LE GROUPE FONDAMENTAL ÉTALE

Tuteur : Antoine DUCROS

Gabriel RIBEIRO

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

INTRODUCTION

Présentation du sujet

Cherchant à comprendre la profonde analogie entre les classifications des extensions de corps et des revêtements d'espaces topologiques, A. Grothendieck a axiomatisé les différentes incarnations des théories galoisiennes dans le cadre des « catégories galoisiennes ». Cette formulation, outre qu'elle est élégante, a permis pour la première fois de définir le groupe fondamental d'un schéma (et en particulier d'une variété sur un corps quelconque).

En topologie, il y a deux approches au groupe fondamental : par les lacets et par les revêtements. Le groupe fondamental d'un schéma, appelé *étale* ou *algébrique*, est un analogue en géométrie algébrique de cette deuxième approche.

Dans ce rapport, nous étudions donc les analogues des revêtements dans la théorie des schémas, les morphismes étales, et nous les utilisons pour comprendre les propriétés importantes du groupe fondamental étale. En particulier, dans le cas d'un schéma localement de type fini sur $\mathbb{C}$, qui possède naturellement une topologie analytique en plus de la topologie de Zariski, on voit que le groupe fondamental étale a des propriétés similaires à celles du groupe fondamental topologique dans la topologie analytique.

Précisément, on verra que le groupe fondamental d'une courbe propre, lisse et connexe de genre g sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est isomorphe au complété profini du groupe fondamental d'une surface de Riemann de même genre :

$$\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

L'analogue de ce résultat en caractéristique première, le théorème 4.4, a été le premier gros succès de la théorie des schémas. Sa démonstration consiste à passer « continûment » de caractéristique 0 à caractéristique p, ce qui n'était pas possible sans la théorie des schémas.

Remerciements

Je ne pourrais commencer ce rapport sans remercier Antoine Ducros, mon tuteur de stage, qui a toujours été présent pour m'aider à traverser les moments difficiles. L'expérience et l'attention dont il m'a fait bénéficier ont été essentielles à la réussite de mon stage.

Je tiens également à remercier Gaëtan Chenevier, qui a toujours été très attentif au bon déroulement de mon stage.

TABLE DES MATIÈRES

1 Théorie de Galois de Grothendieck **1**
1.1 Le cas des actions transitives 1
1.2 Algèbres étales 2
1.3 Conditions axiomatiques d'une théorie de Galois 4

2 Revêtements étales finis **7**
2.1 Morphismes lisses 7
2.2 Morphismes étales 8
2.3 Théorie de Galois pour les revêtements étales finis 10

3 Le groupe fondamental algébrique **15**
3.1 Définition et théorème principal 15
3.2 Propriétés de base du groupe fondamental 18

4 Théorèmes de comparaison **20**
4.1 Topologie analytique 20
4.2 Comparaison entre les groupes fondamentaux 21
4.3 Esquisse de démonstration du dernier théorème 22

Références **25**

1
Théorie de Galois de Grothendieck

Dans ce chapitre, on va réinterpréter la théorie de Galois d'une manière axiomatique qui englobe plusieurs théories similaires, comme la théorie des revêtements, et qui culminera dans notre description du groupe fondamental d'un schéma.

1.1 Le cas des actions transitives

Commençons par rappeler le théorème fondamental de la théorie de Galois. Le lecteur intéressé par une exposition complète de cette théorie peut voir [11].

Théorème 1.1 — Théorème fondamental de la théorie de Galois. Soit $L|k$ une extension galoisienne avec groupe de Galois G. Les applications

$$K \mapsto H := \mathrm{Aut}(L|K) \qquad \text{et} \qquad H \mapsto K := L^H$$

mettent en bijection décroissante l'ensemble des sous-extensions $L \supset K \supset k$ et l'ensemble des sous-groupes fermés $H \subset G$. L'extension $L|K$ est toujours galoisienne et $\mathrm{Gal}(L|K)$ est toujours fermé dans G. L'extension $K|k$ est galoisienne si et seulement si $\mathrm{Gal}(L|K)$ est un sous-groupe distingué de G ; dans ce cas on a $\mathrm{Gal}(K|k) \cong G/H$.

Dans ce qui suit, on fixera un corps k, une clôture algébrique $\bar{k}$ et la fermeture séparable k_s de k dans $\bar{k}$. L'approche de Grothendieck est de considérer l'ensemble $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ des morphismes de k-algèbres $L \to k_s$, où $L|k$ est une extension séparable finie (pas forcement une sous-extension de $\bar{k}|k$). Cet ensemble est fini car il y a exactement $[L : k]$ morphismes $L \to \bar{k}$. Il admet une action (à gauche) naturelle du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(k)$ donné par $(g, \varphi) \mapsto g \circ \varphi$, où $g \in \mathrm{Gal}(k)$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(L, k_s)$.

Proposition 1.2 L'action à gauche de $\mathrm{Gal}(k)$ sur $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ est continue et transitive. Donc $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ est isomorphe comme $\mathrm{Gal}(k)$-ensemble à $\mathrm{Gal}(k)/H$, pour un sous-groupe H. Si $L|k$ est galoisienne, ce sous-groupe est distingué.

Démonstration. Comme $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ est muni de la topologie discrète, il suffit, pour montrer que l'action $\mathrm{Gal}(k) \times \mathrm{Hom}_k(L, k_s) \to \mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ est continue, de montrer que l'image réciproque de n'importe quel élément du but est ouverte, ou encore fermée car cet ensemble est fini. Aussi, l'image réciproque de $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ n'est rien d'autre que

$$\{(g, \psi) \in \mathrm{Gal}(k) \times \mathrm{Hom}_k(L, k_s) \mid g \circ \psi = \varphi\} = \coprod_\psi \{(g, \psi) \in \mathrm{Gal}(k) \times \{\psi\} \mid g \circ \psi = \varphi\}$$

et chacun de ces ensembles est homéomorphe au stabilisateur de ψ. Mais ce stabilisateur est composé par les éléments de $\mathrm{Gal}(k)$ fixant $\varphi(L)$ et donc, par le théorème 1.1, est fermé. D'où la continuité.

Si $L = k(\alpha)$, alors un élément de $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ est déterminé par un conjugué de α dans k_s. Comme $\mathrm{Gal}(k)$ permute ces conjugués transitivement, il suit que l'action est transitive. La dernière partie de la proposition est déjà dans le théorème 1.1. □

Observons que si $M|k$ est une autre extension séparable finie, alors un morphisme de k-algèbres $L \to M$ induit une application $\mathrm{Hom}_k(M, k_s) \to \mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ par composition. Comme cette application est $\mathrm{Gal}(k)$-équivariante, on obtient un foncteur contravariant de la catégorie des extensions séparables finies de k vers la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue et transitive de $\mathrm{Gal}(k)$.

Théorème 1.3 Le foncteur $\mathrm{Hom}_k(-, k_s)$ induit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des extensions séparables finies de k et la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue et transitive de $\mathrm{Gal}(k)$. Dans cette équivalence, une extension galoisienne donne lieu à un $\mathrm{Gal}(k)$-ensemble isomorphe à un quotient fini par un sous-groupe distingué de $\mathrm{Gal}(k)$.

Démonstration. Montrons d'abord que le foncteur $\mathrm{Hom}_k(-, k_s)$ est essentiellement surjectif. Soit S un ensemble fini muni d'une action continue et transitive de $\mathrm{Gal}(k)$ et soit $s \in S$. Le stabilisateur $\mathrm{Stab}(s)$ est un sous-groupe ouvert (car, en notant l'action par $\alpha : \mathrm{Gal}(k) \times S \to S$, on a $\mathrm{Stab}(s) \times \{s\} = \alpha^{-1}(s) \cap (\mathrm{Gal}(k) \times \{s\})$) qui fixe une extension séparable finie L de k. Alors l'application $g \circ \iota \mapsto g \cdot s$, où $\iota : L \to k_s$ est l'inclusion naturelle, définit un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(k)$-ensembles entre $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ et S. C'est bien défini car l'action sur $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ est transitive et le stabilisateur de ι coïncide avec $\mathrm{Stab}(s)$ et c'est un isomorphisme car l'action sur S est transitive.

Pour montrer que le foncteur est pleinement fidèle, observons qu'un morphisme équivariant $f : \mathrm{Hom}_k(M, k_s) \to \mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ entre ces $\mathrm{Gal}(k)$-ensembles transitives est déterminé par l'image d'un élément $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(M, k_s)$. Par équivariance le stabilisateur de φ fixe $f(\varphi)$ aussi, d'où $\mathrm{Stab}(\varphi) \subset \mathrm{Stab}(f(\varphi))$. En passant aux corps fixés on voit que $f(\varphi)(L) \subset \varphi(M)$. En notant par $\psi : \varphi(M) \to M$ l'inverse de φ, il découle que $\psi \circ f(\varphi)$ est l'unique élément de $\mathrm{Hom}_k(L, M)$ déterminant f. La dernière partie suit de la proposition 1.2. □

1.2 ALGÈBRES ÉTALES

Comme on le verra plus clairement dans la section suivante, on aimerait avoir une équivalence de catégories qui n'exige pas que l'action soit transitive. On étudiera pour commencer l'objet qui nous permettra de le faire : les algèbres étales.

Définition 1.1 — Algèbre étale. Une k-algèbre A est *étale* si elle est isomorphe à un produit fini d'extensions séparables finies de k.

Il est clair que les extensions séparables finies sont des algèbres étales et que les produits finis d'algèbres étales sont étales. Par exemple, la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}(i)$ est étale. La proposition ci-dessous nous permet d'obtenir quelques propriétés supplémentaires.

Proposition 1.4 Soit A une k-algèbre finie commutative. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est étale;
2. $A \otimes_k \bar{k}$ est isomorphe à un produit fini de copies de $\bar{k}$;
3. $A \otimes_k \bar{k}$ est réduite;
4. $\Omega_{A/k} = 0$.

Il en découle qu'une sous-algèbre d'une algèbre étale est étale, qu'une algèbre obtenue par extension des scalaires à partir d'une algèbre étale est étale et qu'un produit tensoriel d'algèbres étales est étale. La preuve de ce résultat n'est pas très simple et peut être trouvée dans [3] (Corollary 16.16) et [15] (Proposition 1.5.6).

Tout comme avant, si A est une algèbre étale, le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(k)$ agit sur $\mathrm{Hom}_k(A, k_s)$ et cet ensemble est fini. Observons que si $A = \prod_i L_i$, alors un morphisme $\varphi : A \to k_s$ se factorise par l'injection d'un L_i sur k_s. En fait, le noyau de $\varphi : A \to k_s$ est un idéal maximal $\mathfrak{m}$ (c'est un corollaire usuel au lemme de Zariski) et $A/\mathfrak{m} \cong L_i$ pour un i. En utilisant la même procédure de la proposition 1.2 on conclut que l'action de $\mathrm{Gal}(k)$ sur $\mathrm{Hom}_k(A, k_s)$ est continue.

On obtient ainsi un foncteur $\mathrm{Hom}_k(-, k_s)$ de la catégorie des k-algèbres étales vers celle des ensembles finis munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(k)$. De cette façon on améliore le théorème précèdent.

Théorème 1.5 Le foncteur $\mathrm{Hom}_k(-, k_s)$ induit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des algèbres étales sur k et la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(k)$. Dans cette équivalence, une extension séparable donne lieu à un ensemble muni d'une action transitive et une extension galoisienne donne lieu à un $\mathrm{Gal}(k)$-ensemble isomorphe à un quotient fini par un sous-groupe distingué de $\mathrm{Gal}(k)$.

Démonstration. Comme on a vu, si $A = \prod_i L_i$ alors $\mathrm{Hom}_k(A, k_s)$ se décompose comme l'union disjointe des $\mathrm{Gal}(k)$-orbites $\mathrm{Hom}_k(L_i, k_s)$. La surjectivité essentielle suit alors du théorème 1.3. Par ailleurs, pour la même raison que ci-dessus, un morphisme $A = \prod_i L_i \to A' = \prod_j L'_j$ entre des algèbres étales s'identifie à une collection de morphismes $L_i \to L'_j$ pour chaque i. Ces morphismes sont en bijection avec les morphismes $\mathrm{Hom}_k(L_i, k_s) \to \mathrm{Hom}_k(L'_j, k_s)$ par le même théorème 1.3. Il s'ensuit que le foncteur $\mathrm{Hom}_k(-, k_s)$ est pleinement fidèle. $\square$

Ce résultat se généralise immédiatement à une extension galoisienne quelconque $K|k$: on obtient une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des algèbres étales qui sont des produits de sous-corps de K vers la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(K|k)$.

1.3 Conditions axiomatiques d'une théorie de Galois

Comme on l'a commenté dans l'introduction, il existe une analogie très étroite entre la théorie de Galois et la théorie des revêtements d'un espace topologique. Pour tenter de comprendre la relation entre ces résultats, A. Grothendieck les a réinterprétés en termes d'équivalences de catégories avec la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue d'un groupe profini donné.[1] Ces réinterprétations ont conduit Grothendieck à axiomatiser les propriétés de ces catégories qui ont fait fonctionner la théorie. C'est cette axiomatisation que l'on va étudier dans cette section.

La notion saillante est celle de *catégorie galoisienne*, décrite dans le quatrième exposé du premier volume du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie [6]. Notre présentation, basée sur [9], est une simplification (au prix d'une hypothèse ensembliste sur le théorème 1.6) de l'originale car elle ne mentionne pas d'épimorphismes stricts.

Définition 1.2 — Catégorie galoisienne. Une catégorie $\mathbf{C}$, muni d'un foncteur covariant F entre $\mathbf{C}$ et la catégorie des ensembles finis, est *galoisienne* si elle satisfait les axiomes suivants :

(G1) $\mathbf{C}$ a un objet final et le produit fibré de deux objets au-dessus d'un troisième dans $\mathbf{C}$ existe.

(G2) Les sommes finies dans $\mathbf{C}$ existent (donc aussi un objet initial, jouant le rôle de l'ensemble vide), ainsi que le quotient d'un objet de $\mathbf{C}$ par un groupe fini d'automorphismes.

(G3) Soit $u : X \to Y$ un morphisme dans $\mathbf{C}$, alors u se factorise en un produit $X \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{u''} Y$, avec u' un épimorphisme et u'' un monomorphisme, qui est un isomorphisme sur un sommande direct de Y.

(G4) Le foncteur F est exact à gauche.

(G5) F commute aux sommes directes finies, transforme épimorphismes en épimorphismes, et commute au passage au quotient par un groupe fini d'automorphismes.

(G6) Soit $u : X \to Y$ un morphisme dans $\mathbf{C}$ tel que $F(u)$ soit un isomorphisme, alors u est un isomorphisme.

Remarquons d'abord quelques faits : l'axiome (G1) est équivalent à dire que $\mathbf{C}$ admet des

1. Dans le cas de la théorie de Galois, ce groupe est le groupe de Galois et dans le cas de la théorie des revêtements, ce groupe est le complété profini du groupe fondamental.

limites finies et, pour une telle catégorie, le foncteur F est exact à gauche (G4) si et seulement si F transforme objet final en objet final et commute aux produits fibrés.

La raison d'être de cette notion est le théorème ci-dessous, qui généralise les théorèmes fondamentaux de la théorie de Galois et de la théorie des revêtements.

Théorème 1.6 Soit $\mathbf{C}$ une catégorie galoisienne *essentiellement petite* [a], munie d'un foncteur F. Alors le groupe $\pi = \mathrm{Aut}(F)$ a une topologie naturelle qui en fait un groupe profini et F definit une équivalence de catégories entre $\mathbf{C}$ et la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de π.

a. C'est-à-dire que $\mathbf{C}$ est équivalente à une catégorie dont les objets forment un ensemble. La formulation originale de Grothendieck n'impose pas cette condition ensembliste.

On démontrera un cas particulier de ce théorème au troisième chapitre. Le lecteur peut voir la démonstration complète dans [9]. Pour l'instant, voyons comment certains résultats connus s'inscrivent dans ce cadre.

Proposition 1.7 La catégorie opposée de celle des algèbres étales sur un corps k, avec le foncteur $F := \mathrm{Hom}_k(-, k_s)$, est galoisienne.

Démonstration.

(G1) Notons que k est l'objet initial et produit tensoriel est le coproduit fibré dans la catégorie des algèbres étales. En fait, si A, B et C sont des algèbres étales, alors $B \otimes_k \overline{k} = \overline{k}^n$, pour un entier n, et donc $(A \otimes_C B) \otimes_k \overline{k} = (A \otimes_C \overline{k})^n$ est un quotient de $(A \otimes_k \overline{k})^n = \overline{k}^m$ pour un entier m. Il suit que $A \otimes_C B$ est étale par la proposition 1.4. On conclut que k est l'objet final et que le produit tensoriel est le produit fibré dans la catégorie opposée.

(G2) Le produit cartésien d'un nombre fini d'algèbres étales est encore étale et donc c'est le coproduit dans la catégorie opposée. (L'objet initial est bien sûr l'algèbre triviale $\{0\}$.) Le quotient dans la catégorie opposée est précisément la sous-algèbre fixée par l'action du groupe.

(G3) Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'algèbres étales. En tant que morphisme d'anneaux, φ se factorise en un produit

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathrm{im}\,\varphi \hookrightarrow B.$$

Comme toute sous-algèbre, $\mathrm{im}\,\varphi$ est aussi étale et donc ces morphismes sont tous entre des algèbres étales. Aussi, si $\varphi : A \to B$ est un épimorphisme, alors il s'agit d'une surjection (car φ est fini)[2]. On en déduit que $A \cong B \times \ker \varphi$ où φ s'identifie à la projection vers B.

(G4) Tout d'abord, $F(k) = \mathrm{Hom}_k(k, k_s)$ n'a qu'un élément et donc le foncteur transforme objet final en objet final. Aussi, $F(A \otimes_C B) = \mathrm{Hom}_k(A \otimes_C B, k_s)$ n'est rien d'autre que

$$\{\varphi \in \mathrm{Hom}_k(A, B; k_s) \mid \varphi(c, 1) = \varphi(1, c), \text{ pour tout } c \in C\} = F(A) \times_{F(C)} F(B).$$

En d'autres termes, F commute aux produits fibrés.

2. Le lecteur peut voir la section 10.106 du Stacks Project, par exemple.

(G5) Tout d'abord, F commute aux sommes directes finies car un morphisme d'algèbres est déterminé par les images des générateurs. Soit $\varphi : A \to B$ un monomorphisme d'algèbres étales (c'est-à-dire un epimorphisme $B \to A$ dans la catégorie opposée). Comme φ est injectif, A s'identifie à une sous-algèbre de B. On en déduit que $F(\varphi) : \mathrm{Hom}_k(B, k_s) \to \mathrm{Hom}_k(A, k_s)$ est surjectif et donc un epimorphisme.

Pour la dernière partie, j'affirme que si G est un groupe fini d'automorphismes, alors $\mathrm{Hom}_k(A^G, k_s) = \mathrm{Hom}_k(A, k_s)/G$ où $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_k(A, k_s)$ sont identifiés si $\varphi = \psi \circ g$ pour $g \in G$. Sans perte de généralité, on peut supposer que A est une extension finie séparable de k et que $A \subset k_s$. Notons que, dans ce cas, A/A^G est une extension galoisienne, que l'image d'un morphisme $A \to k_s$ est contenue dans A et que $\mathrm{Gal}(A/A^G) = G$. Si $\varphi = \psi \circ g$, alors $\varphi(x) = \psi(g(x)) = \psi(x)$ pour tout $x \in A^G$. Aussi, si φ et ψ coïncident sur A^G, alors ψ peut être vu comme un automorphisme de A et donc $\varphi \circ \psi^{-1} \in \mathrm{Gal}(A/A^G) = G$. Le résultat suit.

(G6) Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'algèbres étales tel que $\mathrm{Hom}_k(B, k_s) \to \mathrm{Hom}_k(A, k_s)$ est une bijection. Si A et B sont des extensions séparables finies de k, la condition implique que A et B ont la même dimension et donc φ est un isomorphisme (c'est injectif entre des espaces vectoriels de même dimension).

Dans le cas général où $A = \prod_i L_i$ et $B = \prod_j L'_j$, la condition implique que φ s'identifie à une collection de morphismes $L_i \to L'_j$ où chaque facteur de A est envoyé sur précisément un facteur de B. En fait, $\mathrm{Hom}_k(B, k_s) \to \mathrm{Hom}_k(A, k_s)$ est une bijection équivariante et donc les $\mathrm{Gal}(k)$-orbites $\mathrm{Hom}_k(L_i, k_s)$ et $\mathrm{Hom}_k(L'_j, k_s)$ sont en bijection. Le cas général suit donc du cas particulier. □

On peut également prouver le résultat ci-dessous. Le lecteur intéressé peut voir [9].

Proposition 1.8 Soit X un espace topologique connexe et soit $x \in X$. Alors la catégorie des revêtements finis, munie du foncteur Fib_x qui associe à chaque revêtement $p : Y \to X$ la fibre $p^{-1}(x)$, est une catégorie galoisienne.

De même, dans le contexte de la géométrie algébrique, la catégorie des revêtements finis étales d'un schéma connexe est galoisienne. C'est ce fait qui nous permettra de définir la bonne notion de groupe fondamental pour les schémas.

2
REVÊTEMENTS ÉTALES FINIS

Dans ce chapitre, on présentera les objets qui ont le rôle en géométrie algébrique que les revêtements ont en topologie. On supposera une connaissance de base de la théorie des schémas (similaire au deuxième chapitre de [8]).

2.1 MORPHISMES LISSES

En géométrie algébrique, la notion de morphisme lisse est similaire à la notion de submersion en géométrie différentielle. Notre définition ne rendra pas la motivation géométrique très claire a priori, mais il sera plus pratique de prouver les résultats qui nous intéressent.

Définition 2.1 — Morphisme lisse. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *lisse de dimension relative n* s'il existent des recouvrements ouverts $\{U_i\}$ de X et $\{V_i\}$ de S, avec $f(U_i) \subset V_i$, tels que pour tout i l'on ait un diagramme commutative

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f|_{U_i}"'] & W \arrow[d, "\rho|_W"] \\ V_i \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{Spec} A, \end{tikzcd}$$

où W est un sous-schéma ouvert de $\operatorname{Spec} A[x_1, \ldots, x_{n+r}]/(f_1, \ldots, f_r)$ et ρ est l'application entre les spectres induite par $A \to A[x_1, \ldots, x_{n+r}]/(f_1, \ldots, f_r)$, tel que

$$\det \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{i,j \leq r}$$

soit une unité dans $A[x_1, \ldots, x_{n+r}]/(f_1, \ldots, f_r)$. Si $x \in X$, on dit que f est *lisse de dimension relative n en x* s'il y a un voisinage U de x tel que $f|_U$ soit lisse de dimension relative n.

L'expression « de dimension relative n » est généralement utilisée pour dire que les fibres du morphisme ont toutes dimension n. C'est d'ailleurs ce qui se passe dans ce cas.

Il ressort clairement de la définition que, si A est un anneau, le schéma $\mathbb{A}^n_A$ sur $\operatorname{Spec} A$ est lisse de dimension relative n. Plus généralement, si Y est un schéma, les morphismes $\mathbb{A}^n_Y \to Y$ et $\mathbb{P}^n_Y \to Y$ sont lisses de dimension relative n.

De plus, il est clair qu'un tel morphisme est localement de présentation finie (donc localement de type fini) et que le lieu de tous les $x \in X$ où f est lisse de dimension relative n est ouvert.

Proposition 2.1 La propriété d'être lisse de dimension relative n est stable par changement de base. Aussi, si $f : X \to Y$ est lisse de dimension relative n et $g : Y \to Z$ est lisse de dimension relative m, alors $g \circ f : X \to Z$ est lisse de dimension relative $n + m$.

Démonstration. Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse de dimension relative n et $h : Y \to S$ un morphisme de schémas quelconque. On veut montrer que $X \times_S Y \to Y$ est aussi lisse de dimension relative n. Sans perte de généralité, supposons les schémas affines (notons $Y = \operatorname{Spec} B$) et que

$$f : \operatorname{Spec} A[x_1, \ldots, x_{n+r}]/(f_1, \ldots, f_r) \to \operatorname{Spec} A.$$

Dans ce cas, l'affirmation n'est rien d'autre que si $\det(\partial f_j / \partial x_i)_{i,j \leq r}$ est une unité dans l'anneau $A[x_1, \ldots, x_{n+r}]/(f_1, \ldots, f_r)$, alors il l'est aussi dans $B[x_1, \ldots, x_{n+r}]/(f_1, \ldots, f_r)$, ce qui est clair. La deuxième partie découle de la même façon en passant au cas affine. $\square$

On termine cette section avec une petite remarque. Il existe de nombreuses définitions différentes (mais équivalentes) de morphisme lisse dans la littérature. La définition la plus courante consiste à dire que $f : X \to S$ est lisse de dimension relative n si f est localement de présentation finie, plat[3], de dimension relative n (dans le sens où les fibres ont dimension n) et si $\Omega_{X/S}$ est localement libre de rang n.

Le lecteur trouvera probablement la définition 2.1 sous le nom « critère jacobien » dans la littérature.

2.2 MORPHISMES ÉTALES

Tout comme un morphisme lisse était l'analogue en géométrie algébrique des submersions, les morphismes étales sont l'analogue des isomorphismes locaux. C'est pourquoi ils sont importants dans notre étude des revêtements.

Définition 2.2 — Morphisme étale. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *étale* si f est lisse de dimension relative 0. Un *revêtement étale fini* est un morphisme étale fini. On note $\mathbf{FEt}_S$ la catégorie des revêtements étales finis de but S.

Là encore, il existe de nombreuses définitions équivalentes de ce concept. Outre les deux définitions de « lisse de dimension relative 0 » vues dans la section précédente, un morphisme fini $X \to S$ est étale si et seulement s'il est localement de présentation finie, plat et si la fibre X_s est le spectre d'une algèbre étale pour tout $s \in S$. Cela relie nos définitions

3. On dit qu'un morphisme $f : X \to S$ est *plat* si les morphismes induits sur les fibres $f_x : \mathcal{O}_{S,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ donnent à $\mathcal{O}_{X,x}$ une structure de $\mathcal{O}_{S,f(x)}$-module plat pour tout $x \in X$.

d'algèbres et morphismes étales. En fait, une k-algèbre finie A est étale si et seulement si le morphisme $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} k$ l'est.

De plus, pour un morphisme $f : X \to S$ fini, plat, et localement de type fini, les assertions suivantes sont équivalentes :

— Le morphisme f est étale ;

— Le faisceau des differentielles rélatives $\Omega_{X/S}$ est zéro ;

— Le morphisme diagonal $X \to X \times_S X$ est un isomorphisme sur un sous-schéma ouvert et fermé de $X \times_S X$.

(C'est la proposition 3.5 dans [10] en tenant compte du fait qu'un morphisme fini est nécessairement séparé.) Ce point de vue implique le résultat suivant.

Proposition 2.2 Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to S$ des morphismes de schémas. Si $g \circ s$ est fini et g est séparé, alors f est fini. De plus, si $g \circ f$ et g sont des revêtements étales finis, alors il est de même pour f.

Démonstration. Comme $g \circ f : X \to S$ est fini, il est de même pour le changement de base $X \times_S Y \to Y$. De plus, comme g est séparé, le graphe $X \to X \times_S Y$ est une immersion fermée et donc fini. En composant les deux on obtient que f est aussi fini. La deuxième partie suit de la même façon en utilisant la proposition 2.1 et le caractère étale à partir du morphisme diagonal. □

Observons enfin un corollaire de la proposition 1.4. Soit $\bar{s} : \operatorname{Spec} \Omega \to S$, où Ω est un corps algébriquement clos, $\bar{s}$ un point géometrique de S et s le point de S image de $\bar{s}$. La fibre X_s est alors le spectre d'une $\kappa(s)$-algèbre étale si et seulement si la fibre géométrique $X_{\bar{s}}$ est le spectre d'un produit fini de copies de Ω.

■ **Exemple 2.1** La théorie algébrique des nombres est une source importante de revêtements étales. Si $K \subset L$ sont des corps de nombres et $\mathscr{O}_K$, $\mathscr{O}_L$ sont leurs anneaux d'entiers, alors $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_L \to \operatorname{Spec} \mathscr{O}_K$ est un morphisme fini et surjectif de schémas. Il est étale au-dessus du complémentaire de l'ensemble des premiers qui se ramifient. Par conséquent, il est étale si et seulement si l'extension L/K est non ramifiée. ■

La proposition ci-dessous illustre la similitude entre les revêtements étales et les revêtements topologiques. Comme dans la théorie classique, un revêtement étale $X \to S$ est *trivial* si X est isomorphe en tant que schéma sur S à une réunion disjointe finie de copies de S.

Proposition 2.3 Soit S un schéma connexe et $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Alors f est un revêtement étale fini si et seulement si f est affine et il existe un morphisme fini, plat, surjectif et localement de présentation finie $g : Y \to S$ tel que $X \times_S Y \to Y$ est un revêtement trivial.

Le lecteur peut voir la démonstration dans [9] (théorème 5.10), sachant qu'un morphisme fini de schémas est localement libre si et seulement s'il est plat et localement de présentation finie. (Tag 02KB du Stacks Project.)

Dans le cas d'un schéma régulier, un résultat important sur les revêtements étales est le théorème ci-dessous. Rappelons que la *codimension* d'un point x d'un schéma localement noethérien X est la dimension du anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$.

Théorème 2.4 — Théorème de pureté de Zariski-Nagata. Soit $f : X \to S$ un morphisme fini surjectif de schémas intègres, avec X normal et S régulier. Si les fibres de f en les points de codimension 1 sont étales sur leur corps résiduels, alors f est un revêtement étale fini.

En le réduisant au cas des schémas affines, cela devient un résultat difficile d'algèbre commutative dont la démonstration peut être trouvée dans [7] (théorème X.3.4). Ce résultat est utilisé surtout sous la forme équivalente suivante.

Corollaire 2.5 Soit S un schéma régulier intègre et $U \subset S$ un sous-schéma ouvert dont le complémentaire est constitué de points de codimension au moins 2. Alors le foncteur $X \mapsto X \times_S U$ de la catégorie des revêtements étales finis de X vers la catégorie des revêtements étales finis de U est une équivalence de catégories.

En utilisant la terminologie qui sera introduite au chapitre suivant, ce corollaire implique que les groupes $\pi_1(U, \overline{u})$ et $\pi_1(X, \overline{u})$, pour un point géométrique $\overline{u} : \operatorname{Spec} \Omega \to U$, sont isomorphes.

2.3 THÉORIE DE GALOIS POUR LES REVÊTEMENTS ÉTALES FINIS

Dans cette section, on étudiera un analogue de la théorie des revêtements topologiques dans le contexte étale, qui culminera avec le théorème fondamental de la théorie de Galois pour ces revêtements. Commençons par étudier les sections d'un revêtement étale.

Proposition 2.6 Soit $f : X \to S$ un revêtement étale fini et $s : S \to X$ une section de f. Alors s induit un isomorphisme de S avec un sous-schéma ouvert et fermé de X. En particulier, si S est connexe, alors s envoie S sur une composante connexe de X.

Démonstration. Par la proposition 2.2, s est un revêtement étale fini et donc son image est ouverte (car s est plat et localement de présentation finie) et fermé (s est fini donc propre) dans X. Comme s est injective, le résultat suit. $\square$

Obtenons ainsi un corollaire analogue à un résultat qui joue un rôle important dans la théorie topologique.

Corollaire 2.7 Soient $Z \to S$ un schéma sur S connexe et $f_1, f_2 : Z \to X$ deux morphismes de schémas sur S, où $X \to S$ est un revêtement fini étale. Si $f_1 \circ \bar{z} = f_2 \circ \bar{z}$ pour un point géométrique $\bar{z} : \operatorname{Spec} \Omega \to Z$, alors $f_1 = f_2$.

Démonstration. En passant au produit fibré $X \times_S Z \to Z$, qui est étale par la proposition 2.1, on peut supposer $S = Z$. Dans ce cas, f_1 et f_2 sont deux sections de $X \to S$ qui coïncident sur un point géométrique. Par la proposition 2.6, une telle section est déterminée par l'image d'un point géométrique. Le résultat suit. □

Comme le lecteur peut l'imaginer, si X est un schéma sur S, on définit $\operatorname{Aut}(X|S)$ comme le groupe d'automorphismes de X comme schéma sur S. Étant donné un point géométrique $\bar{s} : \operatorname{Spec} \Omega \to S$, il y a une action naturelle de $\operatorname{Aut}(X|S)$ sur la fibre géométrique $X_{\bar{s}} = X \times_S \operatorname{Spec} \Omega$ définie par le changement de base de l'action sur X.

Corollaire 2.8 Si $f : X \to S$ est un revêtement étale fini connexe, alors les éléments non triviaux de $\operatorname{Aut}(X|S)$ agissent sans point fixe sur chaque fibre géométrique. Il en découle que $\operatorname{Aut}(X|S)$ est fini.

Démonstration. On voit que les actions sur les fibres géométriques n'ont pas de point fixe en utilisant le corollaire précédent avec $f_1 = f$ et $f_2 = f \circ g$, pour $g \in \operatorname{Aut}(X|S)$. Il en découle que la représentation de permutation de $\operatorname{Aut}(X|S)$ sur les ensembles sous-jacents des fibres géométriques est fidèle. Mais ces ensembles sont finis, d'où la finitude de $\operatorname{Aut}(X|S)$. □

Définissons ensuite le quotient d'un schéma par un groupe fini d'automorphismes.

Définition 2.3 Soit $X \to S$ un morphisme affine de schémas et $G \subset \operatorname{Aut}(X|S)$ un sous-groupe fini. On défini l'espace annelé $G \backslash X$ comme étant l'espace topologique quotient de X par l'action de G avec le faisceau $(\pi_* \mathscr{O}_X)^G$ des éléments G-invariants de $\pi_* \mathscr{O}_X$, où $\pi : X \to G \backslash X$ est la projection canonique.

En fait, cet espace annelé est un schéma. Le *schéma quotient* de X par l'action de G.

Proposition 2.9 L'espace annelé $G \backslash X$ est un schéma affine sur S.

Démonstration. On rappelle que la catégorie des schémas affines sur S est anti-équivalente à catégorie des faisceaux quasi-cohérents de $\mathscr{O}_S$-algèbres. Il suffit alors de prouver[4] que si $\mathcal{A}$ est un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$-algèbres et G est un groupe fini d'automorphismes, alors $\mathcal{A}^G$ est aussi dans la même catégorie. Cela découle du fait qu'il s'agit du noyau du morphisme

$$\mathcal{A} \to \bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}$$

qui, pour tout ouvert $U \subset S$, envoie $a \in \mathcal{A}(U)$ vers $(g(a) - a)_{g \in G}$. □

4. Notons que le spectre de A^G est le quotient du spectre de A par l'action de G, topologiquement. Voir §2.2 dans [1].

On peut montrer que le quotient $G\backslash X$ est caractérisé par une propriété universelle : tout morphisme affine $X \to Y$ de schémas sur S qui est invariant par composition avec les éléments de G se factorise uniquement par $G\backslash X$.

En gardant à l'esprit le théorème fondamental de la théorie de Galois, on montre ensuite que si $X \to S$ est un revêtement étale fini connexe, alors $G\backslash X \to S$ est un revêtement intermédiaire. Il nous faut d'abord un lemme.

Lemme 2.10 Soit $X \to S$ un morphisme affine, G un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}(X|S)$ et $Y \to S$ un morphisme plat. Alors $G\backslash(X \times_S Y)$ et $(G\backslash X) \times_S Y$ sont isomorphes comme schémas sur Y.

Démonstration. La propriété d'être affine est stable par changement de base, si bien que le morphisme $X \times_S Y \to Y$ est affine et doté d'une action de G induite par celle sur $X \to S$. Le quotient $G\backslash(X \times_S Y)$ est donc bien défini. Comme le morphisme $X \times_S Y \to (G\backslash X) \times_S Y$ induit par la projection canonique est invariant par composition avec les éléments de G, il se factorise par

$$G\backslash(X \times_S Y) \to (G\backslash X) \times_S Y.$$

On affirme qu'il s'agit d'un isomorphisme, ce que l'on peut vérifier localement, dans le cas où $X = \mathrm{Spec}\, A$, $Y = \mathrm{Spec}\, B$ et $S = \mathrm{Spec}\, C$. Notons que, par supposition, B est une C-algèbre plate. Il faut montrer alors que $A^G \otimes_C B \to (A \otimes_C B)^G$ est un isomorphisme. La suite de A-modules

$$0 \to A^G \to A \to \bigoplus_{g \in G} A,$$

où le dernier morphisme envoie a vers $(g(a) - a)_{g \in G}$, est exacte donc, par la platitude de B, il est de même pour

$$0 \to A^G \otimes_C B \to A \otimes_C B \to \bigoplus_{g \in G} A \otimes_C B.$$

Cela montre que $A^G \otimes_C B \cong (A \otimes_C B)^G$. □

Voici alors la proposition souhaitée.

Proposition 2.11 Soit $X \to S$ un revêtement étale fini connexe et $G \subset \mathrm{Aut}(X|S)$ un groupe fini d'automorphismes de $X \to S$. Alors $X \to G\backslash X$ est un revêtement étale fini et $G\backslash X$ est un revêtement étale fini de S.

Démonstration. Tout d'abord, le quotient $G\backslash X \to S$ existe car un morphisme fini est toujours affine. Montrons alors que $G\backslash X \to S$ est un revêtement étale fini. Par la proposition 2.3, il existe un changement de base $X \times_S Y \to Y$ tel que $X \times_S Y$ est isomorphe à une union disjointe finie de copies de Y, ce que l'on note $F \times Y$ pour un ensemble fini F. L'action naturelle de G sur $X \times_S Y$ nous donne un isomorphisme $G\backslash(X \times_S Y) \cong (G\backslash F) \times Y$. Le lemme précédent implique alors que $(G\backslash X) \times_S Y \cong G\backslash(X \times_S Y)$ est isomorphe à une union disjointe finie de copies de Y et la proposition 2.3 nous permet alors de conclure. Enfin, le morphisme $X \to G\backslash X$ est aussi un revêtement étale fini par la proposition 2.2. $\square$

On voudrait souligner quelques détails sur les démonstrations de ce résultat trouvées dans la littérature. Dans [6], Grothendieck a prouvé ce résultat en supposant que les schémas sont localement noetheriens, ce que nous ne supposons pas. Dans [15], Szamuely a prouvé ce résultat en supposant que le revêtement est surjectif, ce que nous ne supposons pas non plus. On suit dans les grandes lignes la démonstration de Lenstra [9].

En topologie, on dit qu'un revêtement est *galoisien* si l'action de monodromie est transitive. Dans le cadre étale la définition est similaire : un revêtement étale fini connexe $X \to S$ est dit *galoisien* si $\mathrm{Aut}(X|S)$ agit transitivement sur les fibres géométriques.

L'analogue du théorème fondamental de la théorie de Galois se démontre de la même façon qu'en topologie en utilisant les résultats précédents.

Théorème 2.12 Soient $X, Y \to S$ deux revêtements étales finis galoisiens et $f : X \to Y$ un morphisme de schémas sur S entre eux. Alors f est un revêtement étale fini galoisien et $Y \cong H\backslash X$ pour un sous-groupe H de $G = \mathrm{Aut}(X|S)$. En fait, il y a une correspondance bijective entre sous-groupes de G et revêtements intermédiaires $Y \to S$. Le revêtement $Y \to S$ est galoisien si et seulement si H est un sous-groupe distingué de G. Dans ce cas $\mathrm{Aut}(Y|S) \cong G/H$.

On termine ce chapitre en prouvant un résultat analogue au fait qu'une extension séparable finie de corps peut être plongée dans une extension galoisienne finie et qu'il existe une plus petite extension de ce type. La preuve suivante est due à Jean-Pierre Serre.

Proposition 2.13 — Clôture galoisienne. Soit $f : X \to S$ un revêtement fini étale connexe. Il y a un morphisme $p : P \to X$ tel que $f \circ p : P \to S$ est un revêtement étale fini galoisien. De plus, si $q : Q \to X$ est un autre morphisme de schémas sur S avec Q galoisien et connexe, alors q se factorise par p. On dit que P est une *clôture galoisienne* du revêtement $f : X \to S$.

Démonstration. Soit $\bar{s} : \operatorname{Spec}\Omega \to S$ un point géométrique de S et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ les points de la fibre géométrique $X_{\bar{s}} = X \times_S \operatorname{Spec}\Omega$. Notons X^n le produit fibré $X \times_S X \times_S \ldots \times_S X$ contenant n copies de X et observons que la propriété universelle du produit fibré induit une bijection naturelle

$$u : X^n \times_S \operatorname{Spec}\Omega \to (X \times_S \operatorname{Spec}\Omega)^n.$$

Notons x l'élément de $X^n \times_S \operatorname{Spec}\Omega$ correspondant à $(x_1, \ldots, x_n)$ et P la composante connexe de X^n sur laquelle x est. Soit $p : P \to X$ la composition de l'inclusion $P \to X^n$ avec la première projection $X^n \to X$. Par la proposition 2.1, $f \circ p$ est un revêtement étale fini. Montrons alors qu'il est galoisien.

Montrons d'abord que l'image de $P \times_S \operatorname{Spec}\Omega$ dans $(X \times_S \operatorname{Spec}\Omega)^n$ est incluse dans l'ensemble des n-uplets qui ont des éléments distincts. En fait, supposons qu'il existe x'

dans $P \times_S \operatorname{Spec} \Omega$ tel que $u(x') = (x'_1, \ldots, x'_n)$ ait $x'_i = x'_j$ pour $i \neq j$. Par le corollaire 2.7, les projections $P \to X$ des coordonnées i et j sont égales. Comme les éléments de $u(x)$ sont distincts, ce n'est pas possible.

Montrons enfin que tout $x' \in P \times_S \operatorname{Spec} \Omega$ est dans l'orbite de x sous l'action de $\operatorname{Aut}(P|S)$. Comme on vient de voir, $u(x') = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ pour une permutation $\sigma \in S_n$. Cette permutation induit un automorphisme g de X^n qui permute les facteurs. Alors $g(P)$ est une composante connexe de X^n. Comme l'image de x' par $P \times_S \operatorname{Spec} \Omega \to P$ est dans P et $g(P)$, on conclut que $g(P) = P$ et donc $g|_P$ est un automorphisme de P dont le morphisme induit $P \times_S \operatorname{Spec} \Omega \to P \times_S \operatorname{Spec} \Omega$ envoie x vers x'. En d'autres termes, $f \circ p$ est galoisien.

Si $q : Q \to X$ est un morphisme de schémas sur S avec Q galoisien, on choisit une image réciproque y de x_1. Quitte à composer avec des automorphismes dans $\operatorname{Aut}(Q|S)$, on obtient des morphismes $q_1, \ldots, q_n : Q \to X$ tels que $q_i(y) = x_i$ pour tout i. Comme Q est connexe, on obtient un morphisme $Q \to P$ de schémas sur S dont la composition avec p est q. $\square$

3
LE GROUPE FONDAMENTAL ALGÉBRIQUE

Dans ce chapitre, on présentera la bonne notion de groupe fondamental dans le contexte de la théorie des schémas. On démontrera le théorème 1.6 dans le cas particulier de la catégorie des revêtements étales finis (dont la démonstration est similaire à celle du cas général quoique plus géométrique) et on verra ensuite que, contrairement au groupe fondamental topologique, le groupe fondamental algébrique possède les propriétés que l'on attend.

3.1 DÉFINITION ET THÉORÈME PRINCIPAL

Fixons un schéma S et un point géométrique $\bar{s} : \operatorname{Spec}\Omega \to S$. Étant donné un revêtement étale $X \to S$, on définit $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}(X)$ comme l'ensemble sous-jacent de la fibre géométrique $X \times_S \operatorname{Spec}\Omega$ sur $\bar{s}$. Puisqu'un morphisme $X \to Y$ en $\mathbf{FEt}_S$ induit un morphisme de schémas $X \times_S \operatorname{Spec}\Omega \to Y \times_S \operatorname{Spec}\Omega$, $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}$ est un foncteur de $\mathbf{FEt}_S$ vers la catégorie des ensembles finis.

Observons que pour tout objet $X \to S$ de $\mathbf{FEt}_S$ et automorphisme φ de $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}$, il y a un morphisme $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}(X) \to \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(X)$ induit par φ et donc une action de $\mathrm{Aut}(\mathrm{Fib}_{\bar{s}})$ sur $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}(X)$. C'est l'analogue de l'action de monodromie en topologie.

Définition 3.1 — Groupe fondamental algébrique. Soit S un schéma et $\bar{s} : \operatorname{Spec}\Omega \to S$ un point géométrique. Le *groupe fondamental algébrique* $\pi_1(S,\bar{s})$ est le groupe d'automorphismes du foncteur fibre $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}$ sur $\mathbf{FEt}_S$.

Le grand résultat qui nous intéresse à propos du groupe fondamental algébrique est le fait que, lorsque S est connexe, $\mathbf{FEt}_S$, avec le foncteur fibre $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}$, est une catégorie galoisienne et est donc équivalent à la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de $\pi_1(S,\bar{s})$. Dans notre contexte, le théorème 1.6 devient le résultat ci-dessous.

Théorème 3.1 — Grothendieck. Soit S un schéma connexe et $\bar{s} : \operatorname{Spec}\Omega \to S$ un point géométrique. Alors le groupe $\pi_1(S,\bar{s})$ admet une topologie naturelle qui en fait un groupe profini et il agit continûment sur $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}(X)$ pour tout objet X dans $\mathbf{FEt}_S$.

De plus, le foncteur $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}$ induit une équivalence de catégories entre $\mathbf{FEt}_S$ et la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de $\pi_1(S,\bar{s})$. Dans cette équivalence, un revêtement est connexe si et seulement si le $\pi_1(S,\bar{s})$-ensemble correspondant est transitif et un revêtement est galoisien si et seulement si le $\pi_1(S,\bar{s})$-ensemble correspondant est isomorphe à un quotient fini par un sous-groupe distingué de $\pi_1(S,\bar{s})$.

L'objectif de cette section est de démontrer ce théorème dans son intégralité. La grande difficulté de cette preuve est que, contrairement au résultat analogue en topologie, le foncteur fibre n'est normalement pas représentable. Grothendieck a contourné ce problème en utilisant la notion catégorique suivante.

Définition 3.2 Soit **C** une catégorie et $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur covariant sur **C**. On dit que F est *pro-représentable* s'il existe un système projectif $(P_i, \varphi_{ij})_{i,j \in I}$ d'objets de **C**, indexé par un ensemble partiellement ordonné filtrant I, et un isomorphisme fonctoriel

$$\operatorname{colim} \operatorname{Hom}(P_i, X) \cong F(X)$$

pour chaque objet X de **C**.

Notons que la limite projective des P_i n'a pas besoin d'exister dans **C**. Ce qui importe, c'est que la limite inductive des $\operatorname{Hom}(P_i, X)$ existe dans la catégorie des ensembles, ce qui est toujours le cas.

Dorénavant, on supposera les conditions du théorème 3.1 : S est un schéma connexe et $\bar{s} : \operatorname{Spec} \Omega \to S$ est un point géométrique de S.

Proposition 3.2 Le foncteur fibre $\operatorname{Fib}_{\bar{s}}$ est pro-représentable.

Démonstration. Les objets du système inverse sont les revêtement étales finis galoisiens $P_i \to S$ et on note $i \leqslant j$ s'il y a un morphisme $P_j \to P_i$ dans $\mathbf{FEt}_S$. L'ensemble des indices I est filtrant car si $i, j \in I$ alors la proposition 2.13 appliquée à une composante connexe Z de $P_i \times_S P_j$ nous donne un revêtement étale fini galoisien $P_k \to S$ avec des morphismes $P_k \to Z \to P_i$ et $P_k \to Z \to P_j$.

Définissons alors les morphismes φ_{ij}. Pour chaque $i \in I$ on choisit un élément $p_i \in \operatorname{Fib}_{\bar{s}}(P_i)$. Si $i \leqslant j$, soit $\varphi : P_j \to P_i$ le morphisme associé. Comme $P_j \to S$ est un revêtement galoisien, il y a un automorphisme $\lambda \in \operatorname{Aut}(P_j|S)$, unique par le corollaire 2.7, tel que $\operatorname{Fib}_{\bar{s}}(\varphi \circ \lambda)(p_j) = p_i$. En définissant $\varphi_{ij} = \varphi \circ \lambda$ on obtient alors un système inverse $(P_i, \varphi_{ij})_{i,j \in I}$ qui satisfait $\operatorname{Fib}_{\bar{s}}(\varphi_{ij})(p_j) = p_i$ pour tout $i \leqslant j$.

Enfin, pour tout revêtement étale fini $X \to S$ et pour tout $i \in I$, il y a un morphisme naturel

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(P_i, X) &\to \operatorname{Fib}_{\bar{s}}(X) \\ \varphi &\mapsto \operatorname{Fib}_{\bar{s}}(\varphi)(p_i). \end{aligned}$$

Ces morphismes sont compatibles avec les φ_{ij} et donc on obtient un morphisme fonctoriel $\operatorname{colim} \operatorname{Hom}(P_i, X) \to \operatorname{Fib}_{\bar{s}}(X)$. Pour construire l'application réciproque, considérons une clôture galoisienne $q : Q \to X$ de $X \to S$ donné par la proposition 2.13. (Si X n'est pas connexe, il suffit de prendre des réunions disjointes.) Comme $Q \to X \to S$ est un revêtement galoisien, $Q = P_i$ pour un certain i. De plus, pour tout $x \in \operatorname{Fib}_{\bar{s}}(X)$ il y a un unique automorphisme $\lambda \in \operatorname{Aut}(Q|S)$ tel que $\operatorname{Fib}_{\bar{s}}(q \circ \lambda)(p_i) = x$. Alors l'application qui envoie x vers la classe de $q \circ \lambda$ dans $\operatorname{colim} \operatorname{Hom}(P_i, X)$ est la réciproque voulue. $\square$

Notons que les morphismes $(\varphi_{ij})_{i,j\in I}$ sont uniques une fois que les éléments $(p_i)_{i\in I}$ ont été fixés. On obtient ainsi le corollaire ci-dessous.

Corollaire 3.3 Il y a une correspondance bijective entre les automorphismes du foncteur fibre $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}$ et les collections d'automorphismes $\lambda_i \in \mathrm{Aut}(P_i|S)$ compatibles avec les applications de transition φ_{ij}.

Démonstration. Un automorphisme du foncteur fibre envoie les éléments fixées $(p_i)_{i\in I}$ vers un autre ensemble d'éléments $(p_i')_{i\in I}$. Comme les revêtements $P_i \to S$ sont galoisiens, pour tout $i \in I$ il y a un unique automorphisme $\lambda_i \in \mathrm{Aut}(P_i|S)$ tel que $\lambda_i(p_i) = p_i'$. Le résultat suit. □

Compte tenu du corollaire 2.8, le résultat suivant nous montre que $\pi_1(S,\bar{s})$ admet une topologie naturelle qui lui confère une structure de groupe profini. La continuité découle du fait que si $x \in \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(X)$ est envoyé vers une classe dans $\mathrm{Hom}(P_i, X)$, alors l'action de $\pi_1(S,\bar{s})$ se factorise par $\mathrm{Aut}(P_i|S)^{\mathrm{op}}$.

Corollaire 3.4 Les groupes $\mathrm{Aut}(P_i|S)^{\mathrm{op}}$ forment un système projectif dont la limite projective est isomorphe à $\pi_1(S,\bar{s})$.

Démonstration. Si $i \leqslant j$ alors, comme $P_j \to P_i$ est un revêtement galoisien, le théorème 2.12 nous donne un morphisme surjectif de groupes

$$\mathrm{Aut}(P_j|S) \to \mathrm{Aut}(P_i|S).$$

Ce sont les morphismes du système projectif. Les éléments de la limite projective sont exactement les collections d'automorphismes $\lambda_i \in \mathrm{Aut}(P_i|S)$ compatibles avec les applications de transition φ_{ij}. Le résultat suit alors du corollaire précédent. □

Prouvons enfin le théorème principal.

Démonstration du théorème 3.1. Les résultats de cette section impliquent déjà la première moitié du théorème. Pour l'équivalence de catégories, on commence par montrer que $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}$ est essentiellement surjectif. Soit E un ensemble fini muni d'une action continue de $\pi_1(S,\bar{s})$. Quitte à décomposer E en orbites, on peut supposer que l'action est transitive. Tout comme dans la preuve du théorème 1.3, le stabilisateur U d'un point de E est un sous-groupe ouvert et donc contient le noyau d'une projection

$$p : \pi_1(S,\bar{s}) \to \mathrm{Aut}(P_i|S)^{\mathrm{op}}$$

car ces noyaux forment une base de voisinages de l'identité de $\pi_1(S,\bar{s})$. Alors $E \cong \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(X)$ où X est le quotient de $P_i \to S$ par l'action de $p(U)^{\mathrm{op}}$.

Montrons que $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}$ est fidèle. Soient $f, g : X \to Y$ deux morphismes dans $\mathbf{FEt}_S$ tels que $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}(f) = \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(g)$. Si $j : Z \to X$ est l'inclusion d'une composante connexe de X, on a

$\mathrm{Fib}_{\bar{s}}(f \circ j) = \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(g \circ j)$ et donc, par le corollaire 2.7, $f \circ j = g \circ j$. Comme cela vaut pour n'importe quelle composante connexe de X, il suit que $f = g$.

Montrons enfin que $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}$ est plein. Soient $X \to S$ et $Y \to S$ deux revêtements étales finis et $\omega : \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(X) \to \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(Y)$ une application $\pi_1(S, \bar{s})$-équivariante. Comme le foncteur fibre préserve les unions disjointes, on peut supposer que X et Y sont connexes et que l'action de $\pi_1(S, \bar{s})$ est transitive. La transitivité de l'action de $\pi_1(S, \bar{s})$ implique que ω est déterminé par l'image $y \in \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(Y)$ d'un point $x \in \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(X)$.

Tout comme dans la preuve de la proposition 3.2, il y a un revêtement étale fini connexe galoisien $Q \to S$, un point $q \in \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(Q)$ et des morphismes $\pi_X : Q \to X$ et $\pi_Y : Q \to Y$ satisfaisant

$$\mathrm{Fib}_{\bar{s}}(\pi_X)(q) = x \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(\pi_Y)(q) = y.$$

Par transitivité, pour tout automorphisme $h \in \mathrm{Aut}(Q|X)$, il y a $f \in \pi_1(S, \bar{s})$ tel que $f_Q(q) = \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(h)(q)$ d'où il résulte que

$$\mathrm{Fib}_{\bar{s}}(\pi_Y \circ h)(q) = \mathrm{Fib}_{\bar{s}}(\pi_Y)(q).$$

Le corollaire 2.7 implique alors que $\pi_Y \circ h = \pi_Y$. Comme X est un quotient de Q par $\mathrm{Aut}(Q|X)$, il y a un unique morphisme $\varphi : X \to Y$ tel que $\pi_Y = \varphi \circ \pi_X$. On a donc $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}(\varphi)(x) = y$, ce qui implique le résultat. $\square$

3.2 PROPRIÉTÉS DE BASE DU GROUPE FONDAMENTAL

Dans cette section, on présente certaines propriétés de base du groupe fondamental algébrique.

D'abord, tout comme en topologie, les groupe fondamentaux d'un schéma connexe correspondant aux différents points de base sont (non canoniquement) isomorphes.

Proposition 3.5 Si $\bar{s} : \mathrm{Spec}\,\Omega \to S$ et $\overline{s'} : \mathrm{Spec}\,\Omega' \to S$ sont deux points géométriques de S, alors il existe un isomorphisme continu de groupes profinis $\pi_1(S, \bar{s}') \to \pi_1(S, \bar{s})$.

Pour la démonstration, voir le corollaire 5.5.2 dans [15]. En outre, sous certaines conditions supplémentaires, le foncteur π_1 commute aux produits finis.

Proposition 3.6 Soit k un corps algébriquement clos et X, Y des schémas noethériens connexes sur k. Supposons que X est propre et intègre. Choisissons deux points géométriques $\bar{x} : \mathrm{Spec}\,k \to X$ et $\bar{y} : \mathrm{Spec}\,k \to Y$. Alors le morphisme naturel

$$\pi_1(X \times_k Y, (\bar{x}, \bar{y})) \to \pi_1(X, \bar{x}) \times \pi_1(Y, \bar{y})$$

induit par les projections de $X \times_k Y$ vers X et Y, est un isomorphisme.

La démonstration de ce dernier résultat est considérablement plus difficile et dépend de l'existence de la factorisation de Stein pour un morphisme propre entre des schémas intègres noethériens. Pour la démonstration, voir le corollaire 5.6.6 dans [15]. Notons que la propreté de X est indispensable en caractéristique p (c'est faux déjà pour $X = \mathbb{A}^1_k$) mais le résultat est vrai sans cette hypothèse en caractéristique 0.

On termine ce chapitre avec un résultat final sans équivalent en topologie.

Proposition 3.7 Soit K/k une extension de corps algébriquement clos et soit X un schéma propre intègre sur k. Alors l'application naturelle

$$\pi_1(X_K, \overline{x}_K) \to \pi_1(X, \overline{x})$$

est un isomorphisme pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X.

Ce résultat est due à Lang et Serre et sa démonstration peut être trouvée dans [15]. (Voir la proposition 5.6.7.) Tout comme avant, la propreté est indispensable en caractéristique p mais le résultat est vrai sans cette hypothèse en caractéristique 0.

4
THÉORÈMES DE COMPARAISON

Dans ce chapitre, on présentera l'analytifié d'un schéma localement de type fini sur $\mathbb{C}$ et on montrera que, dans ce contexte, le groupe fondamental algébrique correspond naturellement au groupe fondamental topologique de l'analytifié.

4.1 TOPOLOGIE ANALYTIQUE

Dans cette section, on travaillera avec des schémas localement de type fini sur $\mathbb{C}$. On rappelle que pour un tel schéma X, un point $\mathbb{C}$-rationel est une section du morphisme structural $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}$. L'ensemble $X(\mathbb{C})$ de ces points est en bijection avec l'ensemble des points fermés de X par l'application qui envoie un morphisme $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \to X$ vers l'unique point de son image.

On commence en définissant l'analytifié dans le cas affine.

Définition 4.1 — Analytifié d'un schéma affine. Soit X un schéma affine de type fini sur $\mathbb{C}$. Choisissons un plongement fermé $\varphi : X \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ et considérons le morphisme induit $\varphi(\mathbb{C}) : X(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. On désigne par h la bijection naturelle $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$ et on considère $\mathbb{C}^n$ avec la topologie analytique. L'espace topologique *analytifié* X^{an} est défini comme l'ensemble $X(\mathbb{C})$ avec la topologie induite par $h \circ \varphi(\mathbb{C})$.

Notons que, comme la topologie analytique dans $\mathbb{C}^n$ est plus fine que la topologie de Zariski, la topologie de X^{an} est plus fine que la topologie induite. Il en découle que le morphisme naturel $X^{\mathrm{an}} \to X$ est continu.

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, cette construction ne dépend pas du plongement fermé φ choisi.

Proposition 4.1 La topologie de X^{an} ne dépend pas du plongement fermé $\varphi : X \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Soient $\varphi : X \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ et $\psi : X \to \mathbb{A}^m_{\mathbb{C}}$ deux plongements fermés avec les morphismes correspondants de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\alpha : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \to \mathcal{O}_X(X) \qquad \text{et} \qquad \beta : \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m] \to \mathcal{O}_X(X).$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on choisit un polynôme $p_i \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$ tel que $\alpha(x_i) = \beta(p_i)$. On définit

$$\omega : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$$

par $\omega(x_i) = p_i$. Comme $\beta \circ \omega = \alpha$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} & & \mathbb{A}^m_{\mathbb{C}} \arrow[ll, "\operatorname{Spec}\omega"] \end{tikzcd}$$

commute. Si $h_n : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$ et $h_m : \mathbb{A}^m_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^m$ sont les bijections naturelles, l'application $h_n \circ \operatorname{Spec}\omega(\mathbb{C}) \circ h_m^{-1}$ est donnée par

$$y \mapsto (p_1(y), \ldots, p_n(y))$$

et est donc continue relativement aux topologies analytiques. Comme le diagramme ci-dessus commute, la topologie sur $X(\mathbb{C})$ induite par φ est moins fine que celle induite par ψ. Le résultat s'en déduit en échangeant les rôles de φ et de ψ dans l'argument que l'on vient de faire. $\square$

On passe ensuite à la définition générale.

Définition 4.2 — Analytifié d'un schéma. Soit X un schéma localement de type fini sur $\mathbb{C}$. L'*analytifié* X^{an} est l'ensemble $X(\mathbb{C})$ avec la topologie finale associée aux injections $U^{\text{an}} \to X(\mathbb{C})$ pour tout sous-schéma ouvert affine U de X. Tout comme avant, l'application naturelle $X^{\text{an}} \to X$ est continue.

L'analytifié d'un schéma présente plusieurs caractéristiques communes avec le schéma initial. Par exemple, X est séparé / connexe / de dimension n si et seulement si X^{an} l'est et X est lisse si et seulement si X^{an} est une variété complexe. De plus, un morphisme $X \to Y$ de schémas sur $\mathbb{C}$ est propre si et seulement si $X^{\text{an}} \to Y^{\text{an}}$ l'est (au sens topologique). En particulier, X est propre si et seulement si X^{an} est quasi-compact. La démonstration de tous ces faits (et de beaucoup d'autres !) peut être vue dans l'exposé XII de [6].

Une dernière propriété qui nous sera utile dans ce chapitre est le résultat ci-dessous.

Proposition 4.2 L'analytifié d'une courbe propre lisse sur $\mathbb{C}$ est une surface de Riemann compacte de même genre.

La seule partie de ce résultat qui ne découle pas de la discussion précédente est le fait que l'analytifié a le même genre. Cela est un corollaire des théorèmes GAGA de Serre. [13]

4.2 COMPARAISON ENTRE LES GROUPES FONDAMENTAUX

Avec un peu d'effort (mais en utilisant certaines notions qui n'ont pas été présentées ici), il n'est pas si difficile de montrer que si $X \to Y$ est un revêtement étale fini de Y, alors l'application associée $X^{\text{an}} \to Y^{\text{an}}$ est un revêtement topologique fini.

Inversement, tout revêtement topologique fini de Y^{an} est l'analytifié d'un revêtement étale fini. Ce résultat est beaucoup plus profond. Dans le cas d'une courbe propre lisse sur $\mathbb{C}$, ce résultat découle du théorème d'existence de Riemann. Le cas général, comme exposé ci-dessous, a été prouvé par Grothendieck dans l'exposé XII de [6], généralisant les résultats de Serre dans [13].

Théorème 4.3 Soit X un schéma connexe de type fini sur $\mathbb{C}$. Alors le foncteur d'analytification induit une équivalence de catégories entre la catégorie des revêtements étale finis de X et celle des revêtements topologiques finis de X^{an}. En particulier, pour tout $\mathbb{C}$-point $\overline{x} : \operatorname{Spec}\mathbb{C} \to X$ on a un isomorphisme

$$\widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}, \overline{x})} \cong \pi_1(X, \overline{x}),$$

où le groupe à gauche est le completé profini du groupe fondamental topologique de X dont le point base est l'image de $\overline{x}$.

Le dernier résultat qui nous intéresse dans ce rapport est l'un des premiers succès de la théorie des schémas. Si X est une courbe propre, lisse et connexe de genre g sur $k = \mathbb{C}$ et $\overline{x}$ en est un point géométrique, le théorème précédent nous dit que le groupe fondamental $\pi_1(X, \overline{x})$ est isomorphe au complété profini de

$$\Gamma_g := \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

Dans le cas où k est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 quelconque, la proposition 3.7 implique qu'on a encore $\pi_1(X, \overline{x}) \cong \widehat{\Gamma_g}$. En caractéristique p ce résultat n'est plus vrai mais on a un résultat assez proche !

Théorème 4.4 — Grothendieck. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$ et X une courbe propre, lisse et connexe de genre g sur k. Alors, pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X, le groupe $\pi_1(X, \overline{x})^{(p')}$, défini comme le quotient de $\pi_1(X, \overline{x})$ par le sous-groupe fermé engendré par les p-sous-groupes de Sylow, est isomorphe au p-complété profini de Γ_g.

On consacrera la dernière sous-section à un aperçu de la démonstration de ce théorème. Le lecteur intéressé peut trouver la démonstration complète dans [6]. Le résultat qui nous intéresse est le corollaire 3.10 de l'exposé X mais sa démonstration rigoureuse occupe une bonne partie des 220 premières pages de cette œuvre.

4.3 ESQUISSE DE DÉMONSTRATION DU DERNIER THÉORÈME

La base de la démonstration de ce théorème est que le groupe fondamental n'est pas constant sur les fibres géométriques mais, sous certaines conditions, son quotient pour un

p-sous-groupe de Sylow l'est. En outre, on peut « déformer » continûment une fibre géométrique de caractéristique p en caractéristique 0, où l'on peut appliquer les résultats déjà vus.

Le premier pas dans cette aventure est la construction de l'*anneau des vecteurs de Witt*.

Proposition 4.5 — Anneau des vecteurs de Witt. Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Alors il existe un anneau de valuation discrète complet $W_p(k)$, appelé *anneau des vecteurs de Witt*, dont le corps résiduel est k, p est une uniformisante et le corps de fractions est de caractéristique 0. De plus, cette construction est fonctorielle.

Le lecteur intéressé peut trouver la théorie des vecteurs de Witt dans l'œuvre classique de Serre [14].

Désormais, on fixe un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$. On note pour A l'anneau des vecteurs de Witt $W_p(k)$, pour K le corps de fractions de A et pour S le spectre de A. En outre, $\eta : \operatorname{Spec} k \to S$ est le point générique de S et $s : \operatorname{Spec} k \to S$ est le point fermé de S. Choisissons aussi des points géométriques $\overline{\eta}$ et $\overline{s}$ sur η et s, respectivement.

Proposition 4.6 Dans les conditions ci-dessus, soit X une courbe propre et lisse sur k. Alors il existe un schéma lisse et propre Y sur S tel que $Y_s \cong X$ et Y_η est une courbe propre et lisse sur K. De plus, Y_η a le même genre que X.

Pour prouver ce résultat, Grothendieck a étendu X en un schéma formel sur S et a ensuite utilisé un théorème d'algébrisation. En gros, relever X infinitésimalement est possible localement car X est lisse. La seule obstruction globale possible est mesurée par le deuxième groupe de cohomologie d'un faisceau cohérent, qui est nul car X est une courbe. En passant à la limite des relèvements on obtient un schéma formel, ce qui n'est pas un problème car tout schéma formel propre de dimension 1 est algébrisable. Un peu comme le fait que toute surface de Riemann compacte est projective. Pour plus d'informations, voir le théorème 8.5.19 dans [5].

On commence alors ce que Grothendieck appelle la théorie de la spécialisation du groupe fondamental. Cette théorie traite d'un certain morphisme $\operatorname{sp} : \pi_1(Y_{\overline{\eta}}, \overline{y}) \to \pi_1(Y_{\overline{s}}, \overline{x})$, où $\overline{y}$ est un point géométrique de $Y_{\overline{\eta}}$ et $\overline{x}$ est un point géométrique de $Y_{\overline{s}}$, que la proposition ci-dessous nous permettra définir.

Proposition 4.7 Soit Y un schéma propre sur S et $\overline{x}$ un point géométrique de Y_s. Alors le morphisme

$$\pi_1(Y_s, \overline{x}) \to \pi_1(Y, \overline{x}),$$

induit par le morphisme naturel $Y_s \to Y$, est un isomorphisme.

Pour la démonstration, voir le théorème 2.1 dans l'exposé X de [6]. On peut enfin définir le morphisme de spécialisation dans le cas où $s = \overline{s}$. Il s'agit de la composition

$$\operatorname{sp} : \pi_1(Y_{\overline{\eta}}, \overline{y}) \to \pi_1(Y, \overline{y}) \to \pi_1(Y, \overline{x}) \to \pi_1(Y_{\overline{s}}, \overline{x}),$$

où le premier morphisme est induit par $Y_{\overline{\eta}} \to Y$, le deuxième est l'isomorphisme donné par la proposition 3.5 et le dernier est l'application réciproque du isomorphisme donné par la proposition ci-dessus.

Proposition 4.8 — Théorème de spécialisation de Grothendieck. Soit Y un schéma propre et lisse sur S, alors le morphisme de spécialisation induit un isomorphisme

$$\pi_1(Y_{\overline{\eta}}, \overline{y})^{(p')} \to \pi_1(Y_{\overline{s}}, \overline{x})^{(p')},$$

où les exposants (p') désignent les quotients par les sous-groupes fermés engendrés par les p-sous-groupes de Sylow des groupes profinis concernés.

Le lecteur peut voir la démonstration de ce théorème dans la section 8.5 de [5]. Le résultat initialement prouvé par Grothendieck est plus général et peut être trouvé à la fin de l'exposé X de [6].

Cela termine la preuve du théorème 4.4. En effet, par la proposition 4.6, il existe un schéma lisse et propre Y sur S tel que $Y_s \cong X$ et Y_η est une courbe propre et lisse sur K. La dernière proposition implique alors que $\pi_1(X, \overline{x})^{(p')} \cong \pi_1(Y_{\overline{\eta}}, \overline{y})^{(p')}$ est un isomorphisme. Comme $Y_{\overline{\eta}}$ est une courbe propre et lisse de genre g sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, la discussion précédant le théorème 4.4 nous dit que $\pi_1(Y_{\overline{\eta}}, \overline{y}) \cong \Gamma_g$ et donc le résultat suit.

RÉFÉRENCES

[1] N. BOURBAKI : *Algèbre commutative : Chapitres 5 à 7*. Springer Science & Business Media, 2007.

[2] E. J. DUBUC et C. S. de la VEGA : On the galois theory of grothendieck. *arXiv preprint math/0009145*, 2000.

[3] D. EISENBUD : *Commutative Algebra : with a view toward algebraic geometry*, vol. 150. Springer Science & Business Media, 2013.

[4] D. EISENBUD et J. HARRIS : *The geometry of schemes*, vol. 197. Springer Science & Business Media, 2006.

[5] B. FANTECHI, L. GOTTSCHE et L. ILLUSIE : *Fundamental algebraic geometry : Grothendieck's FGA explained*. American Mathematical Soc., 2005.

[6] A. GROTHENDIECK : Revêtement étales et groupe fondamental (SGA 1). *Lecture Notes in Math.*, 224, 1971.

[7] A. GROTHENDIECK et M. RAYNAUD : Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorémes de lefschetz locaux et globaux (SGA 2). *arXiv preprint math/0511279*, 2005.

[8] R. HARTSHORNE : *Algebraic geometry*, vol. 52. Springer Science & Business Media, 2013.

[9] H. W. LENSTRA : Galois theory for schemes, 2008. Disponible en `http://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/GSchemes.pdf`.

[10] J. S. MILNE : *Étale cohomology (PMS-33)*, vol. 5657. Princeton University Press, 1980.

[11] J. S. MILNE : Fields and galois theory (v4.61), 2020. Disponible en `www.jmilne.org/math/`.

[12] A. NEEMAN : *Algebraic and analytic geometry*. Cambridge University Press, 2007.

[13] J.-P. SERRE : Géométrie analytique et géométrie algébrique. *Ann. Inst. Fourier, VI (1955–56)*, p. 1–42, 1955.

[14] J. P. SERRE : *Corps locaux*. Hermann, 1980.

[15] T. SZAMUELY : *Galois groups and fundamental groups*, vol. 117. Cambridge University Press, 2009.

[16] E. TENGAN et H. BORGES : *Álgebra comutativa em quatro movimentos*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[17] R. VAKIL : The rising sea : Foundations of algebraic geometry. *URL : http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf*, 2017.

[18] C. A. WEIBEL : *An introduction to homological algebra*, vol. 38. Cambridge university press, 1995.