USTC - Feuille de TD 7

Modules de type fini sur un anneau principal

Exercice 1 Trouver les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$-module :

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

Exercice 2

1) Soient $n \geqslant 1$ un entier et u_1, ..., u_n des éléments de $\mathbb{Z}^n$ linéairement indépendants dans l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^n$. Soit M le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par $u_1, ..., u_n$. Montrer que l'indice de M dans $\mathbb{Z}^n$ est égal à la valeur absolue du déterminant des vecteurs $u_1, ..., u_n$ dans la base canonique.
2) Soit M sous-groupe de $\mathbb{Z}^3$ engendré par $u_1 = (2, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$. Calculer $\mathbb{Z}^3/M$.
3) Plus généralement, soit $(u_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ la matrice telle que $u_{i,j} = 2$ si $i = j$ et $u_{i,j} = 1$ sinon, et notons u_1, ..., u_n les vecteurs colonne de cette matrice. Soit M le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par $u_1, ..., u_n$. Calculer $\mathbb{Z}^n/M$.

Exercice 3

1) Donner une base adaptée pour le sous-$\mathbb{Z}$-module M de $\mathbb{Z}^4$ engendré par $(2, -1, 0, 0)$, $(-1, 2, -1, -1)$, $(0, -1, 2, 0)$ et $(0, -1, 0, 2)$. Calculer le quotient $\mathbb{Z}^4/M$.
2) Même question pour le sous-$\mathbb{Z}$-module M de $\mathbb{Z}^3$ engendré par $(4, 8, 16)$, $(1, 5, 10)$, $(6, 2, 4)$ et $(5, 8, 6)$.
3) Même question pour le sous-module de $\mathbb{Z}^3$ défini par $5x + 7y + 35z = 0$.
4) Même question pour le sous-module de $\mathbb{Z}^3$ défini par $x + 2y + 3z \equiv 0 \mod 4$.
5) Exhiber deux sous-$\mathbb{Z}$-modules M et N de $\mathbb{Z}^2$ de rang 2 tels qu'il n'existe pas une base (e_1, e_2) de $\mathbb{Z}^2$ pour laquelle on peut trouver des entiers a, b, c, d tels que (ae_1, be_2) est une base de M et (ce_1, de_2) est une base de N.

Exercice 4 Donner la liste des groupes abéliens d'ordre 400.

Exercice 5

1) Combien existe-t'il de $\mathbb{Z}[i]$-modules de cardinal 3 à isomorphisme près ? de cardinal 5 ? de cardinal 9 ?
2) *(plus difficile)* Combien existe-t'il de $\mathbb{Z}[i]$-modules de cardinal $5^3 \cdot 6^4$ à isomorphisme près ?

Exercice 6 Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4. Montrer qu'il est possible de munir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'une structure de $\mathbb{Z}[i]$-module. En déduire qu'il existe deux entiers a et b tels que $p = a^2 + b^2$.

Exercice 7 Soit A un anneau commutatif intègre et noethérien. Montrer que A est principal si, et seulement si, tout module de type fini sans torsion sur A est libre.

Exercice 8

1) Soit A un anneau principal et soient M, P et Q des A-modules de type fini. On suppose que les A-modules $M \oplus P$ et $M \oplus Q$ sont isomorphes. Montrer que les A-modules P et Q sont isomorphes (on dit que M est *simplifiable*).
2) Soit A un anneau et soient P et Q des A-modules non isomorphes. Soit M le A-module $(P \oplus Q)^{(\mathbb{N})}$. Montrer que les A-modules $M \oplus P$ et $M \oplus Q$ sont isomorphes (M n'est donc pas simplifiable).

Exercice 9 Soit A un anneau principal. Soit $a \in A \setminus \{0\}$. Montrer que $A/(a)$ est un $A/(a)$-module injectif, c'est-à-dire que toute suite exacte :

$$0 \to A/(a) \to M \to N \to 0$$

est scindée.

Exercice 10 Soit A un anneau euclidien. Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$.

1) Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{M}_m(A)$ et $Q \in \mathcal{M}_n(A)$ produits de matrices élémentaires telles que PMQ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & d_r & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

où $d_1, ..., d_r$ sont des éléments de A tels que $d_1|d_2|d_3|...|d_r$.

2) Montrer que, si $M \in GL_n(A)$, alors il existe $P \in \mathcal{M}_n(A)$ produit de matrices élémentaires telle que :

$$PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \det(M) \end{pmatrix}.$$

En déduire que le sous-groupe de $GL_n(A)$ engendré par les matrices élémentaires est $SL_n(A)$.

Exercice 11 Soit p un nombre premier. On note V_0 le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Soit $\mathcal{V}_1$ l'ensemble des sous-$\mathbb{Z}$-modules d'indice p dans V_0.

1) Montrer que $\mathcal{V}_1$ a exactement $p + 1$ éléments.

Soient V_1 un élément de $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ l'ensemble de ses sous-modules d'indice p.

2) Montrer que $\mathcal{V}_2$ a exactement $p+1$ éléments et qu'il contient un unique sous-module homothétique à V_0.

On munit l'ensemble (de sommets)

$$\mathcal{T}_p = \{\text{sous-}\mathbb{Z}\text{-modules de } \mathbb{Z}^2 \text{ d'indice une puissance de } p\}/(\text{homothétie})$$

de la structure de graphe suivante : une arête relie v à v' s'il existe des représentants V et V' de v et v' respectivement tels que V est un sous-module d'indice p de V'.

3) Montrer que l'on a une arête $v \to v'$ si et seulement si il existe une arête $v' \to v$.

Les questions suivantes établissent alors que la structure de graphe conférée à $\mathcal{T}_p$ est en fait un arbre non orienté. Soient v et v' deux sommets de $\mathcal{T}_p$.

4) Montrer qu'il existe des représentants $V_{(0)}$ et $V_{(n)}$ de v et v' respectivement ainsi que des $V_{(i)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ vérifiant $V_{(0)} \supseteq V_{(1)} \supseteq \cdots \supseteq V_{(n)}$ et tels que $V_{(i+1)}$ est d'indice p dans $V_{(i)}$ pour tout i.

Soient $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = v_0$ des sommets où chaque v_i est relié à v_{i+1} par une arête.

5) Montrer que l'on a $n = 0$ ou bien ($n \geqslant 2$ et il existe $1 \leqslant i \leqslant n-1$ avec $v_{i+1} = v_{i-1}$).

Exercice 12 Soient A et B deux groupes abéliens finis tels que $|A[n]| = |B[n]|$ pour tout $n > 0$. Montrer que A et B sont isomorphes.

Exercice 13 Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de V. Soit $P_1|\ldots|P_s$ la suite des invariants de similitude de u. Quels sont les polynômes caractéristiques et minimal de u ?

Exercice 14 Soient K un corps, $n \geqslant 1$ un entier et $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On note p la fonction partition, qui à un entier $i \geqslant 1$ associe le nombre de façons distinctes de représenter i comme somme d'entiers.

1) Exprimer, en fonction de la décomposition en facteurs irréductibles de P, le nombre de classes de similitude de matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ ayant P pour polynôme caractéristique.
2) Expliciter le résultat pour $P = X^2(X-1)^3(X+1)$.
3) Soit q une puissance d'un nombre premier et notons $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments. Calculer le nombre de classes de similitude dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ et dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Exercice 15 Soient K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme non constant. Soit Σ l'ensemble des entiers naturels n tels qu'il existe un K-espace vectoriel V de dimension n muni d'un endomorphisme linéaire u de polynôme minimal égal à P. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}^*$ tels que $\Sigma \cap [N, +\infty[= d\mathbb{N} \cap [N, +\infty[$. Que vaut d ?

Exercice 16 Soit K un corps. Pour chaque polynôme unitaire $P \in K[X]$, on note $C(P)$ la matrice compagnon associée. Si P et Q sont deux polynômes unitaires, déterminer les invariants de similitude de la matrice :

$$\begin{pmatrix} C(P) & 0 \\ 0 & C(Q) \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 Soient K un corps infini et V un K-espace vectoriel non nul de dimension finie. Pour u un endomorphisme de V, on note $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathrm{End}_K(V) \mid uv = vu\}$ et $\mathcal{P}(u) = \{P(u) \mid P \in K[X]\}$.

1) Soit $u \in \mathrm{End}_K(V)$. Montrer que $\mathcal{P}(u) = \bigcap_{v \in \mathcal{C}(u)} \mathcal{C}(v)$.

2) Soit $u \in \mathrm{End}_K(V)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   (i) u est cyclique ;

   (ii) le polynôme minimal de u est égal (au signe près) au polynôme caractéristique ;

   (iii) $\mathcal{C}(u) = \mathcal{P}(u)$;

   (iv) V n'a qu'un nombre fini de sous-espace stables par u.

Exercice 18 Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k algébriquement clos et f, g deux endomorphismes de V. Montrer que f et g ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $\phi \in \mathrm{End}_k(V)$ tel que $\phi \circ f = g \circ \phi$.