Raconte moi Monge-Ampère complexe

Eleonora Di Nezza

L'équation de Monge-Ampère est une équation différentielle aux dérivées partielles non linéaire du second ordre. Elle doit son nom aux mathématiciens français Gaspard Monge et André-Marie Ampère, les premiers à l'avoir formulée, respectivement en 1784 et 1820 [1, 8]. L'équation de Monge-Ampère joue un rôle central dans plusieurs questions de géométrie riemannienne, conforme, complexe et CR. Par exemple, on la retrouve dans la construction de surfaces compactes strictement convexes à courbure gaussienne prescrite -le problème de Minkowski- et dans le problème de transport optimal de Monge-Kantorovitch. Dans ce texte nous allons nous s'intéresser à son application à un problème de géométrie kählérienne.

La *géométrie kählérienne* a été introduite dans les années 1930 par Kähler comme un moyen efficace pour rechercher des *métriques d'Einstein*, qui sont des solutions de la célèbre équation d'Einstein dans le vide en relativité générale. La question de base devient alors dans ce contexte kählerien la recherche des *métriques de Kähler-Einstein* sur une variété kählérienne compacte X (de dimension complexe n). Une variété kählérienne admet une *structure complexe* J (qui nous permet d'assurer l'existence de coordonnées holomorphes $z_1, \cdots z_n$) et une structure supplémentaire donnée par ω, qui est une 2-forme réelle définie positive (non dégénérée) et fermée (i.e. $d\omega = 0$). Les deux structures sont compatibles : on a que $\omega(\cdot, J\cdot) = -\omega(J\cdot, \cdot)$. De plus, $\omega(JY, Y) > 0$, pour tout champ vecteur Y dans l'espace tangent (réel) à X. On dit que ω est une *forme ou métrique kählérienne.* La donnée d'une structure kählérienne ω est équivalente à celle d'une métrique hermitienne h telle que $\omega = -\Im h$ et où $g = \Re h$ est une métrique riemannienne sur X pensée comme variété différentielle de dimension réelle $2n$. De plus, des calculs standards nous donnent que $\mathrm{vol}_g = \frac{\omega^n}{n!}$. Dans la dernière formule vol_g denote le volume par rapport à la métrique g et ω^n est la n-ième puissance extérieure de ω. On note que n-ième puissance extérieure de la 2-forme ω est une $2n$-forme, qui est bien une forme volume.

Les premiers exemples de variétés kähleriennes sont les surfaces de Riemann (de dimension complexe $n = 1$, et donc de dimension réelle 2) : en effet, une 2-forme sur un surface est toujours d-fermée pour des raisons de degré (il n'existe pas de forme de degré superieur à la dimensione de la variété !). De plus, le théorème d'uniformisation nous dit que, à biholomorphisme près, il y a que trois courbes complexes compactes : la sphère $\mathbb{S}^2 = \mathbb{CP}^1$, les tores $\mathbb{C}/\Lambda$ (où Λ est un réseau) et les surfaces hyperboliques (e.g. $S = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 \, : \, P(z_0, z_1, z_2) = 0\}$, où P est un polynôme homogène de dégré $d \geq 4$). Pour compléter le cadre il faut mentionner que si P a un degré $d = 1, 2$, alors S est (biholomorphe à) la sphère et si $d = 3$ elle est le tore. Le théorème d'uniformisation nous dit aussi que chaque surface hyperbolique S est biholomorphe à $\mathbb{H}/\Gamma$, pour un sous-groupe $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ agissant librement. Ici $\mathbb{H}$ denote le demi-plan de Poincaré, c'est à dire l'ensemble de tout nombre complexe ayant partie réelle positive. De façon équivalente le théorème d'uniformisation affirme que toute surface de Riemann a comme revêtement universel $\mathbb{CP}^1$ ($=\mathbb{S}^2$), $\mathbb{C}$ ou le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ (qui est biholomorphe à $\mathbb{H}$!).

En dimension superieure $n > 1$, on trouve, entre autres, $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{C}^n/\Lambda$ (qui est un tore de dimension complexe n) et

$$V = \{[z_0 : \cdots : z_{n+1}] \in \mathbb{CP}^{n+1} \ : \ P(z_0, \cdots, z_{n+1}) = 0\}$$

où P est un polynôme homogène de degré d. Les examples ci-dessus sont tous des variétés *projectives* (cet à dire des sous-variétés lisses d'un espace projectif $\mathbb{CP}^N$, avec N suffisament grand). En revanche, il existe aussi beaucoup de variétés kähleriennes compactes qui ne sont pas projectives, comme par exemple les (très étudiées) surfaces $K3$.

Les exemples que j'ai donnés sont très particuliers pour une autre raison : ces variétés admettent toutes une métrique *spéciale*. En dimension complexe 1, le mot "spéciale" signifie que la métrique g est de courbure de Gauss K_g constante : sur $\mathbb{S}^2$, la métrique de *Fubini-Study* g_{FS} (qui, en coordonnée $z = x + iy$, s'écrit sous la forme $g_{FS} = \frac{dx^2+dy^2}{(1+|z|^2)^2}$) est de courbure constante $K_{g_{FS}} \equiv 1$; sur $\mathbb{C}/\Lambda$, la métrique plate $g_0 = dx^2 + dy^2$ est de courbure constante $K_{g_0} \equiv 0$; enfin sur $\mathbb{H}/\Gamma$, la métrique hyperbolique $g_{hyp} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ est de courbure constante $K_{g_{hyp}} \equiv -1$.

En dimension plus grande $n > 1$, le fait d'être à courbure de Gauss constante est remplacé par la notion de métrique de Kähler-Einstein. En effet, comme pour les surfaces de Riemann, l'existence des ces métriques nous donne un résultat d'uniformisation : si X est une variété kählerienne compacte qui admet une métrique de Kähler-Einstein ω, alors son revêtement universel est $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou la boule unité $\mathbb{B}^n$ si et seulement si une condition topologique est satisfaite, plus précisement

$$\left(\frac{2(n+1)}{n} c_2(X) - c_1(X)^2\right) \cdot \{\omega\}^{n-2} = 0,$$

où $c_i(X)$ est une classe de cohomologie et un invariant topologique de X, appellée i-ième *classe de Chern* et $\{\omega\}$ est la classe de cohomologie de ω.

On dit qu'une forme ω est Kähler-Einstein (KE) si elle est kählérienne et elle vérifie l'équation d'Einstein, c'est à dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega. \tag{KE}$$

Le membre de gauche de l'equation (KE), appelé la *forme de courbure de Ricci* de ω, est une 2-forme différentielle. La courbure de Ricci d'une métrique g est une quantité bien définie pour toute variété riemanienne et de façon très informelle (et pour donner une idée) on peut dire qu'elle mesure l'écart entre le volume des boules par rapport à la métrique g et la métrique plate. Comme le lecteur l'aura compris, dans le cas des surfaces de Riemann la courbure de Ricci n'est rien d'autre que la courbure de Gauss fois la forme volume.

De plus, si la varieté a aussi une structure de variété kählérienne, la forme de courbure de Ricci a une expression très explicite et facile : localement elle s'écrit comme

$$\mathrm{Ric}(\omega) = -\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\log\omega^n = -\frac{i}{\pi}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \overline{z_\beta}}\log\det(h_{p,q})\, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta. \tag{1}$$

Observons que le terme ω^n correspond au déterminant de la matrice hermitienne complexe $(h_{p,q})_{p,q}$ associée à h. (On rappelle que "$h = g + i\omega$"). Dans (1) on voit les deux opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ intervenir. En coordonnées holomorphes $z_1, \cdots z_n$, ces opérateurs associent à une fonction à variables complexes f une 1-forme holomorphe et antiholomorphe respectivement qui s'ecrivent sous la forme $\partial f = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\alpha} dz_\alpha$, $\bar{\partial} f = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\beta} d\bar{z}_\beta$. On peut vérifier "à la main" que $\mathbb{CP}^n$ et les tores $\mathbb{C}^n/\Lambda$ admettent une métrique KE, avec $\lambda > 0$ et $\lambda = 0$ respectivement.

Revenant sur l'équation (KE), on se pose alors la question de l'existence des solutions : étant donnée une variété kählérienne quelconque, peut-on toujours trouver une métrique KE ? Il existe de nombreuses obstructions, tout d'abord topologiques. L'équation (KE) implique en effet que la première classe de Chern $c_1(X)$ a un signe défini, qui correspond au signe de λ. Cela veut dire qu'il existe une forme différentielle dans la classe de cohomologie $c_1(X)$ qui est strictement positive, nulle ou strictement négative. On a alors trois cas : $c_1 > 0$ (dans ce cas, $\lambda > 0$ et la variété est dite de *Fano*), $c_1 = 0$ (dans ce cas, $\lambda = 0$ et la variété est dite de *Calabi-Yau*), $c_1 < 0$ (dans ce cas, $\lambda < 0$ et la variété est dite de *type général*). Les exemples ci-dessus vérifient une de ces trois conditions : on a $c_1(\mathbb{CP}^n) > 0$, $c_1(\mathbb{C}^n/\Lambda) = 0$, $c_1(V) > 0$ si $d < n+2$, $c_1(V) = 0$ si $d = n+2$ et $c_1(V) < 0$ si $d \geq n+3$.

Cependant, demander à la première classe de Chern d'avoir un signe défini est une obstruction forte à l'existence des métriques KE : il n'est pas toujours vrai qu'une classe de cohomologie admette (un représentant avec) un signe défini. Par exemple, si $X = S_1 \times S_2$ est le produit de deux surfaces de Riemann, alors c_1 a signe défini si et seulement si S_1 et S_2 sont du même type (deux sphères, deux tores ou deux surfaces hyperboliques).

Ceci dit, même si l'on se restreint à l'un des trois cas, comment attaquer concrètement le problème ? Étant donné une variété kählerienne compacte (X, ω) avec $c_1 > 0, < 0$ ou nulle, il est très peu probable que ω satisfasse l'équation (KE). Il faut alors "adjuster" la métrique dans l'espoir qu'elle dévienne KE. On cherche alors une fonction $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ telle que $\omega_\varphi = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ est KE. Observons que, grâce à un résultat classique appelé $\partial\bar{\partial}$-lemma, toute métrique de Kähler dans la classe de cohomologie $\{\omega\}$ s'écrit de la forme $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ où $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ est strictement ω-plurisousarmonique. Cela correspond à demander que dans chaque système local de coordonnées $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$, si on écrit $\omega = i\partial\bar{\partial}\rho$ dans $\mathbb{B}$, la matrice hessienne complexe $\left(\frac{\partial^2(\rho+\varphi)}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right)_{\alpha,\beta}$ est définie positive. De façon équivalente on demande que toutes les valeurs propres de la matrice soient strictement positives.

Il s'avère que ω_φ est KE si et seulement si φ satisfait une équation *scalaire* aux dérivées partielles non-linéaire, l'équation de *Monge-Ampère complexe* :

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{-\lambda\varphi} f \omega^n \tag{MA$_\lambda$}$$

où f est une fonction strictement positive lisse donnée qui vérifie une condition de normalisation, i.e. $\int_X e^{-\lambda\varphi} f\omega^n = \int_X \omega^n$. Cette dernière est nécessaire : en effet, si on l'intègre on trouve que

$$\int_X e^{-\lambda\varphi} f\omega^n = \int_X (\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n = \int_X \omega^n,$$

où la dernière identité est une conséquence du thèorème de Stokes (car X est compacte sans bord). En coordonnées, on peut relire l'equation (MA$_\lambda$) comme

$$\det\left(\frac{\partial^2(\rho+\varphi)}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right) = e^{-\lambda\varphi} f \det\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right).$$

Pour fixer les idées observons qu'en dimension $n = 1$, l'opérateur de Monge-Ampère n'est rien d'autre que l'opérateur laplacien et que l'équation (MA$_\lambda$) a une forme très simple et et très classique :

$$\Delta_\omega \varphi = e^{-\lambda\varphi} f. \tag{2}$$

La résolution de l'équation (2) est le point clé de l'une des possibles preuves du *théorème d'uniformisation.* Ceci est largement traité de façon très détaillée et passionante dans [4].

L'existence d'une solution lisse de (MA_λ) a été prouvée par Aubin [2] et Yau [9] dans le cas $\lambda < 0$ et par Yau [9] dans le cas $\lambda = 0$; plus précisément, le théorème de Yau (qui lui a valu la médaille Fields en 1982) garantit (entre autres) que, étant données une variété kählérienne X avec $c_1(X) = 0$ et une classe de cohomologie $\{\omega\}$ sur X, il existe toujours une métrique $\omega_{KE} \in \{\omega\}$ telle que $\mathrm{Ric}(\omega_{KE}) = 0$. Notons que le résultat de Yau a changé le paysage : avant sa preuve de (ce que était connue comme) la *conjecture de Calabi* on ne connaissait pas d'exemples non triviaux d'espaces Ricci-plats.

Dans le cas de courbure positive ($\lambda > 0$), c'est-à-dire quand X est une variété de Fano, la situation est beaucoup plus compliquée : l'existence des métriques Kähler-Einstein n'est pas garantie en général. Ce problème est aujourd'hui un domaine de recherche très actif et productif. Récemment, Chen, Donaldson et Sun, et Tian [5], ont indépendamment prouvé ce qu'on appelle la *conjecture de Yau-Tian-Donaldson* pour les métriques Kähler-Einstein : une variété de Fano X admet une métrique Kähler-Einstein si et seulement si elle est K-stable (une condition de nature algébrique).

La preuve de Yau de la conjecture de Calabi s'appuie sur la *méthode de continuité*, un outil classique pour résoudre des EDP non linéaires (élaboré parallèlement par Klein et Poincaré !) : il consiste à déformer l'équation considérée en une version plus simple pour laquelle nous savons qu'il existe une solution. Par exemple, dans le cas $\lambda = 0$, la famille d'équations de Monge-Ampère

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n = e^{t \log f}\omega^n \tag{MA_t}$$

est une déformation de l'équation $(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n = f\omega^n$, correspondant à $\mathrm{MA}_{t=1}$. On observe que $\varphi_0 \equiv 0$ est une solution de $\mathrm{MA}_{t=0}$. On définit alors

$$E := \{t \in [0,1] \ : \ \exists \varphi_t \in C^\infty \text{ solution de } \mathrm{MA_t}\},$$

l'objectif étant de démontrer que E est à la fois ouvert et fermé dans $[0,1]$. Comme E n'est pas l'ensemble vide puisque $0 \in E$, on en déduit que $E = [0,1]$. En particulier on déduit l'existence d'une solution lisse de $\mathrm{MA}_{t=1}$. L'ouverture est une conséquence (plus ou moins immédiate) du théorème des fonctions implicites. D'autre part, la fermeture dépend de différentes estimées *a priori* pour une suite φ_{t_i} où $t_i \in E$. Le principe est le suivant : on commence par montrer des estimées C^0 et C^2 qui, grâce à la théorie d'Evans-Krylov, nous donnent une estimation de type $C^{2,\alpha}$. Cela est le point de départ d'un argument d'amorçage basé sur le théorème de Schauder garantissant la convergence de suite φ_{t_i} vers une fonction lisse φ_{t_∞} qui résout MA_{t_∞}.

Comme souvent, l'étape la plus difficile est l'estimée C^0, établie par Yau en utilisant un processus itératif à la Moser. Après le célèbre papier de Yau, Kołodziej [7] a généralisé l'estimée C^0 en utilisant des outils de la *théorie du pluripotentiel.* Son estimation uniforme peut effectivement être appliquée à des équations complexes de Monge-Ampère de la forme

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n = f dV$$

où f n'est pas supposée être lisse mais $f \in L^p(dV)$ pour un $p > 1$ et positive. L'idée de Kołodziej's est de montrer que la *capacité de Monge-Ampère* des ensembles de sous-niveaux $\{\varphi < -\tau\}$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, s'annule pour $\tau > \tau_\infty$ pour un $\tau_\infty > 0$ suffisamment grand. Cela nous dit "presque" que l'ensemble $\{\varphi < -\tau_\infty\}$ est de mesure nulle. Il démontre alors qu'en fait, φ est minorée. Cela nous donne l'estimée C^0 car toute fonction ω-plurisousharmonique sur une variété compacte est majorée (c'est le principe du maximum !). Il est important de souligner que dans ce cas, la mesure de Monge-Ampère $(\omega + dd^c\varphi)^n$ est bien définie grâce à théorie de Bedford and Taylor [3] qui garantit que l'opérateur de Monge-Ampère est bien défini pour toute fonction ω-plurisousharmonique bornée.

La théorie du pluripotentiel, qui utilise les techniques d'analyse complexe de plusieurs variables, est alors devenue très utile pour résoudre des problèmes géométriques. À partir de là, les propriétés de régularité des solutions des équations de Monge-Ampère complexes sont devenues d'une importance cruciale et de nombreaux travaux se sont portés sur ces questions. Dans une série de papiers, Berman, Boucksom, Eyssidieux, Guedj et Zeriahi ont développé des nouveaux outils permettant d'étudier ces problèmes lorsque les équations correspondantes deviennent dégénérées en présence de singularités [6], où le mot *dégénéré* signifie que la forme de référence n'est plus Kähler (plus précisement, la forme a le droit de s'annuler quelque part), et/ou les densités ont des singularités. En particulier, ils démontrent l'existence des métriques de Kähler-Einstein singulières sur des variétés Calabi-Yau singulières. Néanmoins, le comportement asymptotique d'une telle métrique au voisinage des points singuliers n'a pas été entièrement compris...

Remerciements. Je tiens à remercier Gilles Courtois, Damien Gayet et Fanny Kassel pour tous les conseils sur une version préliminaire de cette note.

References

[1] A. M. Ampère. Mémoire contenant l'application de la théorie. *Journal de l'École Polytechnique*, 1820.

[2] Thierry Aubin. Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. *Bull. Sci. Math. (2)*, 102(1):63–95, 1978.

[3] Eric Bedford and B. A. Taylor. A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math.*, 149(1-2):1–40, 1982.

[4] Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann.* ENS Édition, (2010).

[5] J. Fine. Canonical metrics in Kähler geometry—a biased overview. *Gaz. Math.*, (155):38–51, 2018.

[6] Vincent Guedj and Ahmed Zeriahi. *Degenerate complex Monge-Ampère equations*, volume 26 of *EMS Tracts in Mathematics.* European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2017.

[7] Sławomir Kołodziej. The complex Monge-Ampère equation. *Acta Math.*, 180(1):69–117, 1998.

[8] G. Monge. Sur le calcul intégral des équations aux differences partielles. *M émoires de l'Académie des Sciences*, 1784.

[9] Shing Tung Yau. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(3):339–411, 1978.