USTC - Feuille de TD 4

Diego Izquierdo

1 Modules

Exercice 1 Montrer que tout anneau A est isomorphe à un sous-anneau d'un anneau $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ pour un certain groupe abélien M.

Exercice 2 Soient m et n deux entiers strictement positifs.

1) Calculer $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})$ et $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
2) Calculer :

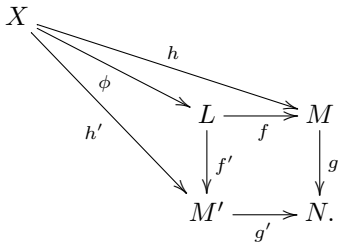
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Q}),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q}).$$

3) Calculer $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercice 3 Soient k un corps et M, N deux $k[X]$-modules correspondants respectivement aux endomorphismes u et v des k-espaces vectoriels M et N. Comment caractériser les éléments de $\mathrm{Hom}_{k[X]}(M,N)$? Ceux de $\mathrm{Aut}_{k[X]}(M)$?

Exercice 4 (Pull-back) Soient $g : M \to N$, $g' : M' \to N$ deux morphismes de A-modules. On veut construire un objet L (le pull-back de g, g'), muni de deux morphismes $f : L \to M$, $f' : L \to M'$, vérifiant la propriété universelle suivante :

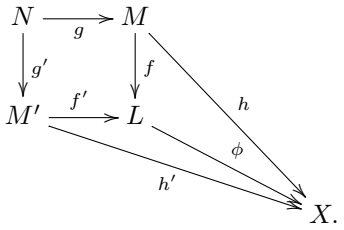
pour tout couple de morphisme $h : X \to M$, $h' : X \to M'$, tels que $g' \circ h' = g \circ h$, il existe un unique morphisme $\phi : X \to L$ rendant le diagramme suivant commutatif



1) Montrer l'existence et l'unicité d'un tel objet (deux tels objets sont isomorphes par un isomorphisme uniquement déterminé).
2) Montrer que f' induit un isomorphisme de $\mathrm{Ker}\, f$ sur $\mathrm{Ker}\, g'$ et que si g' est injectif, alors f aussi.

Exercice 5 (Push-out) Soient $g : N \to M$, $g' : N \to M'$ deux morphismes de A-modules. On veut construire un objet L (le push-out de g, g'), munit de deux morphismes $f : M \to L$, $f' : M' \to L$, vérifiant la propriété universelle suivante :

pour tout couple de morphisme $h : M \to X$, $h' : M' \to X$, tels que $h' \circ g' = h \circ g$, il existe un unique morphisme $\phi : L \to X$ rendant le diagramme suivant commutatif



1) Montrer l'existence et l'unicité d'un tel objet.
2) Montrer que f induit un isomorphisme de coker$g$ sur cokerf' et que si g est surjectif, alors f' aussi.

2 Suites exactes

Exercice 6 Montrer que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n\times} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

n'est pas scindée si $n \geqslant 2$.

Exercice 7 On munit $\mathbb{Z}^2$ de structures de $\mathbb{Z}[X]$-modules par

(a) $X \cdot (a, b) = (b, a)$

(b) $X \cdot (a, b) = (a + b, b)$.

Dans le cas (a), quelles sont les structures de $\mathbb{Z}[X]$-modules sur $\mathbb{Z}$ qui font de

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{a\mapsto(a,a)} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte ? Est-elle alors scindée ?

Mêmes questions dans le cas (b) avec

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{a\mapsto(a,0)} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Exercice 8 Soit A un anneau.

1) Soient $f : M \to N$ et $g : N \to P$ des morphismes de A-modules. Montrer qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g \circ f) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g \circ f) \to \mathrm{Coker}(g) \to 0.$$

Ici, le conoyau Coker(f) d'un morphisme de A-modules $f : M \to N$ est défini comme le quotient $N/\mathrm{Im}(f)$.

2) (Lemme des cinq) On considère un diagramme commutatif de A-modules à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5. \end{array}$$

On suppose que les morphismes f_1, f_2, f_4, f_5 sont des isomorphismes. Montrer que f_3 est un isomorphisme.

3) (Lemme du serpent) On considère un diagramme commutatif de morphismes de A-modules de la forme suivante, où les deux lignes forment des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' & & \end{array}$$

Montrer qu'il existe une suite exacte canonique

$$\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Ker}\, g \to \mathrm{Ker}\, h \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker} f \to \mathrm{Coker} g \to \mathrm{Coker} h.$$

Remarque : δ est appelé homomorphisme de liaison. Le lemme du serpent joue un grand rôle en algèbre homologique, il est la base des suites exactes longues de groupes d'homologie ou de cohomologie. On remarque que si de plus u est injectif alors le morphisme induit de $\mathrm{Ker}\, f$ *dans* $\mathrm{Ker}\, g$ *l'est aussi. Et si v' est surjectif, alors le morphisme induit $\bar{v}'$: Coker$(g) \to$ Coker(h) l'est aussi.*

Exercice 9 On considère le groupe abélien $M = \prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1) Calculer M_{tor}.
2) Soit $N = M/M_{tor}$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la multiplication par n sur N est surjective. On dit que N est divisible.
3) Existe-t'il un sous-groupe M' de M tel que $M \cong M' \oplus M_{tor}$?

3 Familles génératrices, familles libres, bases

Exercice 10 Soient A un anneau commutatif et I un idéal non nul de A. Montrer que I est un A-module libre si et seulement si I est un idéal principal engendré par un non diviseur de zéro.

Exercice 11 Soit A un anneau commutatif intègre et soit K son corps des fractions. Tout espace vectoriel sur K peut être aussi vu comme un A-module.

1) Soit V un K-espace vectoriel. Montrer qu'une famille libre $(v_i)_{i\in I}$ est libre dans le K-espace vectoriel V si et seulement si elle est libre dans le A-module V.
2) Montrer qu'une famille génératrice $(v_i)_{i\in I}$ dans le A-module V est génératrice dans K-espace vectoriel V. La réciproque est-elle vraie ?
3) Montrer que K est un A-module libre si et seulement si $A = K$.
4) Soit V et W deux K-espaces vectoriels. Montrer que tout morphisme de A-modules de V vers W est une application K-linéaire.

Exercice 12 Soit A un anneau.

1) Soient M un A-module et N un sous-module. Montrer que si N et M/N sont libres, alors M aussi.
2) Montrer que toute somme directe de A-modules libres est libre, ainsi que tout produit direct fini.
3) Ici $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Montrer que les A-modules $3A$ et $2A$ ne sont pas libres, mais que $3A \oplus 2A = A$ (et donc est libre).

Exercice 13 On considère le groupe abélien $M = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Le but de cet exercice est de montrer que M n'est pas abélien libre. On procède par l'absurde en supposant que M admet une base B. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note e_n l'élément de M dont tous les termes sont nuls, sauf le n-ème qui vaut 1. On écrit alors e_n comme combinaison linéaire d'une partie finie B_n de B, et on note N le sous-groupe de M engendré par les éléments de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

1) Soit $S = \{(\varepsilon_n n!)_{n\in\mathbb{N}} \mid \varepsilon_n \in \{-1, 1\}\}$. Montrer qu'il existe $s \in S$ tel que $s \notin N$.
2) Montrer que, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $y \in M/N$ tel que $\overline{s} = ky$.
3) En déduire une contradiction.

Exercice 14 Dans cet exercice, nous allons montrer que tout sous-groupe d'un groupe abélien libre est abélien libre. Considérons donc A un groupe abélien libre, et soit X une base de A. Soit A_0 un sous-groupe de A. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des triplets (Y, B, ϕ), où Y est une partie de X telle que $A_0 \cap A^{(Y)}$ est abélien libre, B est une base de $A_0 \cap A^{(Y)}$ et $\phi : B \to X$ une injection. Si (Y, B, ϕ) et (Y', B', ϕ') sont deux éléments de $\mathcal{E}$, on dira que $(Y, B, \phi) \preceq (Y', B', \phi')$ si $Y \subseteq Y'$, $B \subseteq B'$ et $\phi = \phi'|_B$. Cela définit une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$.

1) Montrer que $\mathcal{E}$ possède un élément maximal pour $\preceq$.
2) En déduire que A_0 est abélien libre.

Nous allons maintenant appliquer ce résultat pour montrer que le groupe $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas abélien libre par une méthode différente de celle de l'exercice 13. Pour chaque entier x, on note $v_2(x)$ la valuation 2-adique de x (avec la convention $v_2(0) = +\infty$).

3) Soit N le sous-groupe de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_2(x_n) = +\infty$. Montrer que $N/2N$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension dénombrable.
4) En déduire que $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas abélien libre.

Exercice 15 Soit M un A-module. On appelle *présentation par générateurs et relations* de M la donnée d'une famille génératrice $(x_i)_{i\in I}$ de A et d'une famille génératrice $(r_j)_{j\in J}$ du noyau du morphisme

$$A^{(I)} \longrightarrow M, \quad (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i \cdot x_i.$$

Pour $A = \mathbb{Z}[X]$, donner une présentation du A-module $I = (2, X) \subset A$.

Exercice 16 Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module engendré par un seul élément $x \in M$. Montrer que l'idéal annulateur $I = \mathrm{Ann}_A(x)$ est en fait indépendant du générateur x choisi.