Dualidade de Grothendieck

And all that *jazz*

Gabriel Ribeiro

École Polytechnique

Sumário

Generalidades

Como relativizar cohomologia?

Seja $f : X \to S$ um morfismo de espaços anelados. Como $\mathscr{O}_X$-mod é uma categoria abeliana de Grothendieck, nós podemos definir

$$\mathrm{R}f_* : \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(S).$$

Seja $f : X \to S$ um morfismo de espaços anelados. Como $\mathscr{O}_X$-mod é uma categoria abeliana de Grothendieck, nós podemos definir

$$\mathrm{R}f_* : \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(S).$$

Teorema - Mudança de base própria (Tags 09V5 e 005R)

Suponha que f é próprio e separado. Então

$$(\mathrm{R}f_*\mathscr{F}^\bullet)_s = \mathrm{R}\Gamma(X_s, \mathscr{F}^\bullet)$$

para todo $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}(X)$. Em particular, $(\mathrm{R}^i f_*\mathscr{F}^\bullet)_s = H^i(X_s, \mathscr{F}^\bullet)$. Se $f : X \to \{p\}$, então $H^i(X, \mathscr{F}^\bullet) = (\mathrm{R}^i f_*\mathscr{F}^\bullet)_p$.

Cup product (Tag 0FKU)

A categoria $\mathscr{O}_X$-mod também possui K-planos o suficiente, o que nos permite definir uma estrutura de cat. tensorial

$$- \otimes^{\mathsf{L}}_{\mathscr{O}_X} - : \mathsf{D}(X) \times \mathsf{D}(X) \to \mathsf{D}(X).$$

Cup product (Tag 0FKU)

A categoria $\mathscr{O}_X$-mod também possui K-planos o suficiente, o que nos permite definir uma estrutura de cat. tensorial

$$- \otimes^{\mathsf{L}}_{\mathscr{O}_X} - : \mathsf{D}(X) \times \mathsf{D}(X) \to \mathsf{D}(X).$$

Nós temos então uma versão relativa do cup product para um morfismo de espaços anelados $f : X \to S$

$$\mathsf{R}f_* \mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathsf{R}f_* \mathscr{G}^\bullet \to \mathsf{R}f_*(\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}^\bullet).$$

Cup product (Tag 0FKU)

O caso particular $f : X \to \{p\}$ nos dá um morfismo

$$\mu : R\Gamma(X, \mathscr{F}^\bullet) \otimes^{L}_{\mathscr{O}_Y} R\Gamma(X, \mathscr{G}^\bullet) \to R\Gamma(X, \mathscr{F}^\bullet \otimes^{L}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}^\bullet).$$

Cup product (Tag 0FKU)

O caso particular $f : X \to \{p\}$ nos dá um morfismo

$$\mu : \mathrm{R}\Gamma(X, \mathscr{F}^\bullet) \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_Y} \mathrm{R}\Gamma(X, \mathscr{G}^\bullet) \to \mathrm{R}\Gamma(X, \mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}^\bullet).$$

O cup product "usual" $H^i(X, \mathscr{F}^\bullet) \times H^j(X, \mathscr{G}^\bullet) \to H^{i+j}(X, \mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}^\bullet)$ é dado por

$$\xi \smile \eta := H^{i+j}(\mu)(\xi \otimes \eta).$$

(Off-topic) Cup product como um produto de Yoneda

Observe que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, -)$ é o funtor identidade. Tomando seções globais segue que $\Gamma(X, -) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, -)$ e derivando nós obtemos

$$H^i(X, -) = \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, -) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(\mathscr{O}_X, -[i]).$$

Observe que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, -)$ é o funtor identidade. Tomando seções globais segue que $\Gamma(X, -) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, -)$ e derivando nós obtemos

$$H^i(X, -) = \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, -) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(\mathscr{O}_X, -[i]).$$

O cup product então é dado pela composição

$$\begin{tikzcd}
H^i(X, \mathscr{F}^\bullet) \times H^j(X, \mathscr{G}^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}^\bullet[i]) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(\mathscr{O}_X, \mathscr{G}^\bullet[j]) \arrow[d, "\otimes"] \arrow[dd, "\smile"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}^\bullet[i]) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(\mathscr{F}^\bullet[i], \mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}^\bullet[i+j]) \arrow[d, "\circ"] \\
H^{i+j}(X, \mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}^\bullet[i+j])
\end{tikzcd}$$

A imagem inversa (Tags 06YI e 079V)

Novamente, como $\mathscr{O}_X$-mod possui *K*-planos o suficiente, nós podemos definir o funtor *tensorial*

$$\mathrm{L}f^* : \mathrm{D}(S) \to \mathrm{D}(X).$$

A imagem inversa (Tags 06YI e 079V)

Novamente, como $\mathscr{O}_X$-mod possui K-planos o suficiente, nós podemos definir o funtor *tensorial*

$$\mathrm{L}f^* : \mathrm{D}(S) \to \mathrm{D}(X).$$

Além disso, dado um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\bar{g}} & X \\ {\scriptstyle \bar{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

de espaços anelados, nós temos uma transformação natural $\mathrm{L}g^* \circ \mathrm{R}f_* \to \mathrm{R}\bar{f}_* \circ \mathrm{L}\bar{g}^*$.

Adjunções (Tags 079V e 08DH)

O *feixe hom* $\underline{\mathrm{Hom}}$ se estende naturalmente em um funtor triangulado $\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet : \mathrm{K}(X)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{K}(X) \to \mathrm{K}(X)$ e em seu funtor derivado:

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet : \mathrm{D}(X)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(X).$$

Esse carinha satisfaz $H^0 \circ \mathrm{R}\Gamma \circ \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}$ e é adjunto à direita do produto tensorial derivado.

Adjunções (Tags 079V e 08DH)

O *feixe hom* $\underline{\mathrm{Hom}}$ se estende naturalmente em um funtor triangulado $\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet : \mathrm{K}(X)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{K}(X) \to \mathrm{K}(X)$ e em seu funtor derivado:

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet : \mathrm{D}(X)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(X).$$

Esse carinha satisfaz $H^0 \circ \mathrm{R}\Gamma \circ \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}$ e é adjunto à direita do produto tensorial derivado.

O funtor $\mathrm{L}f^*$ é adjunto à esquerda de $\mathrm{R}f_*$. Melhor:

$$\mathrm{R}f_* \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_X}(\mathrm{L}f^* \mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \cong \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}^\bullet, \mathrm{R}f_* \mathscr{G}^\bullet).$$

A formula de projeção (Tag 01E6)

Se $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}(X)$ e $\mathscr{G}^\bullet \in \mathrm{D}(S)$, existe um morfismo natural

$$\mathrm{R}f_*\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{G}^\bullet \to \mathrm{R}f_*(\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathrm{L}f^*\mathscr{G}^\bullet).$$

A formula de projeção (Tag 01E6)

Se $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}(X)$ e $\mathscr{G}^\bullet \in \mathrm{D}(S)$, existe um morfismo natural

$$\mathrm{R}f_*\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{G}^\bullet \to \mathrm{R}f_*(\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathrm{L}f^*\mathscr{G}^\bullet).$$

Se $\mathscr{G}^\bullet$ é um $\mathscr{O}_S$-módulo finito localmente livre (melhor: se $\mathscr{G}^\bullet$ é perfeito), isso é um isomorfismo.

Dualidade de Verdier

Imagem direta própria

Seja $f : X \to S$ um morfismo entre espaços anelados localmente compactos e suponha que f satisfaz uma condição técnica.

Imagem direta própria

Seja $f : X \to S$ um morfismo entre espaços anelados localmente compactos e suponha que f satisfaz uma condição técnica.

Nesse contexto nós temos um novo funtor $f_! : \mathscr{O}_X\text{-Mod} \to \mathscr{O}_S\text{-Mod}$:

$$\Gamma(U, f_!\mathscr{F}) := \{s \in \Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{F}) \mid f|_{\operatorname{supp} s} : \operatorname{supp} s \to U \text{ é próprio}\}$$

junto com uma transformação natural $f_! \to f_*$, que é um isomorfismo se f é próprio.

Mudança de base própria

Nesse contexto o primeiro teorema funciona incondicionalmente:

Teorema - Mudança de base própria

Nós temos que

$$(\mathrm{R}f_!\mathscr{F}^\bullet)_s = \mathrm{R}\Gamma_c(X_s, \mathscr{F}^\bullet)$$

para todo $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}(X)$, onde Γ_c é o funtor *seções com suporte compacto*. Em particular, $(\mathrm{R}^i f_!\mathscr{F}^\bullet)_s = H^i_c(X_s, \mathscr{F}^\bullet)$. Se $f : X \to \{p\}$, então $H^i_c(X, \mathscr{F}^\bullet) = (\mathrm{R}^i f_!\mathscr{F}^\bullet)_p$.

Mudança de base própria

Melhor: dado um diagrama cartesiano (de espaços anelados)

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\overline{g}} & X \\ {\scriptstyle \bar{f}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

nós temos um isomorfismo natural

$$\mathrm{L}g^* \circ \mathrm{R}f_! \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\bar{f}_! \circ \mathrm{L}\overline{g}^*.$$

A fórmula da projeção + adjunção

Se $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}(X)$ e $\mathscr{G}^\bullet \in \mathrm{D}(S)$, existe um morfismo natural

$$\mathrm{R}f_!\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{G}^\bullet \to \mathrm{R}f_!(\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathrm{L}f^*\mathscr{G}^\bullet).$$

A fórmula da projeção + adjunção

Se $\mathscr{F}^\bullet \in \mathsf{D}(X)$ e $\mathscr{G}^\bullet \in \mathsf{D}(S)$, existe um morfismo natural

$$\mathsf{R}f_!\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{G}^\bullet \to \mathsf{R}f_!(\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathsf{L}f^*\mathscr{G}^\bullet).$$

Além disso, o funtor $\mathsf{R}f_!$ tem um adjunto a direita $f^!$:

$$\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_S}(\mathsf{R}f_!\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \cong \mathsf{R}f_*\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}^\bullet, f^!\mathscr{G}^\bullet).$$

A fórmula da projeção + adjunção

Se $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}(X)$ e $\mathscr{G}^\bullet \in \mathrm{D}(S)$, existe um morfismo natural

$$\mathrm{R}f_!\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{G}^\bullet \to \mathrm{R}f_!(\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathrm{L}f^*\mathscr{G}^\bullet).$$

Além disso, o funtor $\mathrm{R}f_!$ tem um adjunto a direita $f^!$:

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_S}(\mathrm{R}f_!\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \cong \mathrm{R}f_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}^\bullet, f^!\mathscr{G}^\bullet).$$

O adjunto $f^!$ também satisfaz o teorema de mudança de base e a fórmula

$$f^!\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \cong \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_X}(\mathrm{L}f^*\mathscr{F}^\bullet, f^!\mathscr{G}^\bullet).$$

Complexos dualizantes

Seja $\omega_{X/S} := f^! \mathscr{O}_S$ o *complexo dualizante*. Se f é ””suave””, vale que

$$f^! \mathscr{F}^\bullet \cong \mathsf{L}f^* \mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_{\mathscr{O}_X} \omega_{X/S}.$$

Complexos dualizantes

Seja $\omega_{X/S} := f^! \mathscr{O}_S$ o *complexo dualizante*. Se f é ""suave"", vale que

$$f^! \mathscr{F}^\bullet \cong \mathrm{L}f^* \mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \omega_{X/S}.$$

Se $f : X \to \{p\}$, nós escrevemos ω_X para o complexo dualizante e definimos $D_X := \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_X}(-, \omega_X)$.

Complexos dualizantes

Seja $\omega_{X/S} := f^! \mathscr{O}_S$ o *complexo dualizante*. Se f é ""suave"", vale que

$$f^! \mathscr{F}^\bullet \cong \mathrm{L}f^* \mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \omega_{X/S}.$$

Se $f : X \to \{p\}$, nós escrevemos ω_X para o complexo dualizante e definimos $D_X := \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_X}(-, \omega_X)$.

Nós temos que $D_X^2 \cong \mathrm{id}$, $f^! \circ D_S \cong D_X \circ \mathrm{R}f^*$ e $\mathrm{R}f_* \circ D_X \cong D_S \circ \mathrm{R}f_!$.

Dualidade de Poincaré

Tomando $f : X \to \{p\}$ e $\mathscr{G}^\bullet = \underline{k}$ na adjunção

$$H^i(X, D\mathscr{F}^\bullet) \cong H_c^{-i}(X, \mathscr{F}^\bullet)^\vee.$$

Dualidade de Poincaré

Tomando $f : X \to \{p\}$ e $\mathscr{G}^\bullet = \underline{k}$ na adjunção

$$H^i(X, D\mathscr{F}^\bullet) \cong H_c^{-i}(X, \mathscr{F}^\bullet)^\vee.$$

Se X é uma variedade orientável de dimensão n, $k = \mathbb{R}$ e $\mathscr{F}^\bullet = \mathcal{L}$ é um sistema local, segue que $\omega_X = \mathbb{R}[n]$ e então

$$H^i(X, \mathcal{L}^\vee) \cong H_c^{n-i}(X, \mathcal{L})^\vee.$$

Formalismo de 6 funtores

Um formalismo de 6 funtores consiste em uma categoria triangulada tensorial $D(X)$ para cada *espaço* e:

Formalismo de 6 funtores

Um formalismo de 6 funtores consiste em uma categoria triangulada tensorial $D(X)$ para cada *espaço* e:

1. 2-funtores $f \mapsto f_*$, $f \mapsto f_!$, $f \mapsto f^*$ e $f \mapsto f^!$, os dois últimos contravariantes, tais que $f_* \vdash f^*$, $f^! \vdash f_!$ e f^* é monoidal.

Um formalismo de 6 funtores consiste em uma categoria triangulada tensorial $D(X)$ para cada *espaço* e:

1. 2-funtores $f \mapsto f_*$, $f \mapsto f_!$, $f \mapsto f^*$ e $f \mapsto f^!$, os dois últimos contravariantes, tais que $f_* \vdash f^*$, $f^! \vdash f_!$ e f^* é monoidal.
2. existe um morfismo de 2-funtores $f_! \to f_*$, que é um isomorfismo quando f é próprio.

Formalismo de 6 funtores

Um formalismo de 6 funtores consiste em uma categoria triangulada tensorial $D(X)$ para cada *espaço* e:

1. 2-funtores $f \mapsto f_*$, $f \mapsto f_!$, $f \mapsto f^*$ e $f \mapsto f^!$, os dois últimos contravariantes, tais que $f_* \vdash f^*$, $f^! \vdash f_!$ e f^* é monoidal.
2. existe um morfismo de 2-funtores $f_! \to f_*$, que é um isomorfismo quando f é próprio.
3. isomorfismos $f_! M \otimes N \cong f_!(M \otimes f^* N)$, $\mathrm{Hom}(f_! M, N) \cong f_* \mathrm{Hom}(M, f^! N)$ e $f^! \mathrm{Hom}(M, N) \cong \mathrm{Hom}(f^* M, f^! N)$.

4. para todo quadrado cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\bar{g}} & X \\ {\scriptstyle \bar{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S, \end{array}$$

isomorfismos naturais $f^* \circ g_! \cong \bar{g}_! \circ \bar{f}^*$ e $g^! \circ f_* \cong \bar{f}_* \circ \bar{g}^!$.

Formalismo de 6 funtores

4. para todo quadrado cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\bar{g}} & X \\ {\scriptstyle \bar{f}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S, \end{array}$$

   isomorfismos naturais $f^* \circ g_! \cong \bar{g}_! \circ \bar{f}^*$ e $g^! \circ f_* \cong \bar{f}_* \circ \bar{g}^!$.

5. alguma forma decente de calcular $f^!$ em casos particulares.

Dualidade de Grothendieck

Contexto: seja $f : X \to S$ um morfismo separado de tipo finito (e de dimensão tor finita) entre esquemas noetherianos. Essa é exatamente a condição necessária para que f se fatore como

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\text{imersão aberta}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \overline{X} \arrow[r, "\text{próprio}"] & S. \end{tikzcd}$$

Ideia

Contexto: seja $f : X \to S$ um morfismo separado de tipo finito (e de dimensão tor finita) entre esquemas noetherianos. Essa é exatamente a condição necessária para que f se fatore como

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\text{imersão aberta}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \overline{X} \arrow[r, "\text{próprio}"] & S. \end{tikzcd}$$

Nós queremos um formalismo de 6 funtores para feixes quasi-coerentes e tais morfismos.

Abordagem

Infelizmente $f_!$ não preserva quasi-coerência. Mas nós vamos achar um funtor $f^! : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S) \to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ que satisfaz as propriedades do formalismo de 6 funtores mesmo assim.

Infelizmente $f_!$ não preserva quasi-coerência. Mas nós vamos achar um funtor $f^! : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S) \to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ que satisfaz as propriedades do formalismo de 6 funtores mesmo assim.

Nós vamos provar que $\mathrm{R}f_*$ possui um adjunto à direita $f^\times$ e então vamos definir $f^! = \mathrm{L}i^* \circ p^\times$, onde $f = p \circ i$ é a fatoração de Nagata.

Abordagem

Infelizmente $f_!$ não preserva quasi-coerência. Mas nós vamos achar um funtor $f^! : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S) \to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ que satisfaz as propriedades do formalismo de 6 funtores mesmo assim.

Nós vamos provar que $\mathrm{R}f_*$ possui um adjunto à direita $f^\times$ e então vamos definir $f^! = \mathrm{L}i^* \circ p^\times$, onde $f = p \circ i$ é a fatoração de Nagata.

Isso independe da escolha de fatoração. (Tag 0A9Y)

Resultados (Lipman §3.9)

1. Nós temos funtores $\mathrm{R}f_* : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X) \to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S)$ e $\mathrm{L}f^* : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S) \to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$.

Resultados (Lipman §3.9)

1. Nós temos funtores $\mathrm{R}f_* : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X) \to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S)$ e $\mathrm{L}f^* : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S) \to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$.
2. A fórmula de projeção $\mathrm{R}f_*\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{G}^\bullet \to \mathrm{R}f_*(\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathrm{L}f^*\mathscr{G}^\bullet)$ vale para $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ e $\mathscr{G}^\bullet \in \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S)$.

Resultados (Lipman §3.9)

1. Nós temos funtores $\mathrm{R}f_* : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X) \to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S)$ e $\mathrm{L}f^* : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S) \to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$.
2. A fórmula de projeção $\mathrm{R}f_*\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{G}^\bullet \to \mathrm{R}f_*(\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \mathrm{L}f^*\mathscr{G}^\bullet)$ vale para $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ e $\mathscr{G}^\bullet \in \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S)$.
3. Para todo quadrado cartesiano com g plano

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S, \end{tikzcd}$$

o teorema de mudança de base $\mathrm{L}f^* \circ \mathrm{R}g_* \cong \mathrm{R}\bar{g}_* \circ \mathrm{L}\bar{f}^*$ vale.

Resultados

4. Existem 2-funtores contravariantes $f \mapsto f^{\times}$ e $f \mapsto f^{!}$ tais que $f^{\times} \vdash \mathrm{R}f_*$.

Resultados

4. Existem 2-funtores contravariantes $f \mapsto f^\times$ e $f \mapsto f^!$ tais que $f^\times \vdash \mathrm{R}f_*$.
5. Existe um morfismo de 2-funtores $f^\times \to f^!$, que é um isomorfismo quando f é próprio.

4. Existem 2-funtores contravariantes $f \mapsto f^{\times}$ e $f \mapsto f^{!}$ tais que $f^{\times} \vdash \mathrm{R}f_*$.
5. Existe um morfismo de 2-funtores $f^{\times} \to f^{!}$, que é um isomorfismo quando f é próprio.
6. Se f é próprio, nós temos que

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\mathscr{O}_S}(\mathrm{R}f_*\mathscr{F}^{\bullet}, \mathscr{G}^{\bullet}) \cong \mathrm{R}f_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}^{\bullet}, f^{!}\mathscr{G}^{\bullet})$$

para $\mathscr{F}^{\bullet} \in \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ e $\mathscr{G}^{\bullet} \in \mathrm{D}^{+}_{\mathrm{qc}}(S)$. (Lipman 4.4.2)

Resultados

4. Existem 2-funtores contravariantes $f \mapsto f^{\times}$ e $f \mapsto f^{!}$ tais que $f^{\times} \vdash \mathrm{R}f_*$.
5. Existe um morfismo de 2-funtores $f^{\times} \to f^{!}$, que é um isomorfismo quando f é próprio.
6. Se f é próprio, nós temos que

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\mathscr{O}_S}(\mathrm{R}f_*\mathscr{F}^{\bullet}, \mathscr{G}^{\bullet}) \cong \mathrm{R}f_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}^{\bullet}, f^{!}\mathscr{G}^{\bullet})$$

   para $\mathscr{F}^{\bullet} \in \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ e $\mathscr{G}^{\bullet} \in \mathrm{D}^{+}_{\mathrm{qc}}(S)$. (Lipman 4.4.2)

7. Se f é étale, $f^{!} = \mathrm{L}f^{*}$. Se f é uma imersão fechada, $f^{\times}(-) = f^{!}(-) = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_X, -)$.

Resultados

4. Existem 2-funtores contravariantes $f \mapsto f^\times$ e $f \mapsto f^!$ tais que $f^\times \vdash \mathrm{R}f_*$.
5. Existe um morfismo de 2-funtores $f^\times \to f^!$, que é um isomorfismo quando f é próprio.
6. Se f é próprio, nós temos que

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_S}(\mathrm{R}f_*\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \cong \mathrm{R}f_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}^\bullet, f^!\mathscr{G}^\bullet)$$

   para $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ e $\mathscr{G}^\bullet \in \mathrm{D}^+_{\mathrm{qc}}(S)$. (Lipman 4.4.2)
7. Se f é étale, $f^! = \mathrm{L}f^*$. Se f é uma imersão fechada, $f^\times(-) = f^!(-) = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_X, -)$.
8. Se f é próprio e suave de dimensão relativa d, $f^\times(-) = f^!(-) \cong Lf^*(-) \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_X} \Omega^d_{X/S}[d]$.

Isso é o suficiente? (N-H lemma 3.11)

Quase sempre nós conseguimos fatorar o nosso morfismo $f : X \to S$ como

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\text{imersão aberta}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \overline{X} \arrow[r, hook, "\text{imersão fechada}"] & \overline{X}' \arrow[r, "\text{próprio e suave}"] & S. \end{tikzcd}$$

Como $(-)^!$ é um 2-funtor, basta saber calcular a sua imagem em cada um dos casos acima, o que nós sabemos fazer!

Dualidade de Serre

Seja $f : X \to \operatorname{Spec} k$ uma variedade própria e suave de dimensão n. Pela adjunção e pelo cálculo de $f^\times$ nesse caso

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_k(\mathrm{R}f_*\mathscr{E}, k) \cong \mathrm{R}f_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E}, \Omega^n_X[n]),$$

onde $\mathscr{E}$ é um fibrado vetorial. Segue que (tomando seções globais e cohomologia)

$$H^i(X, \mathscr{E})^\vee \cong \operatorname{Ext}^{n-i}(\mathscr{E}, \Omega^n_X).$$

Aplicações da Dualidade de Grothendieck

- Generaliza GRR e dualidade de Serre ao mesmo tempo.

Aplicações da Dualidade de Grothendieck

- Generaliza GRR e dualidade de Serre ao mesmo tempo.
- Resolução de singularidades em dimensão 2

Aplicações da Dualidade de Grothendieck

- Generaliza GRR e dualidade de Serre ao mesmo tempo.
- Resolução de singularidades em dimensão 2
- Seja X uma variedade de dim n e $\mathscr{F}$ coerente. Se $H^n(X, \mathscr{F}) = 0$, então X é própria.

Aplicações da Dualidade de Grothendieck (Fourier-Mukai)

Se f é uma função na reta, a sua transformada de Fourier é a função $\hat{f}$ em S^1 dada por

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, \mathrm{d}x.$$

Aplicações da Dualidade de Grothendieck (Fourier-Mukai)

Se f é uma função na reta, a sua transformada de Fourier é a função $\hat{f}$ em S^1 dada por

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, \mathrm{d}x.$$

Isso é,

1. Nós fazemos a imagem inversa de f para uma função $\tilde{f}$ em $\mathbb{R} \times S^1$: $\tilde{f}(x, \xi) = f(x)$.
2. Multiplicamos $\tilde{f}$ pelo *núcleo* $e^{-2\pi i x \xi}$.
3. Fazemos a imagem direta para S^1. Isso é, integramos em relação a x.

Em geometria nós fazemos exatamente a mesma coisa.

Definição - Funtor de Fourier-Mukai

Seja $\mathscr{E} \in \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X \times Y)$ e denote por $p : X \times Y \to X$ e $q : X \times Y \to Y$ as projeções. O *funtor de Fourier-Mukai* associado a $\mathscr{E}$ é

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathscr{E}} : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X) &\to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(Y) \\ \mathscr{F}^\bullet &\mapsto q_*(\mathscr{E} \otimes^{\mathrm{L}} p^* \mathscr{F}^\bullet). \end{aligned}$$

Aplicações da Dualidade de Grothendieck (Fourier-Mukai)

(Mukai) fibrado de Poincaré

Seja A uma variedade abeliana com dual $\hat{A}$ e $\mathscr{P}$ o fibrado de Poincaré em $A \times \hat{A}$. Então $\Phi_{\mathscr{P}}$ define uma equivalência de categorias entre $\mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(A)$ e $\mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(\hat{A})$.

Aplicações da Dualidade de Grothendieck (Fourier-Mukai)

All functors are Fourier-Mukai

Sejam X e Y suaves e projetivos sobre k e seja $F : \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(X) \to \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ um funtor plenamente fiel. Então $F \cong \Phi_{\mathscr{E}}$ para algum $\mathscr{E} \in \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(X \times Y)$.

Corolário da dualidade de Grothendieck

Sejam X e Y suaves e projetivos e seja $\Phi_{\mathscr{E}} : \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(X) \to \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ um funtor de Fourier-Mukai. Então $\Phi_{\mathscr{E}}$ possui um adjunto à esquerda definido por $\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet(\mathscr{E}, p^!\mathscr{O}_X)$, e um adjunto à direita definido por $\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet(\mathscr{E}, q^!\mathscr{O}_Y)$.

Representabilidade de Brown

Definição - Objetos compactos

Seja K uma categoria triangulada. Um objeto $M \in \mathsf{K}$ é dito *compacto* se, para todo coproduto $\coprod_i N_i$ de objetos de K, o mapa natural

$$\coprod_i \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}}(M, N_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}}\left(M, \coprod_i N_i\right)$$

é uma bijeção.

Contexto

Definição - Cat. gerada por compactos

Seja K uma categoria triangulada. Nós dizemos que K é *gerada por compactos* se K possui todos os coprodutos e se existe um conjunto $\mathcal{C}$ de objetos compactos tais que

$$N = 0 \iff \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}}(M, N) = 0 \text{ para todo } M \in \mathcal{C}.$$

Contexto

Proposição

Seja K gerada por um conjunto $\mathcal{C}$ de compactos. Se S é a menor subcategoria plena de K que contém $\mathcal{C}$ e é estável por coprodutos, então $S = K$.

Se X é um espaço localmente anelado, um complexo em $D(X)$ é dito *perfeito* se ele é localmente isomorfo à um complexo limitado de $\mathscr{O}_X$-módulos livres finitos.

Se X é um espaço localmente anelado, um complexo em $D(X)$ é dito *perfeito* se ele é localmente isomorfo à um complexo limitado de $\mathscr{O}_X$-módulos livres finitos.

Proposição

Seja X um esquema qcqs. Então $\mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ é compactamente gerada pelos complexos perfeitos. Além disso, para um complexo $\mathscr{F}^\bullet$,

$$\mathscr{F}^\bullet \text{ é compacto} \iff \mathscr{F}^\bullet \text{ é perfeito} \iff \mathscr{F}^\bullet \text{ é dualizável.}$$

Contexto

Se X é um espaço localmente anelado, um complexo em $D(X)$ é dito *perfeito* se ele é localmente isomorfo à um complexo limitado de $\mathscr{O}_X$-módulos livres finitos.

Proposição

Seja X um esquema qcqs. Então $\mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ é compactamente gerada pelos complexos perfeitos. Além disso, para um complexo $\mathscr{F}^\bullet$,

$$\mathscr{F}^\bullet \text{ é compacto} \iff \mathscr{F}^\bullet \text{ é perfeito} \iff \mathscr{F}^\bullet \text{ é dualizável.}$$

Em particular, se um resultado é válido para complexos perfeitos e é estável por coprodutos, ele é válido sempre.

Teorema - Representabilidade de Brown

Seja K uma categoria gerada por compactos. Se $H : \mathsf{K} \to \mathsf{Ab}$ é um funtor (contravariante) cohomológico que preserva coprodutos, então H é representável.

Teorema - Representabilidade de Brown

Seja K uma categoria gerada por compactos. Se $H : \mathsf{K} \to \mathsf{Ab}$ é um funtor (contravariante) cohomológico que preserva coprodutos, então H é representável.

Esse mesmo resultado vale se K é a categoria derivada de uma categoria abeliana de Grothendieck.

Existência de adjuntos

Corolário - Teorema do funtor adjunto

Seja $F : \mathsf{K} \to \mathsf{K}'$ um funtor triangulado. Suponha que K é gerada por compactos e que F preserva coprodutos. Então F possui um adjunto à direita $G : \mathsf{K}' \to \mathsf{K}$.

Corolário - Teorema do funtor adjunto

Seja $F : \mathsf{K} \to \mathsf{K}'$ um funtor triangulado. Suponha que K é gerada por compactos e que F preserva coprodutos. Então F possui um adjunto à direita $G : \mathsf{K}' \to \mathsf{K}$.

Para cada $N \in \mathsf{K}'$, o funtor

$$\mathsf{K} \to \mathrm{Ab}, \quad M \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathsf{K}'}(F(M), N)$$

é cohomológico e preserva coprodutos.

Corolário - Teorema do funtor adjunto

Seja $F : \mathsf{K} \to \mathsf{K}'$ um funtor triangulado. Suponha que K é gerada por compactos e que F preserva coprodutos. Então F possui um adjunto à direita $G : \mathsf{K}' \to \mathsf{K}$.

Para cada $N \in \mathsf{K}'$, o funtor

$$\mathsf{K} \to \mathsf{Ab}, \quad M \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathsf{K}'}(F(M), N)$$

é cohomológico e preserva coprodutos.

Logo ele é representado por um objeto $G(N) \in \mathsf{K}$:

$$\mathbf{Hom}_{\mathsf{K}'}(F(M), N) \cong \mathbf{Hom}_{\mathsf{K}}(M, G(N)).$$

O nosso caso

Proposição

Seja $f : X \to S$ um morfismo separado entre esquemas qcqs. Então o funtor $\mathrm{R}f_* : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X) \to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S)$ preserva coprodutos.

O nosso caso

Proposição

Seja $f : X \to S$ um morfismo separado entre esquemas qcqs. Então o funtor $\mathrm{R}f_* : \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(X) \to \mathrm{D}_{\mathrm{qc}}(S)$ preserva coprodutos.

O enunciado é local em S, então vamos supor S afim. Como X é quasi-compacto,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i, \qquad U_i \text{ aberto afim.}$$

Vamos provar a proposição fazendo indução em n.

O nosso caso

Se $n = 1$, X é afim e f_* corresponde à restrição de escalares. Então $\mathrm{R}f_*$ preserva coprodutos, pois ele tem um adjunto à direita. (Que eu chamei de $\mathrm{R}f^!$ nas notas.)

O nosso caso

Se $n = 1$, X é afim e f_* corresponde à restrição de escalares. Então $\mathrm{R}f_*$ preserva coprodutos, pois ele tem um adjunto à direita. (Que eu chamei de $\mathrm{R}f^!$ nas notas.) Se $n > 1$, seja $U = U_1$ e $V = \bigcup_{i=2}^n U_i$. Denotando por $j_1 : U \hookrightarrow X$, $j_2 : V \hookrightarrow X$ e $j_{12} \hookrightarrow X$ as inclusões, nós temos um triângulo "distinguished"

$$\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathrm{R}j_{1*}j_1^*\mathscr{F}^\bullet \oplus \mathrm{R}j_{2*}j_2^*\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathrm{R}j_{12*}j_{12}^*\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet[1].$$

O nosso caso

Aplicando $\mathrm{R}f_*$ nós temos

$$\mathrm{R}f_*\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathrm{R}(f_U)_* j_1^*\mathscr{F}^\bullet \oplus \mathrm{R}(f_V)_* j_2^*\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathrm{R}(f_{U\cap V})_* j_{12}^*\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathrm{R}f_*\mathscr{F}^\bullet[1].$$

Aplicando $\mathrm{R}f_*$ nós temos

$$\mathrm{R}f_*\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathrm{R}(f_U)_*j_1^*\mathscr{F}^\bullet \oplus \mathrm{R}(f_V)_*j_2^*\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathrm{R}(f_{U\cap V})_*j_{12}^*\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathrm{R}f_*\mathscr{F}^\bullet[1].$$

Nós temos então um morfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd}
\coprod_i \mathrm{R}f_*\mathscr{F}_i^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_i F(\mathscr{F}_i^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_i G(\mathscr{F}_i^\bullet) \arrow[d] \\
\mathrm{R}f_*\left(\coprod_i \mathscr{F}_i^\bullet\right) \arrow[r] & F\left(\coprod_i \mathscr{F}_i^\bullet\right) \arrow[r] & G\left(\coprod_i \mathscr{F}_i^\bullet\right).
\end{tikzcd}$$

Perguntas?