# USTC - Feuille de TD 5

Diego Izquierdo

## 1 Modules de type fini

**Exercice 1** Soit $A$ un anneau commutatif intègre et soit $K$ son corps des fractions. Montrer que $K$ est un $A$-module de type fini si et seulement si $A = K$.

**Exercice 2** Soit $A$ un anneau.

1) Soit $M$ un $A$-module de type fini. Montrer que toute famille génératrice de $M$ contient une sous-famille génératrice finie.
2) Ici $A = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Alors $M = A$ est un $A$-module de type fini. Montrer que $N = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-$A$-module de $M$ qui n'est pas de type fini.
3) Soient $M$ un $A$-module et $N$ un sous-module. Montrer que si $N$ et $M/N$ sont de type fini, alors $M$ aussi.

**Exercice 3** Soient $R$ un anneau commutatif et $n$ un entier naturel non nul. Soit $f : R^n \to R^n$ un morphisme de $R$-modules. Soit $A$ la matrice de $f$ dans la base canonique de $R^n$.

1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $f$ est surjectif ;
   (ii) $f$ est un isomorphisme ;
   (iii) $\det(A) \in R^\times$.
2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $f$ est injectif ;
   (ii) $\det(A)$ n'est pas un diviseur de 0 dans $R$.

**Exercice 4** Soit $A$ un anneau commutatif. Soit $I$ un idéal de type fini de $A$ tel que $I^2 = I$. Montrer que $I$ est engendré par un élément $e$ de $A$ tel que $e^2 = e$.

**Exercice 5** Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux commutatifs. On suppose que $B$ est de type fini en tant que $A$-module. Montrer que, pour chaque $b \in B$, il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$ tel que $P(b) = 0$.

**Exercice 6** Soit $A$ un anneau commutatif. Soit $u : A^m \to A^n$ un morphisme injectif de $A$-modules. Montrer que $m \leqslant n$.

**Exercice 7** Soit $A$ un anneau commutatif local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Montrer que $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = 0$.

## 2 Modules noethériens

**Exercice 8** Soient $A$ un anneau, $M$ un $A$-module de type fini et $n \in \mathbb{N}$. Considérons un morphisme surjectif de $A$-modules $u : M \to A^n$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ est un $A$-module de type fini.

**Exercice 9** On considère le $\mathbb{Z}$-module $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

1) Montrer que tout élément de $M$ est de torsion.

Pour tout nombre premier $p$, posons $M_p = \{x \in M | \, \exists n \in \mathbb{N},\, p^n \cdot x = 0\}$.

2) Montrer que $M = \oplus_p M_p$, la somme portant sur les nombres premiers $p$.
3) Montrer que tout sous-module de $M_p$ est soit égal à $M_p$, soit égal à $p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.
4) Montrer que $M_p$ n'est pas noethérien, mais que toute suite décroissante de sous-modules de $M_p$ stationne (on dit que $M_p$ est artinien).

**Exercice 10** Soit $A$ un anneau. Soient $M$, $N$ et $P$ trois $A$-modules. Supposons qu'il existe un morphisme injectif de $A$-modules $i : M \to N$ et un morphisme surjectif de $A$-modules $p : N \to P$ tels que $p \circ i = 0$. Montrer que $N$ est noethérien si, et seulement si, $M$, $P$ et $\mathrm{Ker}(p)/\mathrm{Im}(i)$ sont noethériens.

**Exercice 11** Considérons $A$ un anneau et $M$ un $A$-module noethérien. Soit $u : M \to M$ un morphisme de $A$-modules. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^n) \cap \mathrm{Im}(u^n) = 0$. En déduire que, si $u$ est surjectif, alors $u$ est un isomorphisme. Ce résultat subsiste-t'il si $M$ n'est pas supposé noethérien ?

**Exercice 12** Soient $A$ un anneau commutatif et $M$ un $A$-module. Montrer que $M[X]$ est un $A[X]$-module noethérien si, et seulement si, $M$ est un $A$-module noethérien.

## 3 Produit tensoriel

**Exercice 13** Calculer les produits tensoriels suivants :

1) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
3) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
4) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en tant que groupe abélien ;
5) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ;
6) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ;
7) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-algèbre ;
8) $M \otimes_A A/I$ en tant que $A$-module, lorsque $A$ est un anneau commutatif, $I$ un idéal de $A$ et $M$ un $A$-module ;

9) $(A/I) \otimes_A (A/J)$ en tant que $A$-algèbre, lorsque $A$ est un anneau commutatif et $I$ et $J$ sont des idéaux de $A$ ;

10) $A[X_1, ..., X_n] \otimes_A A[X_1, ..., X_m]$ en tant que $A$-algèbre, lorsque $A$ est un anneau commutatif ;

11) $A[X_1, ..., X_n]/I \otimes_A B$ en tant que $B$-algèbre, lorsque $A$ est un anneau commutatif, $B$ une $A$-algèbre commutative et $I$ un idéal de $A[X_1, ..., X_n]$ ;

12) $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ en tant qu'anneau ;

13) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-algèbre ;

14) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-algèbre (on admettra ici que la famille $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ est $\mathbb{Q}$-libre) ;

15) $\mathbb{Q}[i] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[i]$ en tant que $\mathbb{Q}$-algèbre ;

**Exercice 14** Soient $A$ un anneau commutatif et $M$ un $A$-module. Soit $(N_i)_{i \in I}$ une famille de $A$-modules.

1) A-t'on forcément $M \otimes_A (\bigoplus_i N_i) \cong \bigoplus_i (M \otimes_A N_i)$ ?

2) A-t'on forcément $M \otimes_A (\prod_i N_i) \cong \prod_i (M \otimes_A N_i)$ ?

**Exercice 15** Soient $A$ et $B$ des anneaux commutatifs, soient $M$ un $A$-module, $P$ un $B$-module et $N$ un $(A, B)$-bimodule (c'est-à-dire que $N$ est simultanément un $A$-module et un $B$-module et que les actions de $A$ et $B$ sur $N$ commutent). Montrer que $M \otimes_A N$ est naturellement un $B$-module, que $N \otimes_B P$ est un $A$-module, et que

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \simeq M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

**Exercice 16** Soient $k$ un corps, $M$ et $N$ des $k$-espaces vectoriels et $M^*$, $N^*$ leur duaux respectifs. Etudier l'injectivité et la surjectivité des morphismes

$$M^* \otimes_k N \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M, N), \quad f \otimes n \mapsto (m \mapsto f(m)\, n).$$

$$M^* \otimes_k N^* \longrightarrow (M \otimes_k N)^*, \quad f \otimes g \mapsto (m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)).$$

$$\mathrm{End}_k(M) \otimes_k \mathrm{End}_k(N) \longrightarrow \mathrm{End}_k(M \otimes_k N), \quad f \otimes g \mapsto (m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)).$$

**Exercice 17** Soient $A = \mathbb{Z}[X]$ et $I = (2, X)$.

1) Montrer que $2 \otimes X - X \otimes 2$ est non nul dans $I \otimes_A I$.

2) Montrer que $2 \otimes X - X \otimes 2$ est simultanément de 2-torsion et de $X$-torsion dans $I \otimes_A I$.

3) Montrer que le sous-$A$-module de $I \otimes_A I$ engendré par $2 \otimes X - X \otimes 2$ est isomorphe à $A/I$.

# 4 Localisation

**Exercice 18** Reconnaître $S^{-1}A$ dans las cas suivants :

(i) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ;

(ii) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \{-1, 1\}$ ;

(iii) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \{10^k | k \geqslant 0\}$ ;

(iv) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(0, y) | y \neq 0\} \cup \{(1, 1)\}$.
(v) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(x, y) | x \neq 0\}$ ;
(vi) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(x, y) | x \neq 0, y \neq 0\}$ ;
(vii) $A = \mathbb{C}[X]/(X^5)$, $S = \{X^k | k \geqslant 0\}$ ;
(viii) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5 Y)$, $S = \{X^k | k \geqslant 0\}$ ;
(ix) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5 Y)$, $S = \{P \in A | P \notin (X)\}$ ;
(x) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5 Y)$, $S = \{P \in A | P \notin (Y)\}$ ;
(xi) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(XY)$, $S = \{(X + Y)^k | k \geqslant 0\}$.

**Exercice 19** Soient $A$ un anneau commutatif et $S$ une partie multiplicative de $A$.

1) Si $A$ est noethérien, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est noethérien.
2) Si $A$ est principal et que $S$ ne contient pas 0, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est principal.
3) Si $A$ est factoriel et que $S$ ne contient pas 0, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est factoriel.

**Exercice 20**

1) Soient $A$ un anneau principal et $K$ son corps des fractions. Soit $B$ un sous-anneau de $K$ contenant $A$. Montrer qu'il existe une partie multiplicative $S$ de $A$ telle que $B = S^{-1}A$.
2) Trouver un sous-anneau de $\mathbb{C}(X, Y)$ contenant $\mathbb{C}[X, Y]$ qui ne soit pas en tant que $\mathbb{C}[X, Y]$-algèbre un localisé de $\mathbb{C}[X, Y]$.

**Exercice 21** Soit $\mathcal{C}$ l'anneau des fonctions continues de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal des fonctions nulles en 1. Soit $S = \mathcal{C} \setminus \mathfrak{m}$. Montrer que $S^{-1}\mathcal{C}$ s'identifie à l'anneau local des germes de fonctions continues en 1.

**Exercice 22** Soient $A$ un anneau commutatif et $a, b \in A$ tels que $(a, b) = A$. Soit $M$ un $A$-module. Montrer qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to M \to M\left[\frac{1}{a}\right] \oplus M\left[\frac{1}{b}\right] \to M\left[\frac{1}{ab}\right].$$

Généraliser à une famille quelconque $(a_i)_{i \in I}$ de $A$.

**Exercice 23** Soit $A$ un anneau commutatif. On note $\mathrm{Max}(A)$ l'ensemble de ses idéaux maximaux et $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de $A$.

1) On dit que $A$ est réduit s'il ne contient pas de nilpotents autres que 0. Montrer que $A$ est réduit si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$. On dit que la propriété d'être réduit locale.
2) On suppose $A$ intègre. On note $K$ son corps des fractions.
   a) Montrer que $A = \cap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\ A} A_{\mathfrak{m}}$.
   b) On dit que $A$ est normal si tout élément de $K$ qui est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $A$ est en fait dans $A$. Montrer que $A$ est normal si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est normal pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.
3) Est-il vrai que $A$ est intègre si, et seulement si, $A_{\mathfrak{p}}$ est intègre pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ? On dit que la propriété d'être intègre est globale.