Hilberts einundzwanzigstes Problem

and all that jazz

Gabriel Ribeiro

École Polytechnique

Sumário

Monodromia em toda a sua beleza

O espaço étalé

Seja S um espaço topológico. O funtor definido por

$$\begin{array}{ccc}\left\{\begin{array}{c}\text{Espaços topológicos}\\ \text{sobre } S\end{array}\right\} & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{Préfeixes}\\ \text{sobre S}\end{array}\right\} \\ (p : X \to S) & \longmapsto & \text{seções de } p\end{array}$$

é uma equivalência de categorias.

Outras equivalências de categorias

Esse funtor se restringe à novas equivalências de categorias:

- $$\left\{ \begin{array}{c} \text{Espaços topológicos} \\ \text{étales sobre } S \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{Feixes} \\ \text{sobre } S \end{array} \right\}$$

Outras equivalências de categorias

Esse funtor se restringe à novas equivalências de categorias:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{Espaços topológicos} \\ \text{étales sobre } S\end{array}\right\} \cong \left\{\begin{array}{c}\text{Feixes} \\ \text{sobre S}\end{array}\right\}$
- $\left\{\begin{array}{c}\text{Recobrimentos} \\ \text{de S}\end{array}\right\} \cong \left\{\begin{array}{c}\text{Feixes localmente} \\ \text{constantes sobre S}\end{array}\right\}.$

A ação de monodromia

Mas, se S é ”bonitinho” e s é um ponto qualquer de S, a ação de monodromia define um funtor

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Recobrimentos} \\ \text{de } S \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \pi_1(S,s)\text{-} \\ \text{conjuntos} \end{array} \right\} \\ (p : X \to S) & \longmapsto & p^{-1}(s), \end{array}$$

que é uma equivalência de categorias.

A ação de monodromia

Juntando os dois resultados, nós obtemos a seguinte equivalência de categorias

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Sistemas locais} \\ \text{sobre } S \end{array} \right\} & \longrightarrow & \mathsf{Rep}_k(\pi_1(S, s)) \\ \mathcal{L} & \longmapsto & \mathcal{L}_s, \end{array}$$

onde os sistemas locais e as representações são sempre de dimensão finita sobre k.

Seja X uma variedade diferenciável / complexa ou esquema.

Definição - Conexão

Seja $\mathcal{E}$ um feixe localmente livre (fibrado vetorial) sobre X. Uma *conexão* em $\mathcal{E}$ é um morfismo (k-linear) de feixes

$$\nabla : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$$

satisfazendo $\nabla(fs) = s \otimes \mathrm{d}f + f\nabla(s)$, onde f é uma seção local de $\mathcal{O}_X$ e s é uma seção local de $\mathcal{E}$.

Um outro ponto de vista

Nós também podemos ver uma conexão como um morfismo (derivada covariante) $\mathrm{T}X = \underline{\mathrm{Der}}_k(\mathcal{O}_X) = (\Omega^1_X)^\vee \to \underline{\mathrm{End}}_k(\mathcal{E})$ $(D \mapsto \nabla_D)$, onde ∇_D é dado por

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}_D} \mathcal{E}.$$

Um outro ponto de vista

Nós também podemos ver uma conexão como um morfismo (derivada covariante) $\mathrm{T}X = \underline{\mathrm{Der}}_k(\mathcal{O}_X) = (\Omega_X^1)^\vee \to \underline{\mathrm{End}}_k(\mathcal{E})$ ($D \mapsto \nabla_D$), onde ∇_D é dado por

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}_D} \mathcal{E}.$$

A linearidade se traduz em $\nabla_{fD}(s) = f\nabla_D(s)$ e a regra de Leibniz vira

$$\nabla_D(fs) = D(f)s + f\nabla_D(s).$$

Um exemplo importante

Fibrados triviais

Seja U um domínio em $\mathbb{C}$. Nesse caso, todo fibrado vetorial é trivial. Em particular o fibrado tangente, gerado por $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$. Seja $\mathcal{E} = \mathcal{O}_U^{\oplus n}$.

Um exemplo importante

Fibrados triviais

Seja U um domínio em $\mathbb{C}$. Nesse caso, todo fibrado vetorial é trivial. Em particular o fibrado tangente, gerado por $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$. Seja $\mathcal{E} = \mathcal{O}_U^{\oplus n}$.

Nesse caso, uma conexão ∇ é determinada pela imagem de $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}z$. Considere $\widetilde{\nabla}$ a conexão "óbvia" dada por

$$\widetilde{\nabla}_D(s_1, \ldots, s_n) := \left(\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}z}, \ldots, \frac{\mathrm{d}s_n}{\mathrm{d}z}\right).$$

Um exemplo importante

Fibrados triviais

Seja U um domínio em $\mathbb{C}$. Nesse caso, todo fibrado vetorial é trivial. Em particular o fibrado tangente, gerado por $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$. Seja $\mathcal{E} = \mathcal{O}_U^{\oplus n}$.

Nesse caso, uma conexão ∇ é determinada pela imagem de $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}z$. Considere $\widetilde{\nabla}$ a conexão "óbvia" dada por

$$\widetilde{\nabla}_D(s_1, \ldots, s_n) := \left(\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}z}, \ldots, \frac{\mathrm{d}s_n}{\mathrm{d}z} \right).$$

Se ∇ é uma conexão qualquer, a regra de Leibniz implica que $(\nabla_D - \widetilde{\nabla}_D)(fs) = f \cdot (\nabla_D - \widetilde{\nabla}_D)(s)$. I.e., $\nabla_D - \widetilde{\nabla}_D$ é $\mathcal{O}_U$-linear.

Um exemplo importante

Fibrados triviais

Segue que existe uma matriz $n \times n$ A com coeficientes em $\mathcal{O}_U$, tal que

$$\nabla_D(s) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} + As.$$

Um exemplo importante

Fibrados triviais

Segue que existe uma matriz $n \times n$ A com coeficientes em $\mathcal{O}_U$, tal que

$$\nabla_D(s) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} + As.$$

Em particular, $\nabla_D(s) = 0$ se e somente se s satisfaz a equação diferencial $s' + As = 0$. Segue que o subfeixe $\ker \nabla \subset \mathcal{E}$ é um sistema local complexo.

Teorema - Baby Riemann-Hilbert

O funtor dado por

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Conexões} \\ \text{em } U \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Sistemais locais} \\ \text{complexos sobre } U \end{array} \right\} \\ (\mathcal{E}, \nabla) & \longmapsto & \ker \nabla \end{array}$$

é uma equivalência de categorias.

Monodromia de uma equação diferencial

A composição

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Conexões} \\ \text{em } U \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Rep}_k(\pi_1(U, s)) \\ (\mathcal{E}, \nabla) & \longmapsto & (\ker \nabla)_s \end{array}$$

é totalmente explícita.

A composição

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Conexões} \\ \text{em } U \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Rep}_k(\pi_1(U, s)) \\ (\mathcal{E}, \nabla) & \longmapsto & (\ker \nabla)_s \end{array}$$

é totalmente explícita. Considere, por exemplo, $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ∇ sendo a conexão em $\mathcal{O}_U$ definida por $A = -a/z$, onde $a \in U \setminus \mathbb{Z}$.

A composição

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Conexões} \\ \text{em } U \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_k(\pi_1(U, s))$$
$$(\mathcal{E}, \nabla) \longmapsto (\ker \nabla)_s$$

é totalmente explícita. Considere, por exemplo, $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ∇ sendo a conexão em $\mathcal{O}_U$ definida por $A = -a/z$, onde $a \in U \setminus \mathbb{Z}$.

Isso é, $\ker \nabla$ é o feixe de soluções da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{a}{z} f.$$

A composição

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Conexões} \\ \text{em } U \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Rep}_k(\pi_1(U, s))$$

$$(\mathcal{E}, \nabla) \longmapsto (\ker \nabla)_s$$

é totalmente explícita. Considere, por exemplo, $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ∇ sendo a conexão em $\mathcal{O}_U$ definida por $A = -a/z$, onde $a \in U \setminus \mathbb{Z}$.

Isso é, $\ker \nabla$ é o feixe de soluções da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{a}{z} f.$$

As soluções locais são da forma $f(z) = cz^a$.

Monodromia de uma equação diferencial

Dado um ponto $s \in U$, os elementos de $(\ker \nabla)_s$ são germes (em s) de soluções da nossa equação diferencial.

Monodromia de uma equação diferencial

Dado um ponto $s \in U$, os elementos de $(\ker \nabla)_s$ são germes (em s) de soluções da nossa equação diferencial. Seja então $\gamma \in \pi_1(U, s) = \mathbb{Z}$.

Por um teorema padrão de análise complexa, nós podemos fazer a continuação analítica de um tal germe ao longo de γ.

Monodromia de uma equação diferencial

Dado um ponto $s \in U$, os elementos de $(\ker \nabla)_s$ são germes (em s) de soluções da nossa equação diferencial. Seja então $\gamma \in \pi_1(U, s) = \mathbb{Z}$.

Por um teorema padrão de análise complexa, nós podemos fazer a continuação analítica de um tal germe ao longo de γ.

Explicitamente, a ação de $1 \in \pi_1(U, s)$ em $f(z) = cz^a$ é a multiplicação por $e^{2\pi i a}$.

Definição - Curvatura

A curvatura de uma conexão ∇ é a função $TX \times TX \to \underline{\mathrm{End}}_k(\mathcal{E})$ dada por

$$D_1 \times D_1 \mapsto [\nabla_{D_1}, \nabla_{D_2}] - \nabla_{[D_1, D_2]}.$$

Definição - Curvatura

A curvatura de uma conexão ∇ é a função $TX \times TX \to \underline{\mathrm{End}}_k(\mathcal{E})$ dada por

$$D_1 \times D_1 \mapsto [\nabla_{D_1}, \nabla_{D_2}] - \nabla_{[D_1, D_2]}.$$

Teorema - Adolescent Riemann-Hilbert

Seja X uma variedade complexa. O funtor dado por

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Conexões} \\ \text{planas em } X \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Sistemais locais} \\ \text{complexos sobre } X \end{array} \right\} \\ (\mathcal{E}, \nabla) & \longmapsto & \ker \nabla \end{array}$$

é uma equivalência de categorias.

E o caso de variedades algébricas?

Considere as duas conexões planas no feixe estrutural de $\mathbb{A}^1$ abaixo:

$$\nabla_1(f) := \mathrm{d}f$$
$$\nabla_2(f) := \mathrm{d}f - f\mathrm{d}z.$$

E o caso de variedades algébricas?

Considere as duas conexões planas no feixe estrutural de $\mathbb{A}^1$ abaixo:

$$\nabla_1(f) := \mathrm{d}f$$
$$\nabla_2(f) := \mathrm{d}f - f\mathrm{d}z.$$

Nós temos que ∇_1 e ∇_2 são equivalentes analíticamente (pelo teorema anterior) mas não são equivalentes algébricamente.

Deligne saves the day (once again)

Teorema - Adolescent Riemann-Hilbert

Seja X uma variedade algébrica complexa. O funtor dado por

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Conexões planas} \\ \text{regulares em } X \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Sistemais locais} \\ \text{complexos sobre } X^{\text{an}} \end{array} \right\} \\ (\mathcal{E}, \nabla) & \longmapsto & \ker \nabla^{\text{an}} \end{array}$$

é uma equivalência de categorias.

O que são D-módulos?

Fibrados são tão coisa de boomer

Doravante X é um esquema suave sobre $k = \mathbb{C}$.

Definição - D-módulos

Um D-módulo sobre X é um feixe M de $\mathcal{O}_X$-módulos dotado de uma conexão integrável.

Doravante X é um esquema suave sobre $k = \mathbb{C}$.

Definição - D-módulos

Um D-módulo sobre X é um feixe M de $\mathcal{O}_X$-módulos dotado de uma conexão integrável.

Proposição - « D-módulos = $\mathcal{D}_X$-módulos »

Seja $\mathcal{D}_X$ o subfeixe de k-álgebras de $\underline{\mathrm{End}}_k(\mathcal{O}_X)$ gerado por $\mathcal{O}_X$ e $\underline{\mathrm{Der}}_k(\mathcal{O}_X)$. Se M é um $\mathcal{O}_X$-módulo, dar uma estrutura de D-módulo à M é equivalente à dar uma ação de $\mathcal{D}_X$ extendendo a ação de $\mathcal{O}_X$.

$$D \cdot m = \nabla_D(m)$$

Álgebra não-comutativa, mas nem tanto

Dois exemplos simples de D-módulos: $\mathcal{O}_X$ é um D-módulo *à esquerda* e $\omega_X := \Omega_X^{\dim}$ é um D-módulo *à direita* via $\omega \cdot D := -(\mathrm{Lie}\, D)\omega$, onde

$$((\mathrm{Lie}\, D)\omega)(D_1, \ldots, D_n) := D(\omega(D_1, \ldots, D_n)) - \sum_{i=1}^{n} \omega(D_1, \ldots, [D, D_i], \ldots, D_n).$$

Álgebra não-comutativa, mas nem tanto

Dois exemplos simples de D-módulos: $\mathcal{O}_X$ é um D-módulo *à esquerda* e $\omega_X := \Omega_X^{\dim}$ é um D-módulo *à direita* via $\omega \cdot D := -(\operatorname{Lie} D)\omega$, onde

$$((\operatorname{Lie} D)\omega)(D_1, \dots, D_n) := D(\omega(D_1, \dots, D_n)) - \sum_{i=1}^{n} \omega(D_1, \dots, [D, D_i], \dots, D_n).$$

Proposição

Os funtores

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X\text{-}\mathbf{Mod} &\to \mathcal{D}_X^{\mathrm{op}}\text{-}\mathbf{Mod} \\ M &\mapsto \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} M \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_X^{\mathrm{op}}\text{-}\mathbf{Mod} &\to \mathcal{D}_X\text{-}\mathbf{Mod} \\ N &\mapsto \omega_X^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_X} N \end{aligned}$$

são quasi-inversos.

Eba! Mais contas!

Um D-módulo quasi-coerente sobre $\mathbb{A}^n$ é simplesmente $\widetilde{M}$, onde M é um $D := k[x_1, \ldots, x_n]\langle \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$-módulo.

Eba! Mais contas!

Um D-módulo quasi-coerente sobre $\mathbb{A}^n$ é simplesmente $\widetilde{M}$, onde M é um $D := k[x_1, \ldots, x_n]\langle \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$-módulo.

Seja $L \in D$ um operador diferencial e considere a equação $Lf = 0$, onde $f \in A := k[x_1, \ldots, x_n]$. Seja $M = D/DL$.

Eba! Mais contas!

Um D-módulo quasi-coerente sobre $\mathbb{A}^n$ é simplesmente $\widetilde{M}$, onde M é um $D := k[x_1, \ldots, x_n]\langle \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$-módulo.

Seja $L \in D$ um operador diferencial e considere a equação $Lf = 0$, onde $f \in A := k[x_1, \ldots, x_n]$. Seja $M = D/DL$. Nós temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_D(M, A) &= \operatorname{Hom}_D(D/DL, A) \\ &\cong \{\varphi \in \operatorname{Hom}_D(D, A) \mid \varphi(L) = 0\}.\end{aligned}$$

Esse último é isomorfo ao espaço de soluções $\{f \in A \mid Lf = 0\}$, dado que $\operatorname{Hom}_D(D, A) \cong A$ via $\varphi \mapsto \varphi(1)$ e

$$Lf = L\varphi(1) = \varphi(L) = 0.$$

Riemann-Hilbert

Teorema - Riemann-Hilbert

O funtor de *de Rham* $M^\bullet \mapsto \Omega^\bullet_{X^{an}} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{O}_{X^{an}}} (M^{an})^\bullet$ define uma equivalência de categorias

$$\mathsf{D}^b_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{D}^b_c(X^{an}).$$

Ni des faisceaux, ni pervers

Riemann-Hilbert 2

Teorema - Riemann-Hilbert

O funtor de *de Rham* define uma equivalência de categorias

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{D}_X\text{-módulos} \\ \text{regulares holonômicos} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Perv}(X^{\mathrm{an}}).$$

Perguntas?