USTC - Feuille de TD 6

1 Modules plats et modules projectifs

Exercice 1 On considère l'anneau A des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Soit P le A-module formé des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x+2\pi) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En construisant un isomorphisme de A-modules $P \oplus P \cong A \oplus A$, montrer que P est projectif. Est-il libre ?
2) Soit N le A-module constitué des fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à décroissance rapide (c'est-à-dire telles que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} x^n f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n f(x) = 0$). Montrer qu'il existe un facteur direct du A-module N isomorphe à P.

Exercice 2 On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ et on introduit l'idéal :

$$I = (2, 1 + i\sqrt{5}).$$

1) Montrer que I n'est pas un A-module libre.
2) Construire une section du morphisme de A-modules

$$\phi : A^2 \longrightarrow I, \qquad (z, z') \mapsto 2z + (1 + i\sqrt{5})z',$$

et en déduire que I est un A-module projectif.

Exercice 3 Soit A un anneau et soit $a \in A$. Montrer que l'idéal Aa est projectif si, et seulement si, l'annulateur $\mathrm{Ann}_A(a)$ est engendré par un élément e tel que $e^2 = e$.

Exercice 4 Soient A un anneau et M un A-module projectif. On suppose que A est facteur direct de M et qu'il existe $m < n$ tels que $M \oplus A^m \cong A^n$. Montrer que M^{m+1} est libre.

Exercice 5

1) Soient A un anneau commutatif et I un idéal. Montrer que si A/I est un A-module projectif, alors I est principal. La réciproque est-elle vraie ?
2) On suppose maintenant que $A = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que $I = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On pose $M = A/I$. Montrer que M n'est pas un A-module projectif, mais que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, le $A_\mathfrak{m}$-module $M_\mathfrak{m}$ est libre.

Exercice 6 Soit A un anneau.

1) Soit $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer que l'on a la suite exacte (de groupes abéliens) :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\cdot\circ v} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\cdot\circ u} \mathrm{Hom}_A(M', N).$$

2) Soit M un A-module. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout morphisme injectif de A-modules $u : N \to N'$ induit un morphisme surjectif $\cdot \circ u : \mathrm{Hom}_A(N', M) \to \mathrm{Hom}_A(N, M)$.

(ii) Pour tout idéal I de A, tout morphisme de A-modules $I \to M$ s'étend en un morphisme de A-modules $A \to M$.

(iii) Toute suite exacte $0 \to M \to N \to P \to 0$ de A-modules est scindée.

On dit alors que M est un A-module *injectif*.

3) Montrer que si A est un corps, alors tout A-module est injectif.

On se place maintenant dans le cas $A = \mathbb{Z}$.

4) Est-ce que $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module injectif ? Pour $n > 0$, est-ce que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module injectif ?

5) Montrer qu'un groupe abélien M est injectif si, et seulement si, il est divisible, c'est-à-dire que pour tout $m \in M$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m' \in M$ tel que $m = nm'$.

6) Quels sont les groupes abéliens de type fini injectifs ?

7) Montrer que le groupe abélien $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ possède un facteur direct isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Exercice 7 Soit A un anneau commutatif. Vérifier les propriétés suivantes :

1) Le produit tensoriel de deux A-modules plats est un A-module plat.

2) Si B est une A-algèbre commutative et M un A-module plat, alors $M \otimes_A B$ est un B-module plat.

3) Si B est une A-algèbre plate commutative et M un B-module plat, alors M est un A-module plat.

Exercice 8 Soit A un anneau commutatif.

1) Soit M un A-module. Montrer que M est plat si, et seulement si, pour tout idéal I de A, le morphisme $I \otimes_A M \to M$ induit par l'injection $I \to A$ est injectif.

2) a) Supposons A intègre. Montrer que si M est plat sur A alors M est sans torsion.

b) Supposons A principal. Soit M un A-module. Montrer que M est plat si, et seulement, M n'a pas de torsion.

c) Prenons $A = \mathbb{C}[X, Y]$ et considérons $\mathfrak{m} = (X, Y)$. Montrer que $\mathfrak{m}$ est un A-module sans torsion mais qu'il n'est pas plat.

d) Prenons $B = \mathbb{C}[T^2, T^3]$ et considérons $\mathfrak{n} = (T^2, T^3)$. Montrer que $\mathfrak{n}$ est un B-module sans torsion mais qu'il n'est pas plat.

Exercice 9 Soit A un anneau commutatif.

1) On dit que A est réduit s'il ne contient pas de nilpotents autres que 0. Montrer que A est réduit si, et seulement si, $A_\mathfrak{m}$ est réduit pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$.

2) On suppose A intègre. On note K son corps des fractions.

a) Montrer que $A = \cap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\ A} A_\mathfrak{m}$.

b) On dit que A est normal si tout élément de K qui est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A est en fait dans A. Montrer que A est normal si, et seulement si, $A_\mathfrak{m}$ est normal pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

3) Est-il vrai que A est intègre si, et seulement si, $A_\mathfrak{m}$ est intègre pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$?

2 Modules indécomposables et modules simples

Exercice 10 Soit p un nombre premier. Soit U_p le groupe des racines de l'unité d'ordre une puissance de p dans $\mathbb{C}$. Montrer que U_p est un $\mathbb{Z}$-module indécomposable.

Exercice 11 Le $\mathbb{C}[X,Y]$-module $\mathbb{C}[X,Y]/(XY)$ est-il indécomposable ?

Exercice 12 Soient k un corps algébriquement clos et A une k-algèbre.

1) Soit M un A-module simple, avec $\dim_k(M) < \infty$. Montrer que :

$$\mathrm{End}_A(M) = \{\lambda \mathrm{Id}_M : \lambda \in k\}.$$

2) En déduire que si A est une k-algèbre à division de k-dimension finie, alors $A = k$.

Exercice 13 Soit $0 \to M' \to M \to M''' \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. Montrer que si M est semi-simple, il en est de même de M' et M''. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 14 Montrer que les conditions suivantes sur l'anneau A sont équivalentes :

a) tout A-module M est semi-simple,

b) le A-module régulier A est semi-simple.

On dit alors que A est un anneau semi-simple.

Exercice 15 Soit A un anneau à division. Montrer que le seul A-module simple est le module régulier A. En déduire que tout A-module est libre et semi-simple.

Exercice 16 Soit G un groupe fini et k un corps dont la caractéristique ne divise pas $|G|$. Montrer que tout $k[G]$-module est semi-simple. Ceci reste-il vrai sans l'hypothèse sur la caractéristique de k ?