Galois Groups and Fundamental Groups

um resumo

Gabriel Ribeiro

École Polytechnique

Sumário

Recobrimentos e teoria de Galois

Uma analogia

Álgebra

- Extensão K/k algébrica

Uma analogia

Álgebra

- Extensão K/k algébrica
- *K/k é Galois se $K^{\mathrm{Aut}(K|k)} = k$*

Uma analogia

Álgebra

- Extensão K/k algébrica
- K/k é *Galois* se $K^{\mathrm{Aut}(K|k)} = k$
- Existe uma "maior extensão galoisiana" k^{sep}, única a menos de isomorfismo (não único)

Álgebra

- Extensão K/k algébrica
- K/k é *Galois* se $K^{\mathrm{Aut}(K|k)} = k$
- Existe uma "maior extensão galoisiana" k^{sep}, única a menos de isomorfismo (não único)
- $\mathrm{Aut}(k^{\mathrm{sep}}|k) = \mathrm{Gal}(k)$

Uma analogia

Álgebra

- Extensão K/k algébrica
- K/k é *Galois* se $K^{\mathrm{Aut}(K|k)} = k$
- Existe uma "maior extensão galoisiana" k^{sep}, única a menos de isomorfismo (não único)
- $\mathrm{Aut}(k^{\mathrm{sep}}|k) = \mathrm{Gal}(k)$

Uma analogia

Álgebra

- Extensão K/k algébrica
- K/k é *Galois* se $K^{\mathrm{Aut}(K|k)} = k$
- Existe uma "maior extensão galoisiana" k^{sep}, única a menos de isomorfismo (não único)
- $\mathrm{Aut}(k^{\mathrm{sep}}|k) = \mathrm{Gal}(k)$

Topologia

- Recobrimentos $X \to S$

Uma analogia

Álgebra

- Extensão K/k algébrica
- K/k é *Galois* se $K^{\mathrm{Aut}(K|k)} = k$
- Existe uma "maior extensão galoisiana" k^{sep}, única a menos de isomorfismo (não único)
- $\mathrm{Aut}(k^{\mathrm{sep}}|k) = \mathrm{Gal}(k)$

Topologia

- Recobrimentos $X \to S$
- $X \to S$ é *Galois* se $X/\,\mathrm{Aut}(X|S) \cong S$

Uma analogia

Álgebra

- Extensão K/k algébrica
- K/k é *Galois* se $K^{\mathrm{Aut}(K|k)} = k$
- Existe uma "maior extensão galoisiana" k^{sep}, única a menos de isomorfismo (não único)
- $\mathrm{Aut}(k^{\mathrm{sep}}|k) = \mathrm{Gal}(k)$

Topologia

- Recobrimentos $X \to S$
- $X \to S$ é *Galois* se $X/\mathrm{Aut}(X|S) \cong S$
- Existe um "maior recobrimento Galois" $\widetilde{S}$, único a menos de isomorfismo (não único)

Uma analogia

Álgebra

- Extensão K/k algébrica
- K/k é *Galois* se $K^{\mathrm{Aut}(K|k)} = k$
- Existe uma "maior extensão galoisiana" k^{sep}, única a menos de isomorfismo (não único)
- $\mathrm{Aut}(k^{\mathrm{sep}}|k) = \mathrm{Gal}(k)$

Topologia

- Recobrimentos $X \to S$
- $X \to S$ é *Galois* se $X/\mathrm{Aut}(X|S) \cong S$
- Existe um "maior recobrimento Galois" $\widetilde{S}$, único a menos de isomorfismo (não único)
- $\mathrm{Aut}(\widetilde{S}|S)^{\mathrm{op}} \cong \pi_1(S, s)$.

O teorema fundamental da teoria de Galois

Seja K/k uma extensão galoisiana com grupo de Galois G. Os mapas

$$L \mapsto H := \mathrm{Gal}(K|L) \qquad \text{e} \qquad H \mapsto L := K^H$$

definem uma bijeção entre os subcorpos $k \subset L \subset K$ e os subgrupos fechados $H \subset G$. Uma subextensão K^H/k é Galois se e somente se H é normal. Nesse caso, $\mathrm{Gal}(K^H/k) \cong G/H$.

O teorema fundamental da teoria de recobrimentos

Seja $X \to S$ um recobrimento Galois e $G := \mathrm{Aut}(X|S)$. Os mapas

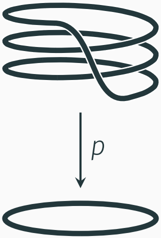
$$Y \mapsto H := \mathrm{Aut}(X|Y) \qquad \text{e} \qquad H \mapsto Y := X/H$$

definem uma bijeção entre os recobrimentos intermediários $X \to Y \to S$ e os subgrupos $H \subset G$. Um recobrimento $X/H \to S$ é Galois se e somente se H é normal. Nesse caso, $\mathrm{Aut}(X/H|S) \cong G/H$.

Lembrete da teoria de recobrimentos

Seja $p : X \to S$ um recobrimento, $s \in S$ e $x \in p^{-1}(s)$ um ponto da fibra de s.

Lembramos que, dado um caminho fechado $\gamma : [0,1] \to S$ de base s, existe um único caminho $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ à menos de homotopia tal que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $\tilde{\gamma}(0) = x$.



A ação de monodromia

Nós definimos então a ação de monodromia

Definição - Ação de monodromia

Dado $\alpha \in \pi_1(S, s)$ representado por um caminho γ, nós definimos a *ação de monodromia* de $\pi_1(S, s)$ sobre a fibra $p^{-1}(s)$ como $\alpha \cdot x := \tilde{\gamma}(1)$. Essa definição não depende da escolha de γ.

O funtor fibra

Teorema - Classificação dos recobrimentos

Seja S conexo e localmente simplesmente conexo e $s \in S$. Então o funtor fibra Fib_s, dado por

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Recobrimentos} \\ \text{de } S \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \pi_1(S, s)\text{-} \\ \text{conjuntos} \end{array} \right\} \\ (p : X \to S) & \longmapsto & p^{-1}(s), \end{array}$$

é uma equivalência de categorias.

Automorfismos do funtor fibra

O funtor Fib_s é representado pelo recobrimento universal $\tilde{S}$ e então o lema de Yoneda implica que

$$\mathbf{Aut}(\mathrm{Fib}_s) \cong \mathbf{Aut}(\tilde{S}|S)^{\mathrm{op}} \cong \pi_1(S, s).$$

Nós poderíamos então definir o grupo fundamental como sendo $\mathbf{Aut}(\mathrm{Fib}_s)$.

O caso dos recobrimentos finitos

Teorema - Classificação dos recobrimentos finitos

Suponha S conexo e $s \in S$. Então o funtor fibra Fib_s restrito à categoria dos recobrimentos finitos de S

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Recobrimentos} \\ \text{finitos de } S \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \widehat{\pi_1(S,s)}\text{-conjuntos} \\ \text{finitos contínuos} \end{array} \right\},$$

onde $\widehat{\pi_1(S,s)}$ é o completamento profinito de $\pi_1(S,s)$, é uma equivalência de categorias.

O caso dos recobrimentos finitos

Teorema - Classificação dos recobrimentos finitos

Suponha S conexo e $s \in S$. Então o funtor fibra Fib_s restrito à categoria dos recobrimentos finitos de S

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Recobrimentos} \\ \text{finitos de } S \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \widehat{\pi_1(S,s)}\text{-conjuntos} \\ \text{finitos contínuos} \end{array} \right\},$$

onde $\widehat{\pi_1(S,s)}$ é o completamento profinito de $\pi_1(S,s)$, é uma equivalência de categorias.

Aqui, novamente, nós temos que $\mathsf{Aut}(\mathrm{Fib}_s) \cong \widehat{\pi_1(S,s)}$.

Teorema - Teoria de Galois de Grothendieck

Seja k um corpo e escolha k^{sep}. Então o funtor dado por

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \text{Extensões finitas} \\ \text{separáveis de } k \end{array} \right\} &\longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Gal}(k)\text{-conjuntos} \\ \text{finitos e transitivos} \end{array} \right\} \\ L/k &\longmapsto \mathrm{Hom}_k(L, k^{\text{sep}}), \end{aligned}$$

é uma anti-equivalência de categorias.

Teorema

Seja S uma superfície de Riemann compacta conexa. Então o funtor dado por

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Superfícies de Riemann} \\ \text{compactas, conexas} \\ \text{e holomorfas sobre } S \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Extensões finitas} \\ \text{separáveis de } K_S \end{array} \right\} \\ X & \longmapsto & K_X, \end{array}$$

é uma anti-equivalência de categorias.

Definição - Categoria de Galois

Uma *categoria de Galois* é uma categoria C, dotada de um funtor $F : \mathsf{C} \to \mathsf{FinSet}$, que satisfaz alguns axiomas.

Definição - Categoria de Galois

Uma *categoria de Galois* é uma categoria C, dotada de um funtor $F : \mathsf{C} \to \mathsf{FinSet}$, que satisfaz alguns axiomas.

Teorema fundamental

Seja (C, F) uma categoria de Galois. Então $\mathrm{Aut}(F)$ possui uma topologia profinita natural, a qual nos dá uma equivalência de categorias entre C e a categoria dos $\mathrm{Aut}(F)$-conjuntos finitos e contínuos.

O grupo fundamental étale

Esquemas possuem poucos recobrimentos

Proposição

Todo espaço topológico X que possui um ponto genérico p é contratível.

Esquemas possuem poucos recobrimentos

Proposição

Todo espaço topológico X que possui um ponto genérico p é contratível.

De fato, a aplicação $f : X \times [0,1] \to X$ dada por

$$f(x,0) = x \qquad \text{e} \qquad f(x,t) = p, \ \text{para } t > 0$$

é uma retração por deformação.

Esquemas possuem poucos recobrimentos

Proposição

Todo espaço topológico X que possui um ponto genérico p é contratível.

De fato, a aplicação $f : X \times [0,1] \to X$ dada por

$$f(x,0) = x \qquad \text{e} \qquad f(x,t) = p, \text{ para } t > 0$$

é uma retração por deformação.

Em particular, o grupo fundamental de um esquema integral é trivial.

Precisamos de uma noção mais geral

Recobrimento

- função contínua $f : X \to S$
- localmente trivial (topologicamente)

Morfismo étale

- morfismo suave $f : X \to S$
- de dimensão relativa 0

Precisamos de uma noção mais geral

Recobrimento

- função contínua $f : X \to S$
- localmente trivial (topologicamente)

Morfismo étale

- morfismo suave $f : X \to S$
- de dimensão relativa 0

- Recobrimento $\implies$ étale

Precisamos de uma noção mais geral

Recobrimento

- função contínua $f : X \to S$
- localmente trivial (topologicamente)

Morfismo étale

- morfismo suave $f : X \to S$
- de dimensão relativa 0

- Recobrimento $\implies$ étale
- Em variedades suaves sobre $\overline{k}$:
  $f : X \to S$ é étale $\iff$ $\mathrm{d}f_p : T_pX \to T_{f(p)}S$ é isomorfismo $\forall p \in X$

Morfismos étales finitos

Um morfismo $f : X \to S$ é étale finito se e somente se:

- Para todo $s \in S$, existe um morfismo étale $V \to S$ contendo s em sua imagem (uma "vizinhança étale" de s)

Morfismos étales finitos

Um morfismo $f : X \to S$ é étale finito se e somente se:

- Para todo $s \in S$, existe um morfismo étale $V \to S$ contendo s em sua imagem (uma "vizinhança étale" de s)
- tal que $X \times_S V \to V$ ("a restrição $f^{-1}(V) \to V$") é uma união disjunta finita de cópias de V.

Morfismos étales finitos

Um morfismo $f : X \to S$ é étale finito se e somente se:

- Para todo $s \in S$, existe um morfismo étale $V \to S$ contendo s em sua imagem (uma "vizinhança étale" de s)
- tal que $X \times_S V \to V$ ("a restrição $f^{-1}(V) \to V$") é uma união disjunta finita de cópias de V.

Morfismos étales finitos

Um morfismo $f : X \to S$ é étale finito se e somente se:

- Para todo $s \in S$, existe um morfismo étale $V \to S$ contendo s em sua imagem (uma "vizinhança étale" de s)
- tal que $X \times_S V \to V$ ("a restrição $f^{-1}(V) \to V$") é uma união disjunta finita de cópias de V.

Nós chamaremos então um morfismo étale finito de *recobrimento étale*

Como em topologia, um recobrimento $X \to S$ é *Galois* se $X/\operatorname{Aut}(X|S) \cong S$. (Equiv. se $\operatorname{Aut}(X|S)$ age transitivamente nas fibras.)

Como em topologia, um recobrimento $X \to S$ é *Galois* se $X/\operatorname{Aut}(X|S) \cong S$. (Equiv. se $\operatorname{Aut}(X|S)$ age transitivamente nas fibras.)

Teorema fundamental da teoria de Galois

Seja $X \to S$ um recobrimento étale Galois e $G := \operatorname{Aut}(X|S)$. Os mapas

$$Y \mapsto H := \operatorname{Aut}(X|Y) \qquad \text{e} \qquad H \mapsto Y := X/H$$

definem uma bijeção entre os recobrimentos étales intermediários $X \to Y \to S$ e os subgrupos $H \subset G$. Um recobrimento étale $X/H \to S$ é Galois se e somente se H é normal. Nesse caso, $\operatorname{Aut}(X/H|S) \cong G/H$.

Definição - Grupo fundamental étale

Seja S um esquema conexo e $\bar{s}$ um ponto geométrico (i.e. um morfismo $\operatorname{Spec}\Omega \to S$, onde Ω é um corpo separavelmente fechado). Como antes, nós construímos um funtor fibra $\mathsf{Fib}_{\bar{s}}$ da categoria dos recobrimentos étales de S para Set. O *grupo fundamental étale* $\pi_1(S, \bar{s})$ é definido como sendo $\mathsf{Aut}(\mathsf{Fib}_{\bar{s}})$.

O funtor fibra

Classificação dos recobrimentos étales

Seja S um esquema conexo e $\bar{s}$ um ponto geométrico de S. Então o funtor fibra $\mathrm{Fib}_{\bar{s}}$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Recobrimentos} \\ \text{étales finitos de } S \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \pi_1(S, \bar{s})\text{-conjuntos} \\ \text{finitos contínuos} \end{array} \right\}$$

é uma equivalência de categorias.

Caracterizações do grupo fundamental

Proposição

Seja S um esquema integral normal conexo, K_S o seu corpo de funções e $\overline{\eta}$ um ponto geométrico genérico. Então

$$\pi_1(S, \overline{\eta}) = \mathrm{Gal}(K_S^{\mathrm{ur}}/K_S),$$

onde K_S^{ur} é a extensão maximal não-ramificada de K_S.

Proposição

Seja S um esquema integral normal conexo, K_S o seu corpo de funções e $\overline{\eta}$ um ponto geométrico genérico. Então

$$\pi_1(S, \overline{\eta}) = \mathrm{Gal}(K_S^{\mathrm{ur}}/K_S),$$

onde K_S^{ur} é a extensão maximal não-ramificada de K_S.

Proposição

Seja S um esquema conexo e $\overline{s}$ um ponto geométrico. Então

$$\pi_1(S, \overline{s}) \cong \lim \mathrm{Aut}(X|S)^{\mathrm{op}},$$

onde $X \to S$ percorrem os recobrimentos étales Galois de S.

Alguns exemplos

Teoria de corpos

Seja L/k uma extensão de corpos. Então $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} k$ é um recobrimento étale se e somente se L é uma extensão finita separável de k.

Alguns exemplos

Teoria de Galois

Seja k um corpo e $S = \operatorname{Spec} k$. Nesse caso, um ponto geométrico $\bar{s}$ corresponde precisamente à escolha de um feixo separável k^{sep} de k. Então $\pi_1(S, \bar{s}) \cong \operatorname{Gal}(k^{\text{sep}}|k)$ é o grupo de Galois absoluto de k.

Alguns exemplos

Teoria de Galois

Seja k um corpo e $S = \operatorname{Spec} k$. Nesse caso, um ponto geométrico $\overline{s}$ corresponde precisamente à escolha de um feixo separável k^{sep} de k. Então $\pi_1(S, \overline{s}) \cong \operatorname{Gal}(k^{\mathrm{sep}}|k)$ é o grupo de Galois absoluto de k.

Dado esse exemplo, o teorema fundamental da teoria de Galois é um caso particular da classificação dos recobrimentos étales.

Aneis de inteiros

Sejam $K \subset L$ corpos de números e $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_L$ os seus aneis de inteiros. Então $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ é um recobrimento étale se e somente se a extensão L/K não é ramificada. Além disso, todo recobrimento étale conexo de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ é dessa forma. Pelo teorema de Minkowski, $\pi_1(\operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ é trivial.

Alguns exemplos

Reta afim e projetiva

Seja k um corpo. Então $\pi_1(\mathbb{P}^1_k) \cong \pi_1(\operatorname{Spec} k) \cong \operatorname{Gal}(k_s|k)$. Se $\operatorname{char} k = 0$, então $\pi_1(\mathbb{A}^1_k) \cong \pi_1(\operatorname{Spec} k) \cong \operatorname{Gal}(k_s|k)$.

Alguns exemplos

Reta afim e projetiva

Seja k um corpo. Então $\pi_1(\mathbb{P}^1_k) \cong \pi_1(\operatorname{Spec} k) \cong \operatorname{Gal}(k_s|k)$. Se $\operatorname{char} k = 0$, então $\pi_1(\mathbb{A}^1_k) \cong \pi_1(\operatorname{Spec} k) \cong \operatorname{Gal}(k_s|k)$.

Em particular, $\pi_1(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) = \pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \{1\}$ como esperado.

Recobrimento de Kummer

Seja k algebricamente fechado, de característica 0 e considere $\mathbb{G}_m := \mathbb{G}_{m,k}$. O morfismo

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathbb{G}_m &\to \mathbb{G}_m \\ t &\mapsto t^n \end{aligned}$$

é um recobrimento étale Galois e qualquer tal recobrimento é dessa forma. Segue que

$$\pi_1(\mathbb{G}_m) \cong \lim \mathrm{Aut}(\varphi_n)^{\mathrm{op}} \cong \lim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Variedades abelianas

Seja A uma variedade abeliana sobre k algebricamente fechado. Então

$$\pi_1(A) \cong \varprojlim_n A_n(k) \left(= \prod_\ell T_\ell(A) \right).$$

Propriedades básicas

Proposição

Seja S um esquema conexo e $\bar{s} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to S$, $\bar{s}' : \mathrm{Spec}(\Omega) \to S$ dois pontos geométricos. Então existe um isomorfismo de grupos profinitos

$$\pi_1(S, \bar{s}) \cong \pi_1(S, \bar{s}').$$

Propriedades básicas

Proposição

Seja S um esquema conexo e $\bar{s} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to S$, $\bar{s}' : \mathrm{Spec}(\Omega) \to S$ dois pontos geométricos. Então existe um isomorfismo de grupos profinitos

$$\pi_1(S, \bar{s}) \cong \pi_1(S, \bar{s}').$$

Proposição

Sejam S_1, S_2 esquemas conexos noetherianos sobre k algébricamente fechado. Assuma que um deles é próprio e geometricamente integral. Então

$$\pi_1(S_1 \times_k S_2, (\overline{s_1}, \overline{s_2})) \cong \pi_1(S_1, \overline{s_1}) \times \pi_1(S_2, \overline{s_2}).$$

Propriedades básicas

Proposição

Seja S quasi-compacto e geometricamente integral sobre k. Fixe k^{sep} e $S^{\mathrm{sep}} := S \times_k k^{\mathrm{sep}}$. A sequência de grupos profinitos

$$1 \to \pi_1(S^{\mathrm{sep}}) \to \pi_1(S) \to \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}|k) \to 1$$

é exata.

Teorema - GAGA

Seja S um esquema conexo de tipo finito sobre $\mathbb{C}$. O funtor de analitificação induz uma equivalência entre a categoria dos recobrimentos étales de S e dos recobrimentos topológicos finitos de S^{an}. Em particular,

$$\pi_1(S) = \pi_1^{\widehat{\mathrm{top}}(S^{\mathrm{an}})}.$$

GAGA stuff

Teorema - GAGA

Seja S um esquema conexo de tipo finito sobre $\mathbb{C}$. O funtor de analitificação induz uma equivalência entre a categoria dos recobrimentos étales de S e dos recobrimentos topológicos finitos de S^{an}. Em particular,

$$\pi_1(S) = \widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(S^{\mathrm{an}})}.$$

Em particular, se S é uma curva própria lisa e conexa de gênero g, o seu grupo fundamental é o completamento profinito de

$$\Gamma_g := \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

Teorema

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica p e S uma curva própria, lisa e conexa de gênero g sobre k. O grupo $\pi_1(S)^{(p')}$, definido como o quociente de $\pi_1(S)$ pelo subgrupo fechado gerado pelos p-Sylows, é isomorfo ao p-completamento profinito de Γ_g.

Assuntos mais recentes

Um teorema do Lang

Seja S um esquema (integral separado) de tipo finito sobre $\mathbb{Z}$. Se $p \in S$ é um ponto fechado, o seu corpo residual $\kappa(p)$ é finito e o morfismo $\mathrm{Spec}(\kappa(p)) \to S$ induz $\mathrm{Gal}(\kappa(p)) \to \pi_1(S)$.

Um automorfismo de Frobenius em $\mathrm{Gal}(\kappa(p))$ gera uma classe de conjugação em $\pi_1(S)$ cujos elementos se chamam *elementos de Frobenius*.

Teorema (Lang)

Os elementos de Frobenius geram um subgrupo denso de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(S)$.

Uma *categoria Tannakiana sobre k* é uma categoria abeliana C (+ stuff) dotada de um funtor $F : \mathsf{C} \to k\text{-}\mathsf{finVect}$.

Uma *categoria Tannakiana sobre k* é uma categoria abeliana C (+ stuff) dotada de um funtor $F : \mathsf{C} \to k\text{-}\mathbf{finVect}$.

Teorema

Toda categoria Tannakiana sobre k é equivalente à G-**Rep**, onde G é um grupo esquema afim sobre k.

O grupo fundamental de Nori

Seja S um esquema conexo. Existe uma bijeção entre recobrimentos étale Galois $X \to S$ com grupo de Galois G e G_S-torsores.

O grupo fundamental de Nori

Seja S um esquema conexo. Existe uma bijeção entre recobrimentos étale Galois $X \to S$ com grupo de Galois G e G_S-torsores.

Teorema (Nori)

Seja S um esquema (próprio integral) sobre k e $s : \operatorname{Spec} k \to S$ um ponto k-racional. Existe um esquema em grupos $\pi_1^N(S, s)$ que classifica G-torsores, onde G é um grupo esquema finito sobre k qualquer.

O grupo fundamental de Nori

Seja S um esquema conexo. Existe uma bijeção entre recobrimentos étale Galois $X \to S$ com grupo de Galois G e G_S-torsores.

Teorema (Nori)

Seja S um esquema (próprio integral) sobre k e $s : \operatorname{Spec} k \to S$ um ponto k-racional. Existe um esquema em grupos $\pi_1^N(S, s)$ que classifica G-torsores, onde G é um grupo esquema finito sobre k qualquer.

Se k é algebricamente fechado de característica 0, $\pi_1^N(S, s)(k) \cong \pi_1(S, \bar{s})$.

O grupo fundamental do SGA III

Teorema

Seja S um esquema conexo e $\bar{s}$ um ponto geométrico. Existe um grupo prodiscreto $\pi_1^{\mathrm{SGA3}}(S, \bar{s})$ tal que $\mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{SGA3}}(S, \bar{s}), G)$ classifica G-torsores trivializados por $\bar{s}$.

Seja S um esquema conexo. Um *recobrimento geométrico* de S é um morfismo étale $X \to S$ que satisfaz o critério valorativo de propriedade.

O grupo fundamental pró-étale

Seja S um esquema conexo. Um *recobrimento geométrico* de S é um morfismo étale $X \to S$ que satisfaz o critério valorativo de propriedade.

Teorema (Bhatt-Scholze)

Seja $\bar{s}$ um ponto geométrico de S. Existe um grupo topológico $\pi_1^{\text{proét}}(S, \bar{s})$ que classifica recobrimentos geométricos de S.

O grupo fundamental pró-étale

Seja S um esquema conexo. Um *recobrimento geométrico* de S é um morfismo étale $X \to S$ que satisfaz o critério valorativo de propriedade.

Teorema (Bhatt-Scholze)

Seja $\bar{s}$ um ponto geométrico de S. Existe um grupo topológico $\pi_1^{\text{proét}}(S, \bar{s})$ que classifica recobrimentos geométricos de S.

O completamento prófinito de $\pi_1^{\text{proét}}(S, \bar{s})$ é $\pi_1(S, \bar{s})$ e o completamento pródiscreto é $\pi_1^{\text{SGA3}}(S, \bar{s})$.

Perguntas?