# USTC - Feuille de TD 3

Diego Izquierdo

## 1 Anneaux noethériens

**Exercice 1** Soit $K$ un corps. Montrer que dans l'anneau noethérien $K[X,Y]$, le sous-anneau engendré par les $X^nY$, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, n'est pas noethérien.

**Exercice 2** Soit $A = \{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(0) \in \mathbb{Z}\}$.

1) Montrer que $A$ n'est pas factoriel.
2) Montrer que $A$ n'est pas noethérien.
3) Montrer que $A$ est de Bézout, c'est-à-dire que tout idéal de type fini de $A$ est principal.

**Exercice 3** Soit $k$ un corps. Montrer que l'anneau $k[X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots]$ des polynômes à coefficients dans $k$ à une infinité de variables est factoriel mais pas noethérien.

**Exercice 4** Soit $X$ un espace topologique métrisable. À quelle condition sur $X$ l'anneau des fonctions continues de $X$ dans $\mathbb{R}$ est-il noethérien ?

**Exercice 5** Soit $A$ un anneau commutatif noethérien. Montrer que $A[[X]]$ est noethérien.

**Exercice 6** On rappelle qu'un nombre complexe $x$ est un *entier algébrique* s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que l'on ait $P(x) = 0$. On note $\overline{\mathbb{Z}}$ l'anneau des entiers algébriques.

1) Rappeler pourquoi $\overline{\mathbb{Z}}$ est un anneau.
2) Montrer que $\overline{\mathbb{Z}}$ n'est pas factoriel.
3) Montrer que $\overline{\mathbb{Z}}$ n'est pas noethérien.
4) Comme dans l'exercice 2, on peut montrer que $\overline{\mathbb{Z}}$ est un anneau de Bézout, mais la preuve dépasse largement le cadre de ce cours.

**Exercice 7** Soit $A$ un anneau commutatif noethérien.

1) En raisonnant par l'absurde, montrer que, pour tout idéal $I$ de $A$, il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ vérifiant $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_{n_I} \subseteq I$.
2) Montrer que l'on peut exiger $I \subseteq \mathfrak{p}_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n_I$ dans la question précédente.
3) En déduire qu'il existe un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

**Exercice 8** Soient $A$ un anneau commutatif, $I$ un idéal de $A$ et $a$ un élément de $A$. Montrer que si $I + (a)$ et $\{x \in A \mid ax \in I\}$ sont des idéaux de type fini de $A$, alors $I$ est de type fini. En déduire que $A$ est noethérien si, et seulement si, tous ses idéaux premiers sont de type fini.

## 2 Anneaux de polynômes

**Exercice 9** Soit $A$ un anneau commutatif.

1) Montrer que $A[\mathbb{Z}]$ est isomorphe à $A[X,Y]/(XY-1)$.
2) Écrire la propriété universelle de $A[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$. Écrire $A[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ comme quotient de $A[X]$.

**Exercice 10**

1) Montrer que si $M$ est un groupe abélien et $P$ est un sous-groupe de $M$, alors tout caractère de $P$ à valeurs dans $\mathbb{C}^\times$ s'étend en un caractère de $M$.
2) Soit $\mathcal{N}$ un groupe abélien. À quelle condition sur $\mathcal{N}$ l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[\mathcal{N}]$ est-il intègre ? Et noethérien ?

**Exercice 11** Soit $A$ un anneau principal de corps des fractions $K$. Nous allons caractériser les idéaux premiers et maximaux de $A[X]$.

1) Soit $I$ un idéal premier non nul de $A[X]$.
   a) Montrer que $I \cap A$ est un idéal maximal de $A$.
   b) On suppose $I \cap A = 0$.
      i) Soit $J$ l'idéal de $K[X]$ engendré par $I$. Montrer que $I = J \cap A[X]$.
      ii) Montrer que $I$ est principal, engendré par un polynôme non constant, irréductible et primitif.
   c) On suppose que $I \cap A$ est non nul, et on pose $k = A/(I \cap A)$. Montrer que soit $I$ est engendré par $I \cap A$, soit $I$ est engendré par $I \cap A$ et par un polynôme $P \in A[X]$ dont l'image dans $k[X]$ est irréductible.
   d) Déduire de ce qui précède que les idéaux premiers de $A[X]$ sont : $(0)$ ; les idéaux principaux engendrés par un polynôme non constant, irréductible et primitif ; les idéaux engendrés par un idéal maximal de $A$ ; les idéaux engendrés par un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$ et un polynôme de $A[X]$ dont la réduction modulo $\mathfrak{m}$ est irréductible. Lesquels sont maximaux ?
2) Quels sont les idéaux premiers (resp. maximaux) de $\mathbb{C}[X,Y]$ ?
3) Quels sont les idéaux premiers (resp. maximaux) de $\mathbb{Z}[X]$ ?
4) Soit $\alpha$ un entier algébrique, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{C}$ racine d'un polynôme unitaire irréductible à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que tout idéal premier non nul de $\mathbb{Z}[\alpha]$ est maximal.

**Exercice 12** On considère le polynôme :

$$P(X) = X^5 - 11X^3 - 3X^2 + 34X - 21.$$

**1.** Trouver toutes les racines rationnelles de $P$.
**2.** Ecrire $P$ comme produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$.

**Exercice 13** On considère le polynôme :

$$P(X) = 5X^5 - 2X^4 + 10X^2 + 6X - 4.$$

**1.** Trouver toutes les racines rationnelles de $P$.

**2.** Ecrire $P$ comme produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

**Exercice 14** On considère les polynômes :

$$P(X) = 3X^3 + X^2 + X - 2, \quad Q(X) = 2X^3 + 3X + 3,$$
$$R(X) = X^5 + 78X^4 - 117X^2 + 234, \quad S(X) = X^5 - 4X^2 - 10X + 4.$$

Sont-ils irréductibles sur $\mathbb{Q}$ ?

**Exercice 15** Montrer que si $p$ est un nombre premier, le polynôme cyclotomique $\Phi_p(X) = X^{p-1} + \cdots + X + 1 = \frac{X^p - 1}{X - 1}$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (*Indication :* on pourra poser $X = Y + 1$).

# 3 Vrai ou faux de révision du chapitre 1

**Exercice 16** Soit $A$ un anneau commutatif. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Si $a$, $b$ et $u$ sont trois éléments $A$ tels que $(a) = (b)$ et $a = bu$, alors $u \in A^\times$.
2) Si $A$ est intègre, $I$ est un idéal principal et $A/I$ est un anneau principal, alors $A$ est principal.
3) Dans $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$, l'idéal (3) n'est pas premier, mais il est contenu dans exactement deux idéaux premiers, qui sont maximaux.
4) Tout idéal du quotient d'un anneau principal par un idéal est principal.
5) La somme de deux idéaux non principaux d'un anneau est soit un idéal non principal soit l'anneau tout entier.
6) L'idéal (89) est premier dans $\mathbb{Z}[i]$.
7) L'anneau des nombres décimaux est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(10X - 1)$.
8) Si $A$ est factoriel, alors tout idéal premier non nul est maximal.
9) Le quotient d'un anneau factoriel par un idéal premier est factoriel.
10) Si $A$ est un anneau factoriel et $a$ et $b$ sont des éléments non nuls de $A$, on a $(a, b) = (a \wedge b)$.
11) Si $A$ est un anneau factoriel et $a$ et $b$ sont des éléments non nuls de $A$, on a $(a) \cap (b) = (a \vee b)$.
12) L'anneau $\mathbb{Z}[(X_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ est factoriel.
13) Le polynôme $(X + Y)^{100} + 2(X + 5)^{98}Y + 57X^{87}Y^5 \in \mathbb{C}[X, Y]$ est irréductible.
14) Il existe un morphisme d'anneaux injectif de $\mathbb{Z}[X]/(2X^2 + 3X + 2)$ dans $\mathbb{C}$.
15) Si $A$ est intègre, tout élément irréductible engendre un idéal premier.
16) Si $A$ est factoriel et si $a$ et $b$ sont deux éléments de $A$ premiers entre eux, alors il existe un isomorphisme $A/(ab) \cong A/(a) \times A/(b)$.
17) Si $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ est tel que $P(X, 0)$ et $P(0, Y)$ sont irréductibles, alors $P$ est irréductible.
18) Tout sous-anneau d'un anneau noethérien est noethérien.
19) Tout anneau intègre noethérien est factoriel.
20) Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est noethérien.

21) Tout quotient d'un anneau noethérien est noethérien.

22) Tout anneau factoriel est noethérien.

23) Si $I$ est un idéal de type fini de $A$ et $A/I$ est noethérien, alors $A$ est noethérien.

24) Un produit fini d'anneaux noethériens est un anneau noethérien.

25) Si $A[X]$ est noethérien, alors $A$ est noethérien.