (f_p) \in \prod_{p \in U} F_p \mid \begin{array}{l} \text{pour tout } x \in U, \text{ il existe } B \in \mathcal{B} \text{ tel que } x \in B \subset U \\ \text{et } s \in F(B) \text{ tel que } s_q = f_q \text{ pour tout } q \in B \end{array} \right\}.$$

C'est un faisceau pour les mêmes raisons que la faisceautisation l'est. Le morphisme $F(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ est injectif par l'axiome d'unicité et surjectif par l'axiome de recollement et la définition de $\mathcal{F}(U)$. Finalement, si \mathcal{F}' est un autre faisceau prolongeant F alors $\mathcal{F}'(B) \cong F(B) \cong \mathcal{F}(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$ et donc $\mathcal{F}' \cong \mathcal{F}$ puisque les données sur une base définissent le faisceau. \square

2

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES SCHÉMAS

En géométrie algébrique classique, l'objet canonique d'étude est la *variété algébrique*, définie comme étant localement l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales en plusieurs variables. Dans la géométrie algébrique moderne, les *schémas* prennent la place des variétés algébriques, étant localement basés sur $\text{Spec } A$, le spectre (premier) d'un anneau commutatif A . Dans ce chapitre, on étudiera cet objet en détail.

2.1 $\text{Spec } A$ COMME UN ENSEMBLE

Dans ce chapitre, A sera toujours un anneau unitaire commutatif. Commençons par la définition de $\text{Spec } A$.

Définition 2.1 — Spectre d'un anneau. Le *spectre* d'un anneau A est l'ensemble $\text{Spec } A$ de ses idéaux premiers.

Pour éviter toute confusion, on notera les idéaux premiers de A par \mathfrak{p} et les éléments de $\text{Spec } A$ par $[\mathfrak{p}]$. Désormais, on commence à voir les éléments de A comme des fonctions sur $\text{Spec } A$. On dira alors que l'image d'une fonction $f \in A$ au point $[\mathfrak{p}] \in \text{Spec } A$ est $f \pmod{\mathfrak{p}} \in A/\mathfrak{p}$.



Ces fonctions ne se comportent pas de la même manière que les fonctions traditionnelles. Par exemple, les fonctions d'un anneau prennent ses images dans différents anneaux. De plus, il est possible qu'une fonction non nulle n'ait que 0 comme image.

Calculons alors les spectres de quelques anneaux importants!

- **Exemple 2.1 — $\text{Spec } \mathbb{Z}$.** Puisque \mathbb{Z} est principal, tout idéal premier non nul est la forme (p) pour un nombre premier p . D'où $\text{Spec } \mathbb{Z} = \{[(0)]\} \cup \{[(p)] \mid p \text{ premier}\}$. ■
- **Exemple 2.2 — $\text{Spec } \mathbb{C}[x]$.** Puisque $\mathbb{C}[x]$ est intègre, $[(0)] \in \text{Spec } \mathbb{C}[x]$. Soit $c \in \mathbb{C}$. Le morphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x] &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(c) \end{aligned}$$

est surjectif et induit un isomorphisme $\mathbb{C}[x]/(x - c) \cong \mathbb{C}$, ce qui implique que $(x - c)$ est un idéal premier de $\mathbb{C}[x]$. J'affirme que ce sont tous les éléments de $\text{Spec } \mathbb{C}[x]$.

En fait, soit \mathfrak{p} un idéal premier non nul et $f \in \mathfrak{p}$ un élément non nul de degré plus petit. Le polynôme f n'est pas constant (sinon \mathfrak{p} serait $\mathbb{C}[x]$ tout entier). Si f n'est pas de degré 1, on écrit $f = gh$, où ni g ni h sont constants. Comme \mathfrak{p} est premier, on a que $g \in \mathfrak{p}$ ou $h \in \mathfrak{p}$, ce qui est absurde. On conclut qu'il y a un polynôme de la forme $x - c$ dans \mathfrak{p} .

Alors, si f est un élément quelconque de \mathfrak{p} , la division euclidienne donne

$$f(x) = g(x)(x - c) + m,$$

où $m \in \mathbb{C}$. On en déduit que $m = f(x) - g(x)(x - c) \in \mathfrak{p}$, ce qui implique $m = 0$. D'où $\mathfrak{p} = (x - c)$. ■

La même conclusion vaut pour $\text{Spec } k[x]$, où k est un corps commutatif algébriquement clos. Comme on attendait par le Nullstellensatz, il y a une bijection entre les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[x]$ et les points de \mathbb{C} . Bien que l'on ne définira pas formellement cette notion, il est intéressant de voir les idéaux de la forme $(x - c)$ comme étant de dimension 0 et l'idéal (0) comme étant de dimension 1.

Observons que la valeur de $f \in \mathbb{C}[x]$ au point $[(x - c)] \in \text{Spec } \mathbb{C}[x]$ est tout simplement $f(c)$. Cela motive notre vision des éléments d'un anneau en tant que fonctions.

■ **Exemple 2.3** — $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$. Comme auparavant, il y a quelques idéaux premiers évidents :

- (0) est premier car $\mathbb{C}[x, y]$ est intègre ;
- $(x - a, y - b)$, pour $a, b \in \mathbb{C}$, est maximal (donc premier) ;
- (f) , pour $f \in \mathbb{C}[x, y]$ irréductible, est premier car $\mathbb{C}[x, y]$ est factoriel.

Ce sont tous les éléments de $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$. En fait, soit \mathfrak{p} un idéal premier qui n'est pas principal. (On veut montrer que $\mathfrak{p} = (x - a, y - b)$ pour $a, b \in \mathbb{C}$.) Comme \mathfrak{p} n'est pas principal, il existent deux polynômes $f, g \in \mathfrak{p}$ sans facteurs communs.²

Par le lemme de Gauss, ces polynômes restent premiers entre eux dans $\mathbb{C}(x)[y]$. En utilisant l'algorithme de la division dans $\mathbb{C}(x)[y]$ (qui est euclidien), on voit qu'il y a $p, q \in \mathbb{C}(x)[y]$ tels que $pf + qg = 1$. On peut alors multiplier par un polynôme $h \in \mathbb{C}[x]$ pour obtenir l'égalité

$$p(x, y)f(x, y) + q(x, y)g(x, y) = h(x)$$

dans $\mathbb{C}[x, y]$. On en déduit que $h \in (f, g) \subset \mathfrak{p}$. Comme $h \in \mathbb{C}[x]$ et \mathbb{C} est algébriquement clos, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $(x - a) \in \mathfrak{p}$. Pareillement, il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $(y - b) \in \mathfrak{p}$. Enfin, $\mathfrak{p} = (x - a, y - b)$ par maximalité de $(x - a, y - b)$. ■

C'est encore utile de voir les idéaux de la forme $(x - a, y - b)$ comme étant de dimension 0, les idéaux de la forme (f) comme étant de dimension 1 et l'idéal nul comme étant de dimension 2. C'est le début de notre effort pour comprendre les objets algébriques en termes géométriques.

2. Bien sûr, \mathfrak{p} contient au moins un polynôme irréductible f . Si g est un autre polynôme dans \mathfrak{p} , soit $f|g$ ou f, g n'ont pas de facteurs communs. Si $f|g$ pour tout $g \in \mathfrak{p}$, \mathfrak{p} est principal. On obtient ainsi deux polynômes sans facteurs communs.

À cet état, il peut sembler difficile de calculer $\text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ si k n'est pas algébriquement clos. En fait, cela ne pose pas de problème à cause de l'existence d'une bijection

$$\text{Spec } k[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\sim} \text{Spec } K[x_1, \dots, x_n] / \text{Gal}(K/k)$$

si K/k est galoisienne. Cette bijection est même un isomorphisme des espaces annelés (et donc un homéomorphisme). Dans la suite du texte, on ne travaillera donc qu'avec des corps algébriquement clos.

2.2 Spec A COMME UN ESPACE TOPOLOGIQUE

Dans cette section, on définira la *topologie de Zariski* en $\text{Spec } A$. Cette topologie est motivée par le désir de faire en sorte que les éléments de A se comportent autant que possible comme des fonctions continues. En d'autres termes, on voudrait que les parties ci-dessous de $\text{Spec } A$ soient fermés.

Définition 2.2 Soit S une partie de A . On définit $V(S)$ comme étant

$$\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid S \subset \mathfrak{p}\} = \{x \in \text{Spec } A \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } f \in S\}.$$

Selon notre interprétation des éléments de A comme fonctions, $V(S)$ est précisément l'ensemble des points qui annulent tous les fonctions de S .

Définissons ensuite que ce sont les seuls ensembles fermés. Pour voir qu'il s'agit en fait d'une topologie, on observe que si (S) est l'idéal engendré par S , alors $V(S) = V((S))$. On se concentre donc sur les idéaux de A . Aussi, on a que

- $\text{Spec } A = V(\{0\})$;
- $\emptyset = V(A)$;
- $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$;
- $\bigcap_i V(I_i) = V\left(\sum_i I_i\right)$.

C'est-à-dire que $\text{Spec } A$ et \emptyset sont fermés, la réunion de deux fermés est un fermé et l'intersection d'une famille de fermés est aussi un fermé.

Définition 2.3 — Topologie de Zariski. La *topologie de Zariski* sur $\text{Spec } A$ est la topologie qui a les parties de forme $V(S)$, pour $S \subset A$, comme fermés.

Doté de cette topologie, le spectre d'un anneau n'est presque jamais séparé, ce qui rend cette topologie assez particulière. On la comprendra un peu mieux en voyant quelques exemples.

■ **Exemple 2.4** — $\text{Spec } \mathbb{Z}$ et $\text{Spec } \mathbb{C}[x]$. Dans les deux cas, la topologie de Zariski est presque la topologie cofinie; les ouverts sont l'ensemble vide et l'espace tout entier moins un nombre

fini d'idéaux maximaux. (Le point $[(0)]$ n'est pas fermé! En fait, on peut vérifier que $[\mathfrak{p}]$ est fermé si et seulement si \mathfrak{p} est maximal.)

Oubliant $[(0)]$ en $\text{Spec } \mathbb{C}[x]$ on voit que la topologie de Zariski est plus grossière que la topologie classique sur \mathbb{C} ; ses ouverts sont beaucoup trop grands. ■

■ **Exemple 2.5** — $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$. Dans ce cas, il est plus intéressant de décrire la topologie de Zariski par les adhérences de certains points. L'espace tout entier est l'adhérence de $[(0)]$. L'adhérence d'un point de dimension 0 est lui-même. (Les idéaux maximaux sont des points fermés.) De plus, l'adhérence d'un de dimension 1, (f) , est la réunion de tous les $[(x - a, y - b)]$ tels que $f(a, b) = 0$ et le « point générique » $[(f)]$.

Étant donné cette information, les fermées de la topologie de Zariski sont des réunions finies de ces adhérences. (On peut montrer que si A est noethérien, alors les fermées de $\text{Spec } A$ sont précisément les réunions finies des parties de la forme $\overline{[\mathfrak{p}]}$, où $[\mathfrak{p}] \in \text{Spec } A$.) ■

Si $f \in A$, le complément de $V(f)$ est si important qu'il mérite un nom spécial.

Définition 2.4 — **Ouverts distingués.** Soit $f \in A$, alors la partie $D(f)$ définie par

$$\{[\mathfrak{p}] \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \{x \in \text{Spec } A \mid f(x) \neq 0\}$$

sont appelés *ouverts distingués*.

Comme les éléments de $\text{Spec } A$ sont des idéaux premiers, on voit que $D(f) = D(f^n)$ pour tout n positif. Aussi, on a que $D(f) \subset D(g)$ si et seulement si $f^n \in (g)$ pour un entier n . Cela est équivalent à $g \in A_f^\times$. (Voir l'appendice pour la définition de la localisation.)

Le grand intérêt de ces ouverts est dans la proposition ci-dessous.

Proposition 2.1 Les ouverts distingués constituent une base de la topologie de Zariski sur $\text{Spec } A$.

Démonstration. Ce résultat suit du fait que le complément de $V(S)$ est $\bigcup_{f \in S} D(f)$. □

Enfin, même si la quasi-compactité n'est pas aussi utile dans ce contexte parce que $\text{Spec } A$ n'est pas séparé, le théorème ci-dessous est toujours important. (L'une des grandes perspicacités de Grothendieck était de réaliser que l'analogie correcte de compacité était la notion de propreté.)

Théorème 2.2 L'espace topologique $\text{Spec } A$ est quasi-compact.

Démonstration. Comme les $D(f)$ forment une base de la topologie, il suffit de considérer un recouvrement ouvert de la forme $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$. C'est équivalent à dire que

$$V\left(\sum_{i \in I} (f_i)\right) = \bigcap_{i \in I} V(f_i) = \emptyset.$$

Cela implique que $\sum_{i \in I} (f_i) = (1)$ car tout autre idéal est contenu dans un idéal maximal (et donc premier). On en déduit que 1 est une combinaison linéaire (finie!) des f_i

$$\sum_{i \in J} a_i f_i = 1$$

et donc $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in J} D(f_i)$. □

2.3 Spec A COMME UN ESPACE ANNELÉ

La dernière pièce du puzzle est le faisceau structural de $X = \text{Spec } A$. L'idée est que $\mathcal{O}_X(U)$ soit constitué des « fonctions algébriques » sur U . Par exemple, dans $\mathbb{C}[x, y]$, on attend que $(x^2 + y + 1)/(x^2 y^3)$ soit une fonction sur $D(xy)$.

À cet état, notre stratégie devrait déjà être claire : on définira un faisceau sur la base de la topologie de Zariski donnée par les ouverts distingués.

Définition 2.5 — Faisceau structural. Soit $X = \text{Spec } A$. On définit $\mathcal{O}_X(D(f))$ comme étant la localisation de A à l'ensemble multiplicative des fonctions qui n'ont pas de zéros en dehors de $V(f)$. En d'autres termes,

$$\mathcal{O}_X(D(f)) := S^{-1}A, \quad \text{où } S = \{g \in A \mid D(f) \subset D(g)\}.$$

Observons que cela dépend uniquement de $D(f)$, et non de f lui-même. Si $D(f') \subset D(f)$, on définit le morphisme de restriction

$$\text{res}_{D(f), D(f')} : \mathcal{O}_X(D(f)) \rightarrow \mathcal{O}_X(D(f'))$$

comme étant le morphisme induit par la propriété universelle de la localisation.

Comme on a remarqué, $D(f) \subset D(g)$ si et seulement si $g \in A_f^\times$. Cela nous donne un isomorphisme d'anneaux $\mathcal{O}_X(D(f)) \cong A_f$.



La raison pour laquelle on ne définit pas $\mathcal{O}_X(D(f))$ comme étant A_f est que ce dernier dépend non seulement de $D(f)$ mais aussi de f . Nonobstant, on utilisera systématiquement cet isomorphisme.

Il ne reste qu'à vérifier que, en fait, cela définit un faisceau sur la base des ouverts distingués.

Théorème 2.3 La définition 2.5 détermine un faisceau sur la base des ouverts distingués et donc un faisceau sur $\text{Spec } A$ tout entier.

Démonstration. Il faut que l'on montre l'axiome d'unicité et l'axiome de recollement. En voyant $\text{Spec } A_f$ comme une partie de $\text{Spec } A$, on voit que $D(f) = \text{Spec } A_f$. Quitte à loca-

liser, on peut supposer que l'on a un recouvrement de $\text{Spec } A$ tout entier. Supposons donc $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$.

Vérifions l'axiome d'unicité. Par quasi-compacité, on écrit $\text{Spec } A = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$. Soit $s \in A = \mathcal{O}_X(\text{Spec } A)$ est une section globale telle que $\text{res}_{\text{Spec } A, D(f_i)} s = 0$ dans A_{f_i} pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. On veut montrer que $s = 0$. Pour chaque i , il existe m_i tel que $f_i^{m_i} s = 0$. En prenant le maximum, il existe m tel que $f_i^m s = 0$ pour tout i . Comme $\text{Spec } A = \bigcup_{i=1}^n D(f_i^m)$, il y a des $r_i \in A$ tels que $\sum_{i=1}^n r_i f_i^m = 1$. Alors,

$$s = \left(\sum_{i=1}^n r_i f_i^m \right) s = \sum_{i=1}^n r_i (f_i^m s) = 0.$$

Vérifions l'axiome de recollement. Supposons d'abord $I = \{1, \dots, n\}$ fini. Soit $a_i / f_i^{l_i} \in A_{f_i}$ une collection de sections qui coïncident sur $A_{f_i f_j}$. En faisant $g_i = f_i^{l_i}$ et en utilisant que $D(f_i) = D(g_i)$, on peut simplifier la notation en considérant nos éléments comme des $a_i / g_i \in A_{g_i}$. Le fait que les sections coïncident sur $A_{f_i f_j}$ se traduit par l'existence de m_{ij} tel que

$$(g_i g_j)^{m_{ij}} (g_j a_i - g_i a_j) = 0.$$

En prenant le maximum m des m_{ij} , on simplifie à nouveau la notation :

$$(g_i g_j)^m (g_j a_i - g_i a_j) = 0.$$

Soit $b_i = a_i g_i^m$ et $h_i = g_i^{m+1}$. Comme $D(h_i) = D(g_i) = D(f_i)$, on simplifie la notation une toute dernière fois : on a $b_i / h_i \in A_{h_i}$ tels que

$$h_j b_i = h_i b_j.$$

Comme $\text{Spec } A = \bigcup_{i=1}^n D(h_i)$, il y a des $r_i \in A$ tels que $\sum_{i=1}^n r_i h_i = 1$. Alors

$$r := \sum_{i=1}^n r_i b_i$$

est l'élément de A dont la restriction à A_{h_j} est b_j / h_j . En fait,

$$r h_j = \sum_{i=1}^n r_i b_i h_j = b_j \sum_{i=1}^n r_i h_i = b_j.$$

Finalement, si I est infini, on utilise la quasi-compacité de $\text{Spec } A$ pour choisir un sous-recouvrement fini $\text{Spec } A = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$. Par la méthode que l'on a vu, il existe un élément $r \in A$ dont la restriction à A_{f_i} est $a_i / f_i^{l_i}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Si $k \in I \setminus \{1, \dots, n\}$, on refait la procédure pour obtenir un élément $r' \in A$ dont la restriction à A_{f_i} est $a_i / f_i^{l_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n, k\}$. Par l'axiome d'unicité, $r = r'$. On conclut que r se restreint à $a_i / f_i^{l_i}$ pour tout $i \in I$ comme souhaité. \square

Rappelons que l'on a défini un espace annelé comme une paire (X, \mathcal{O}_X) d'un espace topologique X avec un faisceau d'anneaux \mathcal{O}_X dessus. Comme on vient de voir, $\text{Spec } A$ est naturellement un espace annelé. On peut vérifier que la fibre de $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ en $[\mathfrak{p}]$ est $A_{\mathfrak{p}}$, un anneau local. Il suit alors que $\text{Spec } A$ est un espace localement annelé. On arrive enfin à la définition d'un schéma affine !

Définition 2.6 — Schéma affine. Un schéma affine est un espace localement annelé isomorphe à $\text{Spec } A$ pour un anneau A .



Il est parfois habituel dans la littérature de définir les schémas affines comme un espace annelé (a priori, pas forcément localement annelé) isomorphe à $\text{Spec } A$. Cependant, comme l'isomorphisme d'espaces annelés induit un isomorphisme d'anneaux sur les fibres, il envoie toujours un idéal maximal sur l'autre.

2.4 SCHÉMAS ET SES MORPHISMES

Tout comme une variété est un espace topologique localement isomorphe à un espace euclidien, on définira un schéma comme étant localement isomorphe à un schéma affine. En fait, cette analogie devient encore plus profonde lorsque l'on considère une variété comme un espace localement annelé. (Voir [5] pour une définition précise.)

Définition 2.7 — Schéma. Un schéma est un espace localement annelé (X, \mathcal{O}_X) tel que tout point admet un voisinage U tel que l'espace topologique U , avec le faisceau restreint $\mathcal{O}_X|_U$, est un schéma affine. Un morphisme de schémas est un morphisme d'espaces localement annelés. On dénote la catégorie des schémas par **Sch**.

■ **Exemple 2.6 — Espace affine.** Soit k un corps commutatif. On définit l'espace affine \mathbb{A}_k^n comme étant $\text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ avec sa structure naturelle de schéma affine. ■

Si U est une partie ouverte d'un schéma X , alors $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ a une structure naturelle de schéma. On dira qu'il s'agit d'un sous-schéma ouvert de (X, \mathcal{O}_X) . La même chose ne se produit pas avec les fermés d'un schéma, comme on le verra bientôt. À titre d'exemple, si $I \subset A$ est un idéal, alors $\text{Spec } A/I$ donne une structure de schéma au fermé $V(I) \subset \text{Spec } A$. Toutefois, c'est possible que $V(I) = V(J)$ pour des idéaux différents I, J et donc cette structure n'est pas unique. (C'est le cas de (x) et (x^2) dans $k[x]$.)

■ **Exemple 2.7 — Le plan affine sauf l'origine.** Considérons l'ouvert $U = \mathbb{A}_k^2 \setminus \{(x, y)\}$ du plan affine \mathbb{A}_k^2 . (Notez que (x, y) est un idéal maximal de $k[x, y]$ et donc $[(x, y)]$ est un point fermé.) On se propose de montrer que U n'est pas un schéma affine. Notez d'abord que si U était isomorphe à $\text{Spec } A$, alors on pourrait retrouver A en calculant l'anneau des sections globales :

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}|_U) \cong \Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) = A.$$

Pour calculer cet anneau, notez que U peut être écrit comme une union de deux ouverts distingués : $U = D(x) \cup D(y)$. Comme on l'a vu, l'anneau de fonctions sur $D(x)$ est simplement $k[x, y]_x = k[x, y, 1/x]$ et celui des fonctions sur $D(y)$ est $k[x, y, 1/y]$. On cherche donc les éléments de $k[x, y, 1/x] \cup k[x, y, 1/y]$ qui coïncident dans $k[x, y, 1/x] \cap k[x, y, 1/y]$. Ce dernier anneau n'est rien d'autre que $k[x, y]$ et donc $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}|_U) = k[x, y]$.

On en déduit que si U était affine, alors U serait isomorphe à \mathbb{A}_k^2 , ce qui n'est pas possible car l'idéal $(x, y) \subset k[x, y]$ ne correspond pas à un point de U . ■

On va maintenant définir un schéma $\text{Proj } S$, où S est un anneau gradué, qui nous permettra de travailler avec des espaces projectifs tout comme Spec nous a permis de travailler avec des espaces affines.

Pour fixer les notations, un *anneau gradué* est un anneau S avec une décomposition en somme directe

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$

de groupes abéliens, telle que $S_i S_j \subset S_{i+j}$ pour tout $i, j \geq 0$. Un *élément homogène* est un élément d'un des groupes S_i et un *idéal homogène* est un idéal engendré par des éléments homogènes. Enfin, on appelle *idéal irrelevant* l'idéal $S_+ := \bigoplus_{d>0} S_d$. Bien évidemment, l'exemple type d'anneau gradué est l'anneau de polynômes $A[x_1, \dots, x_n]$.

Comme précédemment, on définira $\text{Proj } S$ en trois parties : d'abord comme un ensemble, puis comme un espace topologique et enfin on lui donnera un faisceau d'anneaux.

Définition 2.8 — Proj S comme un ensemble. Soit S un anneau gradué. On définit $\text{Proj } S$ comme l'ensemble des idéaux premiers homogènes de S_{\bullet} qui ne contiennent pas S_+ .

On définit ensuite une topologie sur $\text{Proj } S$ de manière analogue à la topologie de Zariski sur $\text{Spec } A$.

Définition 2.9 — Proj S comme un espace topologique. Soit T un ensemble d'éléments homogènes de degré positif dans S . On définit $V(T)$ comme étant

$$\{[\mathfrak{p}] \in \text{Proj } S \mid T \subset \mathfrak{p}\}.$$

Tout comme avant, si (T) est l'idéal engendré par T , alors $V(T) = V((T))$. Aussi, on vérifie que $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$ et $\bigcap_i V(I_i) = V(\sum_i I_i)$. De cette façon, les $V(T)$ sont les fermés d'une topologie sur $\text{Proj } S$, également appelé *topologie de Zariski*.

Si $f \in S$ est un élément homogène de degré positif, on définit l'*ouvert distingué* $D(f) := \text{Proj } S \setminus V(f)$. À nouveau, les $D(f)$ (où f parcourt les éléments homogènes de S_+) constituent une base de la topologie de Zariski. (En fait, $\emptyset = V(S_+) = \bigcap_f V(f)$ et donc $\text{Proj } S = \bigcup_f D(f)$.)



Certes, les définitions de $V(T)$ et $D(f)$ ont un sens si l'on considère également éléments de degré 0. La raison pour laquelle on a restreint la définition est que $D(f)$ est un sous-schéma affine de $\text{Proj } S$ si le degré de f n'est pas zéro.

Il ne nous reste plus qu'à définir un faisceau d'anneaux sur $\text{Proj } S$. Pour cela, on aura besoin d'un petit lemme sur les faisceaux.

Lemme 2.4 Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique X . Si \mathcal{F}_i est un faisceau sur U_i pour chaque i et si

$$\varphi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \rightarrow \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$$

sont des isomorphismes satisfaisant la condition du cocycle

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik} \quad \text{sur } U_i \cap U_j \cap U_k$$

pour tout i, j, k , alors il existe un unique faisceau \mathcal{F} sur X dont la restriction à chaque U_i est isomorphe à \mathcal{F}_i via les isomorphismes $\Psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}_i$ tels que

$$\varphi_{ij} \circ \Psi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j} : \mathcal{F}|_{U_i \cap U_j} \rightarrow \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$$

pour tout i, j .

Démonstration. Les ouverts contenus dans un U_i constituent une base pour la topologie de X . Pour un tel ouvert V , on choisit U_i le contenant et on définit $\mathcal{F}(V) := \mathcal{F}_i(V)$. Si pour $W \subset V$ la valeur $\mathcal{F}(W)$ a été définie en relation à \mathcal{F}_j pour $j \neq i$, on définit le morphisme de restriction en utilisant φ_{ij} . Ces morphismes composent correctement par la condition du cocycle. On obtient ainsi un faisceau sur cette base et donc un faisceau défini sur tous les ouverts. \square

Notre stratégie consistera à recouvrir $\text{Proj } S$ par des ouverts affines et à utiliser les fonctions sur ces ouverts pour définir les fonctions globales. Notez que si $f \in S_+$ est un élément homogène, alors la localisation S_f est naturellement un anneau gradué (mais la graduation n'est plus donnée par \mathbb{N} mais par \mathbb{Z}), où on définit $\deg(1/f) = -\deg f$.

Pour voir que les ouverts distingués sont affines, on définit l'application ci-dessous :

$$\begin{aligned} D(f) &\rightarrow \text{Spec}(S_f)_0 \\ [\mathfrak{p}] &\mapsto [\mathfrak{p}S_f \cap (S_f)_0], \end{aligned}$$

où $(S_f)_0$ est la partie de degré 0 de S_f . L'idéal $\mathfrak{p}S_f \cap (S_f)_0$ est bien premier car c'est l'image réciproque (la contraction) de $\mathfrak{p}S_f$ par l'inclusion $(S_f)_0 \hookrightarrow S_f$. (L'idéal $\mathfrak{p}S_f$ est premier car c'est un idéal de S qui ne contient pas f .) En fait, cette application est un homéomorphisme.

Tout comme avant, on identifie S_f à $T^{-1}S$, où T est l'ensemble multiplicatif des éléments homogènes $g \in S$ tels que $g \notin \mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p} \in D(f)$ pour obtenir un homéomorphisme

entre $D(f)$ et $(T^{-1}S)_0$. En utilisant les faisceaux de $D(f) \cong \text{Spec}(T^{-1}S)_0$ pour chaque f homogène dans S_+ , on obtient un faisceau d'anneaux sur $\text{Proj } S$ tout entier par le lemme 2.4. (Voir [9] pour plus de détails.)

Définition 2.10 — **Proj S comme un espace annelé.** Soit S un anneau gradué. On définit $\text{Proj } S$ comme étant l'espace annelé ainsi défini. Comme on a vu, $\text{Proj } S$ est recouvert par des ouverts distingués (qui sont affines). Il s'agit donc d'un schéma.

Sans aucun doute, l'espace projectif est le cas le plus important de la construction Proj .

■ **Exemple 2.8** — **Espace projectif.** Soit A un anneau. On définit l'espace projectif \mathbb{P}_A^n comme étant $\text{Proj } A[x_0, x_1, \dots, x_n]$ avec sa structure de schéma ainsi définie. Dans ce cas l'idéal irrelevant est (x_0, \dots, x_n) et donc les ouverts distingués $D(x_0), \dots, D(x_n)$ recouvrent \mathbb{P}_A^n . ■

Une grande partie de l'idéologie de Grothendieck peut se résumer ainsi : « il vaut mieux travailler avec des morphismes qu'avec des objets ». C'est en tenant compte de cela que l'on fait la définition ci-dessous.

Définition 2.11 Fixons un schéma S . Un schéma sur S est un schéma X avec un morphisme $X \rightarrow S$. Un morphisme $X \rightarrow Y$ entre deux schémas sur S est un morphisme de schémas tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

commute. On dénote par \mathbf{Sch}/S la catégorie des schémas sur S . Si A est un anneau, on dit qu'un schéma sur A est un schéma sur $\text{Spec } A$ et on dénote la catégorie des schémas sur A par \mathbf{Sch}/A .

■ **Exemple 2.9** — **Schémas sur \mathbb{Z} .** On peut montrer que puisque \mathbb{Z} est l'objet initial de \mathbf{Ring} , $\text{Spec } \mathbb{Z}$ est final (rappelons que l'application induite sur les spectres change l'ordre des flèches) dans la catégorie des schémas. De cette façon, tout schéma est naturellement un schéma sur \mathbb{Z} . Le lecteur intéressé par la formalisation de cette affirmation peut consulter la proposition 2.3 dans [7]. ■

On définit alors quelques propriétés de base des schémas.

Définition 2.12 Soit X un schéma. On dit que X est *connexe / irréductible* si son espace topologique sous-jacent l'est. La *dimension* de X est sa dimension comme espace topologique. Pareillement, X est *réduit / intègre* si pour tout ouvert $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ l'est. Enfin, X est *localement noethérien* s'il peut être recouvert par des ouverts affines $\text{Spec } A_i$, où chaque A_i est un anneau noethérien. S'il y a un tel recouvrement fini on dit que X est *noethérien*.

Dans le cas d'un schéma affine $\text{Spec } A$, ces propriétés se traduisent assez naturellement par des propriétés du anneau A .

■ **Exemple 2.10** Si $X = \text{Spec } A$ est un schéma affine, X est réduit / intègre / noethérien si et seulement si A l'est. Aussi, X est irréductible si et seulement si le nilradical de A est un idéal premier. La dimension de X coïncide avec la dimension de Krull de A . ■

Proposition 2.5 Un schéma est intègre si et seulement s'il est réduit et irréductible.

Voir la proposition 3.1 dans [7] pour la démonstration.

Ces définitions nous permettent de définir le corps de fonctions d'un schéma de manière naturelle. Dans le cas d'un schéma non intègre, on renvoie le lecteur au petit article [8] qui en donne une explication détaillée.

Définition 2.13 — Corps de fonctions. Soit X un schéma intègre. Pour chaque ouvert affine $U \subset X$, l'anneau de fonctions $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre et donc admet un corps de fractions K_X que l'on appelle *corps de fonctions de X* . On peut vérifier que ce corps ne dépend pas du ouvert affine choisi.

On définit ensuite la notion de sous-schéma fermé. Comme on l'as vu avant, une partie fermée d'un schéma peut avoir plusieurs structures d'espace localement annelé différentes. Naturellement, on les identifie.

Définition 2.14 — Sous-schéma fermé. Un morphisme $f : Y \rightarrow X$ entre des schémas est une *immersion fermée* s'il est un homéomorphisme sur son image et si $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_Y$ est surjective. Un *sous-schéma fermé* de X est une classe d'équivalence d'immersions fermées, où deux immersions sont équivalentes si elles sont isomorphes comme schémas sur X .

Pour terminer cette section, on définit la régularité d'un schéma.

Définition 2.15 — Régularité. Soit A un anneau local noethérien avec idéal maximal \mathfrak{m} et corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$. On dit que A est *régulier* si $\dim A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Un schéma localement noethérien X est *régulier* en $p \in X$ si l'anneau $\mathcal{O}_{X,p}$ l'est.

Cela ne sera pas important pour la suite de notre étude, mais le lecteur sera peut-être intéressé de savoir que, dans les conditions de la définition ci-dessus, il est toujours vrai que $\dim A \leq \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. La démonstration peut être trouvée dans n'importe quel livre d'algèbre commutative.

2.5 LE PRODUIT FIBRÉ ET PROPRIÉTÉS ASSOCIÉS

Suivant la philosophie Grothendieckienne, on aimerait définir le produit fibré de deux schémas X et Y sur un schéma de base S . Autrement dit, on veut définir le produit $X \times_S Y$ dans la catégorie des schémas sur S . Cette construction est fondamentale dans la géométrie algébrique moderne.

Théorème 2.6 Pour chaque pair de schémas X et Y sur S , il existe un schéma $X \times_S Y$ avec des morphismes vers X et Y faisant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

commuter. De plus, $X \times_S Y$ est final par rapport à cette propriété.

Comme d'habitude chez les propriétés universelles, $X \times_S Y$ est unique à isomorphisme unique près. L'idée de la démonstration est de réduire le résultat au cas où $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$ et $S = \text{Spec } R$ sont affines et de montrer ensuite que $\text{Spec}(A \otimes_R B)$ satisfait à la propriété universelle du produit fibré. Les détails sont relativement peu importants compte tenu de notre cadre et le lecteur intéressé peut les lire dans le théorème 3.3 de [7].

Inspirés par les variétés algébriques classiques, on donne les définitions ci-dessous.

Définition 2.16 — Morphisme de type fini. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ entre deux schémas est dit *de type fini* s'il y a un recouvrement de Y par des ouverts affines $V_i = \text{Spec } B_i$ tel que, pour tout i , $f^{-1}(V_i)$ admet un recouvrement par des ouverts affines $\text{Spec } A_{ij}$ où chaque A_{ij} est une B_i -algèbre finiment engendrée.

Définition 2.17 — Morphisme séparé. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Le *morphisme diagonal* est l'unique morphisme $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ dont la composition avec les projections $X \times_Y X \rightarrow X$ est le morphisme identité de X . On dit que f est *séparé* si le morphisme diagonal est une immersion fermée.

Définition 2.18 — Morphisme projectif. Soit Y un schéma. On définit l'*espace projectif sur Y* , dénoté \mathbb{P}_Y^n , comme étant $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} Y$. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est *projectif* s'il possède une factorisation $f = p \circ i$, où $i : X \rightarrow \mathbb{P}_Y^n$ est une immersion fermée et $p : \mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$ est la projection.

Dans tous les cas, on dit qu'un schéma X est de type fini / séparé / projectif, s'il l'est comme schéma sur \mathbb{Z} .

■ **Exemple 2.11 — Variétés et courbes.** Si k est un corps algébriquement clos, il existe un foncteur pleinement fidèle naturel de la catégorie des variétés sur k vers la catégorie des schémas sur k . Tous les schémas dans l'image de ce foncteur sont intégreaux séparés de type fini. Dorénavant, on utilisera le mot *variété* pour désigner un schéma intégral séparé de type fini. Une *courbe* est une variété de dimension 1. ■

2.6 RETOUR À LA THÉORIE DES FAISCEAUX

Soit M un A -module. On peut faire la même procédure de la section 2.3 pour définir un faisceau \tilde{M} sur $\text{Spec } A$ qui satisfait $\tilde{M}(D(f)) \cong M_f$, comme A_f -modules, pour tout $f \in A$. Tout comme avant, la donnée du faisceau sur la base des ouverts distingués définit le faisceau sur $\text{Spec } A$ entier. Il s'agit donc d'un $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ -module.

Comme la catégorie des faisceaux localement libres n'est pas abélienne (et que on n'as donc pas accès aux outils d'algèbre homologique), on aimerait trouver une catégorie abélienne l'englobant. C'est la catégorie des faisceaux quasi-cohérents et \tilde{M} est l'exemple type d'un tel faisceau.

Définition 2.19 — Faisceau quasi-cohérent. Soit X un schéma localement noethérien. Un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est *quasi-cohérent* si X admet un recouvrement par des ouverts affines $U_i = \text{Spec } A_i$ tel que pour chaque i il existe un A_i -module M_i avec $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$. En outre, \mathcal{F} est *cohérent* si chaque M_i est finiment engendré.

On dénote la catégorie des faisceaux cohérents par \mathbf{Coh}_X et celle des faisceaux quasi-cohérents par \mathbf{QCoh}_X .



La définition de faisceau cohérent dans le cas non noethérien est légèrement différente. Le chapitre 13 de [12] contient une discussion intéressante à ce sujet. Dans notre cas, la définition ci-dessus suffira.

Bien sûr, \tilde{M} est toujours quasi-cohérent. Comme on l'a dit, la motivation pour considérer des faisceaux cohérents et quasi-cohérents est le fait que ces catégories sont abéliennes. On aura besoin des outils de l'algèbre homologique dans le prochain chapitre lorsque l'on traitera de la cohomologie.

■ **Exemple 2.12** Le faisceau structural d'un schéma X est toujours cohérent. Dans ce cas on prend un recouvrement affine quelconque $\{U_i\}$ et on utilise le module $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ défini sur lui même. ■

Dans le cas affine on a le résultat suivant.

Proposition 2.7 Soit $X = \text{Spec } A$ un schéma affine. Un faisceau \mathcal{F} est quasi-cohérent si et seulement s'il est isomorphe à \tilde{M} pour un A -module M . Si A est noethérien, alors \mathcal{F} est cohérent si et seulement si M est de type fini.

En d'autres termes, $M \mapsto \tilde{M}$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des A -modules et celle des faisceaux quasi-cohérents sur $\text{Spec } A$. Le lecteur intéressé par la démonstration peut voir le corollaire 5.5 dans [7].

Un corollaire direct de cette proposition est le résultat ci-dessous.

Corollaire 2.8 Soit X un schéma. Alors le noyau, le conoyau et l'image d'un morphisme de faisceaux quasi-cohérents l'est aussi. Si X est noethérien, le même résultat vaut pour les faisceaux cohérents.

Démonstration. Comme ces résultats sont locaux, on peut supposer X affine et donc tout suit de la proposition 2.7. □

2.7 DIVISEURS SUR UNE COURBE RÉGULIÈRE

Dans cette section, on travaillera exclusivement avec des courbes régulières. C'est-à-dire des schémas intégreaux séparés de type fini de dimension 1 qui satisfont à la définition 2.15. La plupart des sujets abordés dans ce chapitre fonctionnent avec peu de modifications sur les variétés régulières quelconques, mais la théorie sur des schémas généraux est un peu plus complexe. Le chapitre 14 de [12] décrit cela en détail.

Définition 2.20 — Diviseurs. Soit C une courbe régulière. Un *diviseur de Weil* (ou tout simplement un *diviseur*) est un élément du groupe abélien libre $\text{Div}(C)$ engendré par les points fermés de C . Si $D = \sum_{p \in C} n_p [p]$, on définit le *degré* de D comme étant $\text{deg}(D) := \sum_{p \in C} n_p$.

Si \mathcal{L} est un faisceau inversible et $s \in \mathcal{L}(C)$, on définit le *diviseur principal* $(s) := \sum_{p \in C} n_p [p]$, où n_p est l'ordre du zéro / pôle de s en p . Le quotient de $\text{Div}(C)$ par le sous-groupe des diviseurs principaux est le *groupe des classes de diviseurs* $\text{Cl}(C)$.

Enfin, si $D = \sum_{p \in C} n_p [p]$ et $D' = \sum_{p \in C} n'_p [p]$, on dit que $D \geq D'$ si $n_p \geq n'_p$ pour tout $p \in C$.



Une définition formelle de l'ordre d'une section rationnelle en un point nécessite d'un peu plus d'algèbre commutative que celle dont on dispose. En tout état de cause, la définition ci-dessus sera suffisante pour nos usages.

Dans le cas où C est aussi projective, on peut montrer que le degré d'un diviseur principal est toujours zéro. Il suit que deg descend à une fonction $\text{Cl}(C) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Le théorème ci-dessous sera très important.

Théorème 2.9 Soit C une courbe régulière. Alors le groupe des classes de diviseurs est isomorphe au groupe de Picard : $\text{Cl}(C) \cong \text{Pic}(C)$.

Pour chaque diviseur D , on définit un faisceau inversible $\mathcal{O}_C(D)$ défini par

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_C(D)) := \{s \in K_C \mid (s) + D \geq 0 \text{ dans } \text{Div}(U)\}.$$

De manière informelle, $\Gamma(U, \mathcal{O}_C(D))$ est constitué de toutes les fonctions rationnelles sur C qui ont plus de pôles que D . La démonstration du théorème 2.9 se fait alors en montrant

que celui-ci définit une application $\text{Cl}(C) \rightarrow \text{Pic}(C)$ et que cette application est un isomorphisme. Pour plus de détails, voir la référence citée au début de cette section.

À travers cet isomorphisme, on définit le degré d'un faisceau inversible. En d'autres mots, pour calculer le degré d'un faisceau inversible on choisit une section non-nulle quelconque et on calcule la somme des ordres de ses zéros (et pôles).

2.8 DIFFÉRENTIELLES DE KÄHLER

On commencera par définir le module des différentielles de Kähler dans un contexte purement algébrique, puis on utilisera les cartes affines pour « coller » ces modules dans une courbe.

Soit A une B -algèbre, on a donc un morphisme des anneaux $B \rightarrow A$ et le morphisme correspondant des spectres $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$. Alors pour tout A -module M , on peut définir une B -dérivation comme suit.

Définition 2.21 — Dérivations. Une B -dérivation d de A sur M est une application B -linéaire $A \rightarrow M$ telle que

- $d(a_1 + a_2) = da_1 + da_2$ pour tout $a_1, a_2 \in A$;
- $d(a_1 a_2) = a_1 da_2 + a_2 da_1$ pour tout $a_1, a_2 \in A$;
- $db = 0$ pour tout $b \in B$ (vu dans A à travers le morphisme $B \rightarrow A$).

On définit donc le module des différentielles de Kähler de la façon suivante.

Définition 2.22 — Différentielles de Kähler. Le module des *différentielles de Kähler* de A sur B est un A -module $\Omega_{A/B}$, avec une B -dérivation $d : A \rightarrow \Omega_{A/B}$, qui satisfait la propriété universelle suivante : pour tout A -module M et B -dérivation $d' : A \rightarrow M$, il existe un unique morphisme de A -modules $f : \Omega_{A/B} \rightarrow M$ tel que $d' = f \circ d$.

On peut construire un tel module en prenant le module libre engendré par les éléments $\{da \mid a \in A\}$ et ensuite prendre le quotient par le sous-module engendré par les expressions de la forme

$$d(a_1 + a_2) - da_1 - da_2, \quad d(a_1 a_2) - a_1 da_2 - a_2 da_1 \quad \text{et} \quad db,$$

pour $a_1, a_2 \in A$ et $b \in B$. De cette façon on garantit que $d : A \rightarrow \Omega_{A/B}$ est une B -dérivation.

■ **Exemple 2.13** Le cas le plus importante est évidemment celui de la B -algèbre de polynômes $A = B[x_1, \dots, x_n]$. Dans ce cas $\Omega_{A/B}$ est un module libre de rang n : $\Omega_{A/B} = Adx_1 \oplus Adx_2 \oplus \dots \oplus Adx_n$. ■

■ **Exemple 2.14 — Différentielles méromorphes.** Si C est une courbe régulière connexe sur un corps algébriquement clos k et K_C est son corps de fonctions, l'espace $\Omega_{K_C/k}$ est l'espace des *différentielles méromorphes* de C . Il s'agit d'un K_C -espace vectoriel de dimension 1. On peut

montrer que si $p \in C$ et t est un générateur du (unique) idéal maximal de $\mathcal{O}_{C,p} \subset K_C$, alors dt engendre l'espace $\Omega_{K_C/k}$. (C'est une conséquence du fait que $\mathcal{O}_{C,p}$ est un *anneau de valuation discrète*.) Donc tout élément $\omega \in \Omega_{K_C/k}$ peut être écrit comme $\omega = f dt$ pour $f \in K_C$. ■

Finalement, on définit les différentielles de Kähler pour des schémas. On donnera l'idée de la construction mais le lecteur intéressé par plus de détails peut lire le chapitre 21 de [12]. Le cas qui sera utile pour nous est celui d'une courbe régulière C sur un corps algébrique clos k . On rappelle qu'il s'agit d'un morphisme de schémas $C \rightarrow \text{Spec } k$.

Définition 2.23 — Différentielles de Kähler sur les schémas. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas entre des schémas affines $X = \text{Spec } A$ et $Y = \text{Spec } B$, on définit $\Omega_{X/Y}$ comme étant le faisceau $\widetilde{\Omega_{A/B}}$.

Dans le cas où X et Y ne sont pas affines, on recouvre X et Y par des ouverts affines $U = \text{Spec } A$ et $V = \text{Spec } B$, de X et Y respectivement, tels que $f(U) \subset V$ et on définit $\Omega_{X/Y}|_U$ comme étant $\Omega_{U/V}$. Enfin, on obtient un faisceau sur X tout entier par le lemme 2.4.

Comme d'habitude, il existe une construction abstraite plus élégante pour cet objet, mais elle ne sera pas nécessaire pour la suite de notre texte. Ce faisceau est évidemment quasi-cohérent. Le fait le plus important pour nous est que, dans le cas d'une courbe régulière C sur un corps algébriquement clos, il s'agit même d'un faisceau invertible. Si C est de plus projective, on dit que $\dim \Gamma(C, \Omega_C)$ est le *genre géométrique* de C . On examinera cette valeur plus en détail dans le prochain chapitre.

3

THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

3.1 COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX

Disons que X est un espace topologique et que $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur X . Comme le foncteur $\Gamma(X, _)$ est exact à gauche³, on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'').$$

On aimerait ensuite continuer cette suite vers la droite. La cohomologie des faisceaux est l'outil qui nous permettra d'accomplir cette tâche. En fait, on obtiendra une suite exacte longue de la forme

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}'') \rightarrow \dots$$

Le lecteur qui a étudié un peu d'algèbre homologique ou de topologie algébrique se rendra compte qu'exactement le même problème se pose dans le cas du foncteur $\text{Hom}_A(M, _)$, où A est un anneau et M est un A -module. Ce foncteur est également exact à gauche et on peut obtenir une suite exacte longue grâce au foncteur $\text{Ext}_A^i(M, _)$. En fait, ces deux exemples sont des cas particuliers de foncteurs dérivés, dont on va esquisser ici la théorie.

Commençons donc par quelques rappels d'algèbre homologique.

Définition 3.1 Soit \mathbf{A} une catégorie abélienne. Un *complexe* C^\bullet sur \mathbf{A} est une collection d'objets C^i , pour $i \in \mathbb{Z}$, et de morphismes $d^i : C^i \rightarrow C^{i+1}$, tels que $d^{i+1} \circ d^i = 0$ pour tout i . Si l'on spécifie les C^i seulement pour $i \geq 0$, cela signifie que $C^i = 0$ pour tout $i < 0$. Un morphisme de complexes $f : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ est une collection de morphismes $f^i : C^i \rightarrow D^i$ qui commutent avec les d^i . Si le contexte est clair, on omettra les indices de tous les morphismes.

Comme $d \circ d = 0$, on a toujours $\text{im } d^{i-1} \subset \ker d^i$. On définit alors la i -ème *cohomologie* de C^\bullet comme étant $H^i(C^\bullet) := \ker d^i / \text{im } d^{i-1}$. Si $f : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ est un morphisme de complexes, alors f induit des morphismes $H^i(f) : H^i(C^\bullet) \rightarrow H^i(D^\bullet)$. Si $f, g : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ sont tels qu'il existent des morphismes $k^i : C^i \rightarrow D^{i-1}$ satisfaisant $f - g = dk + kd$, alors f et g induisent le même morphisme en cohomologie. On dit qu'ils sont *homotopes*.

Enfin, si $0 \rightarrow C^\bullet \rightarrow D^\bullet \rightarrow E^\bullet \rightarrow 0$ est une suite exacte de complexes, alors il existent des morphismes naturels $\delta^i : H^i(C^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(E^\bullet)$ induisant une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H^i(C^\bullet) \rightarrow H^i(D^\bullet) \rightarrow H^i(E^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(C^\bullet) \rightarrow \dots$$

3. Le foncteur $\Gamma(X, _)$ est adjoint à droite au foncteur faisceau constant.

On devra aussi parler des résolutions et des objets injectifs.

Définition 3.2 — Résolutions. Soit I un objet de \mathbf{A} . On dit qu'il s'agit d'un objet *injectif* si le foncteur $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(_, I)$ est exact. Une *résolution injective* d'un objet A de \mathbf{A} est un complexe \mathbb{N} -gradué I^\bullet avec un morphisme $A \rightarrow I^0$ tel que I^i est injectif pour tout $i \geq 0$ et tel que la suite

$$0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$$

est exacte.

Si tout objet de \mathbf{A} est isomorphe à un sous-objet d'un objet injectif, alors on dit que \mathbf{A} a *assez d'injectifs*. Dans ce cas on peut montrer que tout objet a une résolution injective et que deux résolutions injectives sont homotopes.

Enfin, on a tout le vocabulaire pour parler des foncteurs dérivés.

Définition 3.3 — Foncteurs dérivés. Soit \mathbf{A} une catégorie abélienne avec assez d'injectifs, \mathbf{B} une catégorie abélienne et $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un foncteur exact à gauche. Pour chaque objet A de \mathbf{A} on choisit une résolution injective I^\bullet de A et on définit les *foncteurs dérivés à droite* $R^i F$ par $R^i F(A) = H^i(F(I^\bullet))$.

Le théorème ci-dessous résume certaines des propriétés les plus importantes des foncteurs dérivés. Le lecteur intéressé par plus de détails peut consulter [13].

Théorème 3.1 Dans les conditions de la définition ci-dessus, on a que :

- (a) Pour tout $i \geq 0$, $R^i F$ est un foncteur de \mathbf{A} vers \mathbf{B} qui dépend pas (à isomorphisme naturel près) de la résolution injective choisie;
- (b) Le foncteur $R^0 F$ est naturellement isomorphe à F ;
- (c) Pour chaque suite exacte $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ et pour chaque $i \geq 0$, il existe un morphisme $\delta^i : R^i F(A'') \rightarrow R^{i+1} F(A')$ tel que la suite

$$\dots \rightarrow R^i F(A') \rightarrow R^i F(A) \rightarrow R^i F(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1} F(A') \rightarrow \dots$$

soit exacte;

- (d) Étant donné un morphisme entre deux suites exactes $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$, les δ induisent des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} R^i F(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1} F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^i F(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1} F(B') \end{array}$$

pour tout $i \geq 0$;

- (e) Si I est un objet injectif de \mathbf{A} , alors $R^i F(I) = 0$ pour tout $i > 0$.

Dans le langage fondé par Grothendieck en [6], les points (c) et (d) du théorème ci-dessus disent que les foncteurs dérivés à droite forment un δ -foncteur. On remarque aussi que si X est un espace topologique, alors la catégorie \mathbf{Ab}_X des faisceaux de groupes abéliens sur X a assez d'injectifs. (Voir [4].) Cela entraîne la définition ci-dessous.

Définition 3.4 — Cohomologie des faisceaux. Soit X un espace topologique. On définit les foncteurs de cohomologie $H^i(X, _)$ comme étant les foncteurs dérivés à droite de $\Gamma(X, _)$. Pour tout faisceau \mathcal{F} de groupes abéliens sur X , on dit que $H^i(X, \mathcal{F})$ sont les groupes de cohomologie de \mathcal{F} .

Dans la suite de notre étude, on aura besoin de deux faits sur la cohomologie des faisceaux. Premièrement, si X est un schéma sur $\text{Spec } A$ et \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module, alors les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ ont une structure naturelle de A -module. En particulier, dans le cas d'un schéma sur un corps k , ces groupes ont une structure de k -espace vectoriel. Le deuxième fait est le théorème profond de Grothendieck ci-dessous.

Théorème 3.2 — Grothendieck. Soit X un schéma noethérien de dimension n . Alors pour tout $i > n$ et tout \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} , on a $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.

Voir le théorème 2.7 dans [7] pour la démonstration. Un corollaire direct de ce théorème est le fait que, dans le cas d'une courbe C sur un corps k , seuls deux groupes de cohomologie sont non nuls. Le groupe de cohomologie $H^0(C, \mathcal{F})$ n'est rien d'autre l'espace vectoriel $\Gamma(C, \mathcal{F})$ des sections globales et le groupe $H^1(C, \mathcal{F})$ sera explicitement décrit par la cohomologie de Čech.

Dans la suite du texte, on travaillera dans le contexte d'un schéma noethérien séparé X (dont une courbe est un cas particulier) et d'un faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} . Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement affine de X . On dénote par U_{ij} l'intersection $U_i \cap U_j$ et par U_{ijk} l'intersection $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Commençons donc par définir le complexe de Čech $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Les trois premiers objets de ce complexe sont

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_i \mathcal{F}(U_i), \quad C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i < j} \mathcal{F}(U_{ij}) \quad \text{et} \quad C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i < j < k} \mathcal{F}(U_{ijk}).$$

Cette suite continue de façon naturelle. De même, on définit les deux premiers morphismes :

$$\begin{aligned} d^0 : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & d^1 : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \alpha &\mapsto (d^0 \alpha)_{ij} = (\alpha_j - \alpha_i)|_{U_{ij}} & \alpha &\mapsto (d^1 \alpha)_{ijk} = (\alpha_{jk} - \alpha_{ik} + \alpha_{ij})|_{U_{ijk}}. \end{aligned}$$

En général, le morphisme $d^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est défini par

$$(d^p \alpha)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}}|_{U_{i_0, \dots, i_{p+1}}}.$$

Finalement, on définit la cohomologie de Čech.

Définition 3.5 Soit X un schéma noethérien séparé, \mathcal{F} un faisceau quasi-cohérent sur X et \mathcal{U} un recouvrement affine de X . La i -ème cohomologie de Čech $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ de \mathcal{F} par rapport à \mathcal{U} est la i -ème cohomologie du complexe de Čech associé.

Bien sûr, la même définition peut être faite dans le contexte d'un faisceau quelconque sur un espace topologique. Cependant, c'est dans le contexte de la définition 3.5 que cette notion est la plus utile. Donnons quelques exemples.

■ **Exemple 3.1** Explicitement, le groupe $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est composé des sections $\alpha_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telles que $\alpha_i - \alpha_j = 0$ sur U_{ij} . Comme \mathcal{F} est un faisceau, ces sections donnent lieu à une unique section globale. On en déduit que $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$. ■

■ **Exemple 3.2** Le groupe $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est défini comme étant $\ker d^1 / \text{im } d^0$ et donc est composé des sections $\alpha_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ telles que $\alpha_{jk} - \alpha_{ik} + \alpha_{ij} = 0$ sur U_{ijk} . Un élément $\alpha = (\alpha_{ij})$ de ce groupe est zéro s'il existent des sections $\beta_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telles que $\alpha_{ij} = \beta_j - \beta_i$ sur U_{ij} . ■

■ **Exemple 3.3 — Différentielles sur la droite projective.** Soit k un corps, $X = \mathbb{P}_k^1$ vu comme un schéma sur k et Ω son faisceau de différentielles. Soit \mathcal{U} le recouvrement de X donné par les droites affines $U = \mathbb{A}_k^1$ avec coordonnée x et $V = \mathbb{A}_k^1$ avec coordonnée $y = 1/x$. Dans ce cas, le complexe de Čech n'a que deux termes :

$$\begin{aligned} C^0(\mathcal{U}, \Omega) &= \Gamma(U, \Omega) \times \Gamma(V, \Omega) & \text{et} & & C^1(\mathcal{U}, \Omega) &= \Gamma(U \cap V, \Omega) \\ &= k[x] dx \times k[y] dy & & & &= k[x, 1/x] dx. \end{aligned}$$

L'application $d : C^0(\mathcal{U}, \Omega) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \Omega)$ est donnée simplement par l'identité sur $\Gamma(U, \Omega)$ et par

$$y \mapsto \frac{1}{x}, \quad dy \mapsto -\frac{1}{x^2} dx$$

sur $\Gamma(V, \Omega)$. Alors $\check{H}^0(\mathcal{U}, \Omega) = \Gamma(X, \Omega)$ est l'ensemble des sections $f(x) dx \in k[x] dx$ et $g(y) dy \in k[y] dy$ qui coïncident sur $\Gamma(U \cap V, \Omega)$. Cela implique que

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} g(1/x).$$

Comme $g(1/x)/x^2$ est un polynôme en $1/x$ sans terme constant, il suit que $f = g = 0$ et donc $\check{H}^0(\mathcal{U}, \Omega) = 0$. Aussi, l'image de d dans $k[x, 1/x] dx$ est exactement

$$\left\{ \left(f(x) + \frac{1}{x^2} g(x) \right) dx \mid f, g \in k[x] \right\}.$$

Il s'agit du sous-espace vectoriel engendré par $x^n dx$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Il suit que $\check{H}^1(\mathcal{U}, \Omega) \cong k$ car il est engendré par l'image de $x^{-1} dx$ dans le quotient. ■

■ **Exemple 3.4 — Faisceau gratte-ciel.** Soit X une variété sur un corps k et $p \in X$. Le faisceau de groupes abéliens $i_{p,*}k$ est naturellement un \mathcal{O}_X -module : pour chaque ouvert U de X contenant p , un élément de $\mathcal{O}_X(U)$ a une valeur en p et donc agit sur $k = i_{p,*}k(U)$ par

LE THÉORÈME

multiplication. Par définition, on a que $\check{H}^0(X, i_{p,*}k) = \Gamma(X, i_{p,*}k) = k$. Aussi, c'est clair que $\check{H}^1(X, i_{p,*}k) = 0$ par l'exemple 3.2. ■

Enfin, la principale raison pour laquelle on considère la cohomologie de Čech est le théorème ci-dessous, dont la démonstration peut être trouvée dans [7].

Théorème 3.3 Soit X un schéma noethérien séparé et \mathcal{U} un recouvrement affine de X . Alors, si \mathcal{F} est un faisceau quasi-cohérent sur X , les groupes $H^i(X, \mathcal{F})$ et $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sont isomorphes pour tout $i \geq 0$.

Dorénavant, on utilisera la cohomologie qui convient le mieux et on dénotera les deux par $H^i(X, \mathcal{F})$.

3.2 LE THÉORÈME

Dans la suite du texte, on s'intéressera à la dimension des groupes de cohomologie des faisceaux quasi-cohérents sur une courbe projective régulière sur un corps algébriquement clos. Comme on le verra, il y a un nombre qui se comporte un peu mieux : la caractéristique d'Euler.

Définition 3.6 — Caractéristique d'Euler. Soit X une variété de dimension n sur un corps k et \mathcal{F} un faisceau quasi-cohérent sur X . La *caractéristique d'Euler* de \mathcal{F} est l'entier

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i h^i(X, \mathcal{F}),$$

où $h^i(X, \mathcal{F})$ est la dimension de $H^i(X, \mathcal{F})$ comme k -espace vectoriel.

Dans le cas d'une courbe C , la caractéristique d'Euler est tout simplement $\chi(C, \mathcal{F}) = h^0(C, \mathcal{F}) - h^1(C, \mathcal{F})$. On aura besoin du lemme ci-dessous. (Rappelez le théorème 2.9!)

Lemme 3.4 Soit X une variété sur un corps k , \mathcal{L} un faisceau invertible sur X et $p \in X$. Si $\mathcal{L}(-p)$ est le faisceau constitué des sections de \mathcal{L} qui ont un zéro en p , alors $\chi(X, \mathcal{L}(-p)) = \chi(X, \mathcal{L}) - 1$.

Démonstration. On a une suite exacte de faisceaux $0 \rightarrow \mathcal{L}(-p) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow i_{p,*}k \rightarrow 0$, où le premier morphisme est l'inclusion naturelle et le deuxième est l'évaluation en p . On obtient ainsi une suite exacte longue en cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{L}(-p)) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{L}) & \longrightarrow & H^0(X, i_{p,*}k) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & H^1(X, i_{p,*}k) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

Par l'exemple 3.4 et par l'additivité de la dimension, il suit que

$$h^0(X, \mathcal{L}(-p)) - h^0(X, \mathcal{L}) + 1 - h^1(X, \mathcal{L}(-p)) + h^1(X, \mathcal{L}) = 0.$$

C'est n'est rien d'autre que $\chi(X, \mathcal{L}(-p)) = \chi(X, \mathcal{L}) - 1$. □

Ce lemme nous permet de faire un premier pas vers le théorème de Riemann-Roch.

Proposition 3.5 Soit C une courbe régulière sur un corps k et \mathcal{L} un faisceau inversible sur C . Alors $\chi(C, \mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}) + \chi(C, \mathcal{O}_C)$.

Démonstration. Par le théorème 2.9 on peut écrire $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(p_1 + \dots + p_a - q_1 - \dots - q_b)$, où $a - b = \deg(\mathcal{L})$. On raisonne par récurrence sur $a + b$. Ce résultat est trivial pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C$ et le lemme ci-dessus permet de continuer la récurrence. □

En particulier, pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(D)$, on a que $h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - h^1(C, \mathcal{O}_C(D)) = d + 1 - h^1(C, \mathcal{O}_C)$, où $d = \deg(D)$. Comme on le verra, ce résultat est très proche du théorème de Riemann-Roch. Présentons enfin le gros résultat de ce rapport!

Théorème 3.6 — Riemann-Roch. Soit C une courbe projective régulière sur un corps algébriquement clos et \mathcal{L} un faisceau invertible sur C de degré d . Alors

$$h^0(C, \mathcal{L}) - h^0(C, \Omega_C \otimes \mathcal{L}^\vee) = d - g + 1,$$

où $g = h^0(C, \Omega_C)$ est le *genre* de C .

Notons que, contrairement au résultat obtenu précédemment, seul le premier groupe de cohomologie apparaît ici, ce qui est beaucoup plus pertinent géométriquement. Dans le cas de $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(D)$, on peut utiliser ce résultat pour trouver la dimension de l'espace des fonctions rationnelles dont le comportement est donné par D .

Notre démonstration du théorème de Riemann-Roch sera basée sur la dualité de Serre. Pour comprendre sa formulation, rappelons que si M, N et L sont des A -modules, alors un *accouplement* est simplement une application bilinéaire $M \times N \rightarrow L$. Un tel accouplement induit une application linéaire $M \rightarrow \text{Hom}_A(N, L)$. Si cette application est un isomorphisme, on dit que l'accouplement est *parfait*. Donnons alors l'énoncé de la dualité de Serre!

Théorème 3.7 — Dualité de Serre. Soit C une courbe projective régulière sur un corps algébriquement clos k et \mathcal{L} un faisceau invertible sur C . Alors il existe un accouplement parfait

$$H^0(C, \Omega_C \otimes \mathcal{L}^\vee) \times H^1(C, \mathcal{L}) \rightarrow k$$

induisant un isomorphisme $H^1(C, \mathcal{L}) \cong H^0(C, \Omega_C \otimes \mathcal{L}^\vee)^\vee$.

Supposons un instant la dualité de Serre et prouvons le théorème de Riemann-Roch.

Démonstration. En supposant la dualité de Serre, ce résultat suit comme un simple corollaire :

$$\begin{aligned}
 h^0(C, \mathcal{L}) - h^0(C, \Omega_C \otimes \mathcal{L}^\vee) &= h^0(C, \mathcal{L}) - h^1(C, \mathcal{L}) && \text{(dualité de Serre)} \\
 &= \chi(C, \mathcal{L}) && \text{(définition de } \chi) \\
 &= d + \chi(C, \mathcal{O}_C) && \text{(proposition 3.5)} \\
 &= d + h^0(C, \mathcal{O}_C) - h^1(C, \mathcal{O}_C) && \text{(définition de } \chi) \\
 &= d + 1 - h^1(C, \mathcal{O}_C) \quad \text{(les sections globales sont constantes)} \\
 &= d + 1 - h^0(C, \Omega_C) && \text{(dualité de Serre)} \\
 &= d + 1 - g. && \text{(définition de } g)
 \end{aligned}$$

C'est le résultat voulu. □

3.3 PREUVE DE LA DUALITÉ DE SERRE

Notre démonstration de la dualité de Serre a été créée par André Weil et peut être trouvée (dans le contexte de la géométrie algébrique classique) dans le livre [10]. La base de cette démonstration est une interprétation du groupe $H^1(C, \mathcal{O}_C(D))$ en termes de l'anneau des répartitions, un objet qui apparaît naturellement dans la théorie des classes de corps. Suivant la notation de Serre, on dénote le groupe $H^1(C, \mathcal{O}_C(D))$ par $I(D)$.

Définition 3.7 — Anneau des répartitions. L'anneau des répartitions R est le sous-anneau de $\prod_{p \in C} K_C$ constitué des $(f_p)_{p \in C}$ tels que $f_p \in \mathcal{O}_{C,p}$ (où on identifie un germe de $\mathcal{O}_{C,p}$ à l'unique fonction rationnelle sur C ayant ce germe au point p) pour tous sauf un nombre fini des p . Le corps de fonctions K_C est naturellement un sous-anneau de R : on associe à $f \in K_C$ l'élément $(f)_{p \in C} \in R$. Notons que R est naturellement une K_C -algèbre.

Si D est un diviseur sur C , on dénote par $R(D)$ le sous-groupe de R des $(f_p)_{p \in C}$ tels que $v_p(f_p) + v_p(D) \geq 0$ pour tout $p \in C$, où $v_p(f)$ est la valuation de f en p et $v_p(D)$ est le coefficient de D en p .

Le groupe $R(D)$ est en quelque sorte analogue au groupe $\mathcal{O}_C(D)$ mais où l'on compare les valuations point par point. La raison principale de considérer ces objets est la proposition ci-dessous.

Proposition 3.8 Les espaces vectoriels $I(D)$ et $R/(R(D) + K_C)$ sont canoniquement isomorphes.

Démonstration. Le faisceau $\mathcal{O}_C(D)$ est un sous-faisceau du faisceau constant \underline{K}_C et donc il y a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow \underline{K}_C \rightarrow \underline{K}_C / \mathcal{O}_C(D) \rightarrow 0.$$

Comme $H^0(C, \underline{K}_C) = K_C$ et $H^1(C, \underline{K}_C) = 0$, la suite exacte longue en cohomologie est

$$K_C \rightarrow H^0(C, \underline{K}_C / \mathcal{O}_C(D)) \rightarrow I(D) \rightarrow 0.$$

D'où il suffit de montrer que $H^0(C, \underline{K}_C / \mathcal{O}_C(D))$ est isomorphe à $R/R(D)$. Pour cela, on observe tout d'abord que la fibre de $\underline{K}_C / \mathcal{O}_C(D)$ en $p \in C$ est

$$(\underline{K}_C / \mathcal{O}_C(D))_p = (\underline{K}_C)_p / \mathcal{O}_C(D)_p = K_C / \mathcal{O}_C(D)_p = \{f \in K_C \mid v_p(f) + v_p(D) \geq 0\}$$

et donc $R/R(D) = \bigoplus_{p \in C} (\underline{K}_C / \mathcal{O}_C(D))_p$. Enfin, le faisceau $\underline{K}_C / \mathcal{O}_C(D)$ est un faisceau gratteciel : si s est une section de $\underline{K}_C / \mathcal{O}_C(D)$ sur un voisinage U de p , alors il existe un voisinage $U' \subset U$ de p tel que $s = \bar{0}$ sur $U' \setminus \{p\}$. Il suit que les sections globales de $\underline{K}_C / \mathcal{O}_C(D)$ s'identifient naturellement à $\bigoplus_{p \in C} (\underline{K}_C / \mathcal{O}_C(D))_p$, ce qui était le résultat voulu. \square

Dans la suite de la démonstration, on s'intéressera par l'espace dual de $I(D)$, que l'on dénotera par $J(D) := I(D)^\vee$. Par la proposition ci-dessus, un élément de $J(D)$ est une forme linéaire sur R qui s'annule sur K_C et $R(D)$. On considère aussi l'espace vectoriel

$$J = \bigcup_D J(D),$$

où la somme parcourt l'ensemble des diviseurs de C . De même, un élément de J est une forme linéaire sur R qui s'annule sur K_C et $R(D)$ pour un certain diviseur D .

Précisons la structure de K_C -espace vectoriel de J . Si $f \in K_C$ et $\alpha \in J$, on dénote par $f\alpha$ la forme $r \mapsto \alpha(f(r))$. D'abord, cette forme est nulle sur K_C . Aussi, si $\alpha \in J(D)$ et $(f) = D'$, alors $f\alpha$ s'annule sur $R(D - D')$ et donc $f\alpha \in J$. On verra ensuite que même si J est un k -espace vectoriel immense, il se comporte bien comme un K_C -espace vectoriel.

Proposition 3.9 La dimension de J comme K_C -espace vectoriel est 0 ou 1.

En fait, comme on le verra dans la séquence, l'espace J est isomorphe à l'espace des différentielles Ω_C , ce qui implique que sa dimension est exactement 1.

Démonstration. On raisonne par contradiction en supposant que α et α' sont deux éléments de J linéairement indépendants. Soit D tel que $\alpha, \alpha' \in J(D)$ et $d = \deg(D)$.

On fixe un diviseur D_n de degré n . Alors si $f \in H^0(C, \mathcal{O}_C(D_n))$, il suit que $f\alpha \in J(D - D_n)$ par l'argument ci-dessus. Comme α et α' sont linéairement indépendants l'application

$$\begin{aligned} H^0(C, \mathcal{O}_C(D_n)) \oplus H^0(C, \mathcal{O}_C(D_n)) &\rightarrow J(D - D_n) \\ (f, g) &\mapsto \alpha f + \alpha' g \end{aligned}$$

est une injection et donc $\dim_k J(D - D_n) \geq 2h^0(C, \mathcal{O}_C(D_n))$. On démontrera que cette inégalité est fautive si n est assez grand.

D'abord, le côté gauche est $\dim_k I(D - D_n) = h^1(C, \mathcal{O}_C(D - D_n))$. Par la proposition 3.5, cela vaut $h^0(C, \mathcal{O}_C(D - D_n)) + h^1(C, \mathcal{O}_C) - (d - n) - 1 = n + \text{constante}$ si $n > d$. D'autre part, la même proposition implique que $2h^0(C, \mathcal{O}_C(D_n)) = 2n + \text{constante}'$. On obtient donc une contradiction si n est assez grand. \square

Rappelons l'exemple 2.14 : on dit que l'espace vectoriel $\Omega_{K_C/k}$ est l'espace des différentielles méromorphes de C . Il s'agit d'un K_C -espace vectoriel de dimension 1. On peut montrer que si $p \in C$ et t est un générateur du (unique) idéal maximal de $\mathcal{O}_{C,p} \subset K_C$, alors dt engendre l'espace $\Omega_{K_C/k}$. Donc tout élément $\omega \in \Omega_{K_C/k}$ peut être écrit comme $\omega = f dt$ pour $f \in K_C$. Dans ce cas on obtient une valuation sur $\Omega_{K_C/k}$ en faisant

$$v_p(\omega) = v_p(f)$$

pour tout $p \in C$. On dénote par (ω) le diviseur $\sum_{p \in C} v_p(\omega)[p]$ et, si D est un diviseur sur C , par $\Omega_C(D)$ le faisceau des différentielles méromorphes ω satisfaisant $(\omega) + D \geq 0$. Observons que $\Omega_C(D) = \Omega_C \otimes \mathcal{O}_C(D)$. Si $\omega = f dt$, où (t) est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{C,p}$, on peut utiliser un peu d'algèbre commutative pour voir f comme un élément de $k((t))$ et ensuite définir le résidu $\text{res}_p(\omega)$ comme le coefficient de t^{-1} dans l'expansion de f en série de Laurent. On utilisera que le résidu est indépendant du choix de t et que, pour tout $\omega \in \Omega_{K_C/k}$, on a

$$\sum_{p \in C} \text{res}_p(\omega) = 0.$$

Ce résultat s'appelle la *formule des résidus*. Le lecteur intéressé par une démonstration particulièrement élégante de ces résultats peut consulter l'article de John Tate [11]. À l'aide de ces objets, on définira l'accouplement parfait de la dualité de Serre.

Définition 3.8 On définit un accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega_{K_C/k} \times R \rightarrow k$ par la formule $\langle \omega, r \rangle := \sum_{p \in C} \text{res}_p(r_p \omega)$.

Observons quelques faits immédiats.

Lemme 3.10 L'accouplement définit a les propriétés suivantes :

- (a) Si $r \in K_C$ alors $\langle \omega, r \rangle = 0$;
- (b) Si $r \in R(D)$ et $\omega \in H^0(C, \Omega_C(-D))$ alors $\langle \omega, r \rangle = 0$;
- (c) Si $f \in K_C$ alors $\langle f\omega, r \rangle = \langle \omega, fr \rangle$.

Démonstration. Le (a) est la formule des résidus. Le (b) suit du fait que le produit $r_p \omega$ n'a pas de pôle car $r \in R(D)$ et $\omega \in H^0(C, \Omega_C(-D))$. Enfin, le (c) est évident par la définition du accouplement. \square

Finalement, pour chaque $\omega \in \Omega_{K_C/k}$, soit $\theta(\omega)$ la forme linéaire sur R définie par $r \mapsto \langle \omega, r \rangle$. On a alors une application $\theta : \Omega_{K_C/k} \rightarrow J$. Le lemme ci-dessus implique qu'en restreignant on obtient une application $H^0(C, \Omega_C(-D)) \rightarrow J(D)$. La dualité de Serre dit précisément que cette application est un isomorphisme.

Théorème 3.11 — Dualité de Serre. L'application $\theta : H^0(C, \Omega_C(-D)) \rightarrow J(D)$ est un isomorphisme.

Précisons d'abord l'équivalence entre les théorèmes 3.7 et 3.11 : puisque $\Omega_C(-D) = \Omega_C \otimes \mathcal{O}_C(-D)$, l'application θ nous donne un isomorphisme entre $H^0(C, \Omega_C \otimes \mathcal{O}_C(-D))$ et $I(D)^\vee = H^1(C, \mathcal{O}_C(D))^\vee$. Comme tout faisceau inversible est de la forme $\mathcal{O}_C(D)$ pour un diviseur D (théorème 2.9), on obtient l'équivalence.

Prouvons alors un tout dernier lemme.

Lemme 3.12 Si $\omega \in \Omega_{K_C/k}$ est telle que $\theta(\omega) \in J(D)$ alors $\omega \in H^0(C, \Omega_C(-D))$.

Démonstration. Supposons que $\omega \notin H^0(C, \Omega_C(-D))$. C'est-à-dire qu'il existe un point $p \in C$ tel que $v_p(\omega) < v_p(D)$. On définit alors une répartition r en faisant $r_p = t^{-v_p(\omega)-1}$ et $r_q = 0$ pour tout $q \neq p$. Comme $\text{res}_p(r_p \omega) = -1$ on a que $\langle \omega, r \rangle \neq 0$ et donc $\theta(\omega)$ n'est pas zéro sur $R(D)$, ce qui contredit que fait que $\theta(\omega) \in J(D)$. \square

Démonstration de la Dualité de Serre. Si $\theta(\omega) = 0$, alors $\omega \in H^0(C, \Omega_C(-D))$ pour tout diviseur D , par le lemme ci-dessus. Cela implique que $\omega = 0$ et donc θ est injective.

Aussi, par la partie (c) du lemme 3.10, l'application non-restreinte $\theta : \Omega_{K_C/k} \rightarrow J$ est K_C linéaire. Comme la dimension de $\Omega_{K_C/k}$ sur K_C est 1 et celle de J est au plus 1 (proposition 3.9), on a une injection linéaire d'un espace vectoriel vers un autre de dimension plus petite. Il s'agit forcément d'une surjection. \square

A

PRÉLIMINAIRES ALGÈBRIQUES

Dans ce chapitre, on étudiera certains éléments de l'algèbre (commutative) qui seront utiles dans l'étude des schémas affines et, plus généralement, en géométrie algébrique. Tout comme indiqué dans l'introduction, on supposera une relative familiarité avec la théorie des catégories et avec quelques notions usuelles d'algèbre.

A.1 LOCALISATION

Étant donné un anneau A , que l'on supposera toujours commutatif et unitaire, le processus de *localisation* nous permettra d'obtenir un nouvel anneau avec des propriétés algébriquement et géométriquement importantes. Du côté algébrique, la localisation de A sur un idéal principal sera toujours un anneau local (c'est-à-dire qu'il a un seul idéal maximal), ce qui nous permet souvent de réduire les problèmes d'algèbre commutative aux problèmes sur les anneaux locaux. Sur le côté géométrique, la localisation nous permettra d'étudier les propriétés des fonctions au voisinage d'un point donné.

Définition A.1 — Localisation. Une *partie multiplicative* S d'un anneau A est un ensemble $S \subset A$ stable par multiplication et contenant 1. On définit alors la *localisation* $S^{-1}A$ de A en la partie S comme le quotient de $A \times S$ par la relation d'équivalence définie par $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$ si et seulement si il existe $s \in S$ tel que

$$s(s_2a_1 - s_1a_2) = 0.$$

On pose $[(a_1, s_1)] + [(a_2, s_2)] = [(s_2a_1 + s_1a_2, s_1s_2)]$ et $[(a_1, s_1)] \cdot [(a_2, s_2)] = [(a_1a_2, s_1s_2)]$, ce qui donne à $S^{-1}A$ la structure d'anneau. Finalement, on a aussi un morphisme canonique $A \rightarrow S^{-1}A$ donné par $a \mapsto [(a, 1)]$. Dans la suite on notera la classe d'équivalence de (a, s) tout simplement par a/s . Comme on peut le vérifier, les opérations de somme et de produit en $S^{-1}A$ ne dépendent pas du représentant choisi dans la classe d'équivalence.



La condition n'est pas simplement $s_2a_1 - s_1a_2 = 0$ pour assurer la transitivité au cas où A n'est pas intègre. Notez également que le morphisme $A \rightarrow S^{-1}A$ n'est pas nécessairement injectif. C'est le cas précisément si S ne contient pas des diviseurs de zéro.

Dans la suite du texte, on utilisera deux types de parties multiplicatives. Le premier est $S = \{1, f, f^2, \dots\}$, où $f \in A$. Cette localisation est dénotée par A_f . Le second est $S = A \setminus \mathfrak{p}$, où \mathfrak{p} est un idéal premier de A . (Notez que $A \setminus \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative si et seulement si \mathfrak{p} est un idéal premier.) Cette localisation est dénotée par $A_{\mathfrak{p}}$.

■ **Exemple A.1** L'exemple le plus simple de localisation est bien évidemment le corps de fractions d'un anneau intègre; c'est le cas $S = A \setminus (0)$.

Un autre exemple intéressant est $\mathbb{C}[x]_{(x)}$, où l'on peut diviser par un polynôme tant qu'il ne s'annule pas en 0. C'est ainsi que l'on étudie $\mathbb{C}[x]$ au voisinage de 0. ■

Comme la plupart des constructions en algèbre, la localisation satisfait une propriété universelle.

Théorème A.1 — Propriété universelle de la localisation. La localisation $S^{-1}A$ est initiale parmi les A -algèbres B où chaque élément de S est envoyé à un élément inversible en B . En d'autres termes, si $\alpha : A \rightarrow B$ est tel que $\alpha(s)$ est inversible pour tout $s \in S$, alors α factorise uniquement par $A \rightarrow S^{-1}A$:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & S^{-1}A \\ & \searrow \alpha & \downarrow \exists! \\ & & B. \end{array}$$

Démonstration. Comme $\alpha(s)$ est toujours inversible, $a/s \mapsto \alpha(s)\alpha(s)^{-1}$ définit un morphisme $S^{-1}A \rightarrow B$ qui rend le diagramme commutatif. Une vérification rapide montre que ce morphisme est bien défini. L'unicité découle du fait qu'il s'agit d'un objet initial. □

Heureusement, les idéaux premiers de $S^{-1}A$ obéissent à des relations similaires à celles de A/I , où I est un idéal de A . Dorénavant, on utilisera la proposition ci-dessous sans citation.

Soit $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$ le morphisme canonique. Étant donné un idéal I de $S^{-1}A$, on dénote par I^c l'image réciproque de I par φ . C'est un idéal de A appelé *contraction* de I . Pareillement, étant donné un idéal J de A , on dénote par J^e l'idéal engendré par $\varphi(J)$. C'est un idéal de $S^{-1}A$ appelé *extension* de J .

Proposition A.2 Soit \mathfrak{p} un idéal premier de A et \mathfrak{q} un idéal premier de $S^{-1}A$. Alors $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^e$ est une bijection d'inverse $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}^c$ entre les idéaux premiers de A qui ne rencontrent pas la partie multiplicative S et les idéaux premiers de $S^{-1}A$. Cette bijection préserve l'ordre des idéaux.

Démonstration. Soit \mathfrak{q} un idéal premier de $S^{-1}A$. Comme $\mathfrak{q}^c = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in \mathfrak{q}\}$ est premier, il ne rencontre pas S . (Sinon il y aurait un élément inversible dans \mathfrak{q} .) Aussi,

$$(\mathfrak{q}^c)^e = \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \right\} = \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid \frac{a}{1} = \varphi(a) \in \mathfrak{q} \right\}.$$

Si $a/1$ est dans \mathfrak{q} , $(1/s) \cdot (a/1) = a/s$ l'est aussi car \mathfrak{q} est un idéal. Réciproquement, si $a/s = (a/1)(1/s)$ est dans \mathfrak{q} , $a/1$ l'est aussi car \mathfrak{q} est premier et $1/s \notin \mathfrak{q}$. Il suit que $(\mathfrak{q}^c)^e = \mathfrak{q}$.

En revanche, si \mathfrak{p} est un idéal premier de A ne rencontrant pas S , on a que

$$(\mathfrak{p}^e)^c = \{a \in A \mid \varphi(a) \in \mathfrak{p}^e\}.$$

C'est-à-dire qu'il existe $b \in \mathfrak{p}$ et $s \in S$ tel que $a/1 = b/s$. On en déduit qu'il existe $s' \in S$ tel que $s'sa = s'b \in \mathfrak{p}$ et donc $a \in \mathfrak{p}$. Comme c'est évident que $\mathfrak{p} \subset (\mathfrak{p}^e)^c$ le résultat suit. \square

Proposition A.3 — $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de A . Alors $A_{\mathfrak{p}}$ a précisément un idéal maximal.

Démonstration. Un élément $a/b \in A_{\mathfrak{p}}$ est une unité si et seulement si $a \in A \setminus \mathfrak{p}$. On conclut que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est l'ensemble des non-unités de $A_{\mathfrak{p}}$. Cet idéal est maximal parce que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subsetneq I$ implique que I contient une unité et donc $I = A_{\mathfrak{p}}$. Aussi, c'est l'unique idéal maximal car tout idéal maximal est contenu dans l'ensemble des non-unités. \square

En plus des anneaux, des modules peuvent également être localisés.

Définition A.2 Soit M un A -module et S une partie multiplicative de A . On définit $M \rightarrow S^{-1}M$ comme étant initial parmi les morphismes de A -modules de M vers les modules qui sont aussi $S^{-1}A$ -modules. En d'autres termes, un morphisme $\alpha : M \rightarrow N$ (où N est un $S^{-1}A$ -module) factorise uniquement par φ :

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & S^{-1}M \\ & \searrow \alpha & \downarrow \exists! \\ & & N. \end{array}$$



On observe que cela définit $S^{-1}M$ à isomorphisme unique près comme un A -module et un $S^{-1}A$ -module. Il devrait être clair que la construction évidente fonctionne encore ici.

On peut également voir la localisation des modules comme un produit tensoriel.

Proposition A.4 Soit M un A -module et S une partie multiplicative de A . Alors $S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$ comme $S^{-1}A$ -modules et A -modules.

Démonstration. L'application $S^{-1}A \times M \rightarrow S^{-1}M$ donné par $(a/s, m) \mapsto am/s$ est bilinéaire et donc induit un morphisme $f : S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}M$. Évidemment ce morphisme est surjectif.

Soit $\sum_i (a_i/s_i) \otimes m_i$ un élément quelconque de $S^{-1}A \otimes_A M$. Si $s = \prod_i s_i$ et $t_j = \prod_{i \neq j} s_i$, on vérifie que

$$\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_i \frac{a_i t_i}{s} \otimes m_i = \frac{1}{s} \otimes \left(\sum_i a_i t_i m_i \right).$$

En d'autres termes, tout élément de $S^{-1}A \otimes_A M$ est de la forme $(1/s) \otimes m$. Finalement, si $f((1/s) \otimes m) = 0$, on a que $m/s = 0$ et donc il existe $t \in S$ tel que $tm = 0$. Cela implique que

$$\frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{st} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = 0.$$

D'où f est injective et par conséquent un isomorphisme. \square

A.2 NULLSTELLENSÄTZE

Si k est un corps algébriquement clos, alors tout idéal maximal de $k[x]$ est de la forme $(x - c)$ pour $c \in k$. Cela peut être facilement prouvé en utilisant que $k[x]$ est euclidien. Néanmoins, sa généralisation évidente, à savoir que les idéaux maximaux de $k[x_1, \dots, x_n]$ sont de la forme $(x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n)$ pour $c_1, \dots, c_n \in k$, est beaucoup plus difficile (et profonde!) que ce qui paraît. C'est une facette du célèbre théorème connu sous le nom de Nullstellensatz de Hilbert.

Notre point de départ sera un lemme de Zariski, qui clarifie un aspect important de la théorie des algèbres ; si S est une algèbre sur un corps (pas nécessairement algébriquement clos) k , S peut être finiment engendré comme algèbre ou comme module. Certes, toute l'algèbre finiment engendré comme algèbre est aussi finiment engendré comme module. Le théorème ci-dessous montre que l'implication réciproque vaut si S est un corps.

Théorème A.5 — Lemme de Zariski. Soit F/k une extension de corps et supposons que F soit finiment engendré comme k -algèbre. Alors F/k est une extension finie.

On prouvera ce théorème sous l'hypothèse supplémentaire que k est non dénombrable. Étonnamment, cette hypothèse (étrangement artificielle) nous permet de réduire la démonstration à l'algèbre linéaire élémentaire.

Démonstration. Puisque F est finiment engendré comme k -algèbre, il suffit de prouver que F/k est une extension algébrique. C'est-à-dire que chaque $\alpha \in F \setminus k$ est la racine d'un polynôme non nul $f \in k[x]$.

Comme quotient d'un anneau de polynômes, F a une base dénombrable comme espace vectoriel sur k . Cela implique que la famille $\{1/(\alpha - c) \mid c \in k\}$ est forcément liée. En d'autres termes, il existe $c_1, \dots, c_n \in k$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k \setminus \{0\}$ tels que

$$\frac{\lambda_1}{\alpha - c_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\alpha - c_n} = 0.$$

En exprimant cette équation avec un dénominateur commun, on obtient un polynôme non nul $f \in k[x]$ tel que $f(\alpha) = 0$. \square

Ce théorème nous permettra alors de prouver le résultat annoncé précédemment.

Corollaire A.6 — Nullstellensatz faible. Soit k un corps algébriquement clos et I un idéal de $k[x_1, \dots, x_n]$. Alors I est maximal si et seulement si

$$I = (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n),$$

pour $c_1, \dots, c_n \in k$.

Démonstration. Si $c_1, \dots, c_n \in k$, la suite (le morphisme $k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k$ est donné par $f \mapsto f(c_1, \dots, c_n)$)

$$0 \longrightarrow (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n) \longrightarrow k[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

est exacte et donc $(x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n)$ est maximal. Réciproquement, si \mathfrak{m} est un idéal maximal de $k[x_1, \dots, x_n]$, le corps $F := k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$ est finiment engendré comme k -algèbre et donc, par le lemme de Zariski, l'extension F/k est algébrique. Comme k est algébriquement clos, on conclut que $F = k$. En d'autres termes, on obtient un morphisme surjective

$$\varphi : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k$$

tel que $\mathfrak{m} = \ker \varphi$. En posant $c_i := \varphi(x_i)$, on voit que

$$(x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n) \subset \ker \varphi = \mathfrak{m}.$$

Par maximalité de \mathfrak{m} le résultat suit. □

Il est intéressant de noter que ce corollaire est clairement faux dans les corps non algébriquement clos; $(x^2 + 1)$ est un idéal maximal de $\mathbb{R}[x]$. Il y a encore un deuxième corollaire qui est utile pour prouver une version plus forte de Nullstellensatz.

Corollaire A.7 Soit k un corps algébriquement clos. Si f_1, \dots, f_m sont des polynômes dans $k[x_1, \dots, x_n]$ sans zéros communs, alors $(f_1, \dots, f_m) = (1)$.

Démonstration. Si I est un idéal propre de $k[x_1, \dots, x_n]$, alors I est contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m} = (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n)$ et donc (c_1, \dots, c_n) est une racine commune des éléments de I . On en déduit que (f_1, \dots, f_m) n'est pas un idéal propre. □

RÉFÉRENCES

- [1] P. ALUFFI : *Algebra : Chapter 0 : Chapter 0*, vol. 104. American Mathematical Soc., 2009.
- [2] M. ATIYAH : *Introduction to commutative algebra*. CRC Press, 2018.
- [3] D. EISENBUD et J. HARRIS : *The geometry of schemes*, vol. 197. Springer Science & Business Media, 2006.
- [4] R. GODEMENT : *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, vol. 1. Hermann, 1958.
- [5] R. GODEMENT : *Introduction à la théorie des groupes de Lie*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [6] A. GROTHENDIECK : Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Mathematical Journal*, 9(2):119–183, 1957.
- [7] R. HARTSHORNE : *Algebraic geometry*, vol. 52. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] S. KLEIMAN : Misconceptions about K_X . *Enseign. Math*, 25:203–206, 1979.
- [9] Q. LIU : *Algebraic geometry and arithmetic curves*, vol. 6. Oxford University Press on Demand, 2002.
- [10] J.-P. SERRE : *Groupes algébriques et corps de classes*. Hermann, 1959.
- [11] J. TATE : Residues of differentials on curves. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 1:149–159, 1968.
- [12] R. VAKIL : The rising sea : Foundations of algebraic geometry. URL : <http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf>, 2017.
- [13] C. A. WEIBEL : *An introduction to homological algebra*, vol. 38. Cambridge university press, 1995.