

# L'espace adélique d'un tore sur un corps de fonctions

David Harari et Diego Izquierdo

10 février 2018

**Résumé.** Soient  $k$  un corps de caractéristique 0 et  $K$  le corps des fonctions d'une  $k$ -courbe projective lisse géométriquement intègre  $X$ . Soit  $T$  un  $K$ -tore. Dans cet article, on cherche à étudier l'espace des points adéliques  $T(S, \mathbf{A}_K)$  de  $T$  hors d'un ensemble fini  $S$  de points fermés de  $X$ . On commence par montrer que le groupe  $T(K)$  des points rationnels de  $T$  est toujours fermé discret dans  $T(S, \mathbf{A}_K)$ . On décrit ensuite le quotient  $T(\emptyset, \mathbf{A}_K)/T(K)$  dans chacun des trois cas suivants :  $k$  corps algébriquement clos,  $k = \mathbb{C}((t))$  et  $k$  corps  $p$ -adique.

**Abstract.** Let  $k$  be a field of characteristic 0 and let  $K$  be the function field of a smooth projective geometrically integral  $k$ -curve  $X$ . Let  $T$  be a  $K$ -torus. In this article, we aim at studying the space of adelic points  $T(S, \mathbf{A}_K)$  of  $T$  outside a finite set  $S$  of closed points of  $X$ . We start by proving that the group  $T(K)$  of rational points of  $T$  is always discrete (hence closed) in  $T(S, \mathbf{A}_K)$ . We then describe the quotient  $T(\emptyset, \mathbf{A}_K)/T(K)$  in each of the following three cases :  $k$  is an algebraically closed field,  $k$  is the field of Laurent series  $\mathbb{C}((t))$ , and  $k$  is a  $p$ -adic field.

## 1. Introduction

Soit  $k$  un corps de caractéristique 0. On considère le corps des fonctions  $K$  d'une courbe projective et lisse  $X$  définie sur  $k$ , et les divers complétés  $K_v$  (d'anneau des entiers  $\mathcal{O}_v$ ) du corps  $K$  par rapport aux valuations induites par les points fermés de  $X$ . Soit maintenant  $G$  un  $K$ -groupe algébrique linéaire connexe pour lequel on choisit un modèle lisse  $\mathcal{G}$  au-dessus d'un ouvert de Zariski non vide  $U$  de  $X$ . L'espace adélique de  $G$ , noté  $G(\mathbf{A}_K)$ , est le produit restreint  $\prod'_{v \in X^{(1)}} G(K_v)$  sur l'ensemble  $X^{(1)}$  des points fermés de  $X$ , par rapport aux  $\mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$  (il est indépendant du modèle choisi). On peut aussi enlever un nombre fini  $S$  de points fermés et considérer  $G(S, \mathbf{A}_K) := \prod'_{v \in U^{(1)}} G(K_v)$  quand  $U = X - S$  est un ouvert de Zariski non vide de  $X$ .

Ces dernières années, plusieurs travaux se sont penchés sur des questions arithmétiques classiques liées aux groupes algébriques sur ces corps de fonctions, comme le principe local-global pour leurs espaces principaux homogènes ou encore l'approximation faible (c'est-à-dire la densité de l'ensemble des points rationnels  $G(K)$  dans  $\prod_{v \in X^{(1)}} G(K_v)$ , ce dernier groupe étant équipé de la topologie produit). Mentionnons par exemple [3], qui établit l'approximation faible pour  $k$  algébriquement clos, les travaux [9] et [8] qui traitent du cas où  $k$  est  $p$ -adique, l'article [7] qui concerne le cas  $k = \mathbb{C}((t))$ , et les diverses généralisations [11], [12] au cas où  $k$  est un corps local supérieur.

L'origine de ce travail est l'article [2] de J.-L. Colliot-Thélène, lequel s'intéresse quand  $k = \mathbb{C}$  à la question de l'approximation forte pour  $G$ , c'est-à-dire à la densité de  $G(K)$  dans un espace adélique  $G(S, \mathbf{A}_K)$ , ce dernier étant équipé de la topologie de produit restreint (et non plus comme pour l'approximation faible de celle induite par la topologie produit sur  $\prod_{v \in U^{(1)}} G(K_v)$ ). Les deux résultats principaux de [2] sont : d'une part, la

validité de l'approximation forte quand  $S \neq \emptyset$  et  $G$  est semi-simple ; d'autre part, des exemples où cette approximation forte ne vaut pas quand  $G$  est un tore. Notre but ici est de préciser cet énoncé sur les tores dans plusieurs directions.

Notre premier résultat (théorème 3.6) est le suivant : nous montrons que pour tout corps  $k$  de caractéristique zéro, tout ensemble fini  $S$  de points fermés de  $X$ , et tout  $K$ -tore  $T$ , l'image de  $T(K)$  dans  $T(S, \mathbf{A}_K)$  est un sous-groupe discret (donc fermé) de  $T(S, \mathbf{A}_K)$ . En particulier l'approximation forte ne vaut jamais pour un tore de dimension  $> 0$ .

Ainsi, dans notre situation, le défaut d'approximation forte est simplement le quotient  $A(S, T)$  de l'espace adélique  $T(S, \mathbf{A}_K)$  par  $T(K)$  ; quand  $T = \mathbf{G}_m$  et  $S = \emptyset$ , ce quotient  $C_K = (\prod'_{v \in X(1)} K_v^*)/K^*$  est juste le *groupe des classes d'idèles* de  $K$ , notion qui est classique pour un corps de nombres ou le corps des fonctions d'une courbe sur un corps fini. Par analogie avec la théorie du corps de classes global, on aimerait maintenant mieux comprendre la structure de  $T(S, \mathbf{A}_K)$  et notamment relier  $A(\emptyset, T)$  à une obstruction de réciprocité à l'approximation forte. Plus précisément, on cherche à construire une flèche fonctorielle  $r : A(\emptyset, T) \rightarrow P$  d'image dense, où  $P$  est un groupe abélien profini (dual d'un groupe discret de torsion défini via la cohomologie galoisienne du tore  $T$ ). Comme dans le cas du groupe des classes d'idèles d'un corps de nombres (où  $P$  est juste le groupe de Galois abélien de  $K$ ), on ne peut espérer que  $r$  soit injective mais seulement que son noyau soit un groupe abélien divisible (le groupe profini  $P$  n'ayant pas d'élément infiniment divisible non nul).

Pour tout groupe topologique abélien  $B$ , notons  $B^D$  son dual, c'est-à-dire le groupe  $\text{Hom}_c(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  des homomorphismes continus de  $B$  dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  (quand la topologie sur  $B$  n'est pas précisée, on convient que  $B$  est muni de la topologie discrète). Dans les trois situations considérées dans les articles antérieurs, nous obtenons alors les résultats suivants :

a) Pour  $k$  algébriquement clos (auquel cas  $K$  est de dimension cohomologique  $\text{cd}(K) = 1$ ), le groupe  $A(S, T)$  est divisible si  $S \neq \emptyset$  (on a donc en quelque sorte "approximation forte modulo divisible"). Ce résultat vaut encore si on remplace le tore  $T$  par un groupe algébrique linéaire connexe quelconque (théorème 4.7). De plus, le quotient  $\overline{A(\emptyset, T)}$  de  $A(\emptyset, T)$  par son sous-groupe divisible maximal est un groupe de type fini dont on peut calculer le rang (théorème 4.5). Nous établissons aussi une suite de Poitou-Tate pour  $T$  (c'est le cas " $d = -1$ " du théorème 3.20 de [11], qui avait été fait pour les modules finis mais pas pour les tores), et en déduisons une flèche  $r : A(\emptyset, T) \rightarrow H^0(K, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1))^D$  d'image dense et de noyau divisible (théorème 4.15), où  $\hat{T}$  est le module des caractères de  $T$ .

b) Pour  $k = \mathbb{C}((t))$  (auquel cas  $\text{cd}(K) = 2$ , comme pour un corps de fonctions sur un corps fini), on a encore (théorème 5.3) une application de réciprocité  $r : A(\emptyset, T) \rightarrow H^2(K, \hat{T})^D$  de noyau divisible, mais contrairement au cas où  $k$  est fini (auquel cas lorsque  $T = \mathbf{G}_m$ , l'image  $I = \text{Im } r$  est même dense), l'adhérence  $I_{\text{adh}}$  de  $I$  n'est pas d'indice fini dans  $H^2(K, \hat{T})^D$ . Plus précisément, le quotient  $H^2(K, \hat{T})^D/I_{\text{adh}}$  est isomorphe au dual d'un groupe de Tate-Shafarevich  $\text{III}^2(K, \hat{T})$ , qui est infini en général. Ce groupe est défini par la formule habituelle  $\text{III}^2(K, \hat{T}) := \ker[H^2(K, \hat{T}) \rightarrow \prod_{v \in X(1)} H^2(K_v, \hat{T})]$ .

c) Pour  $k$  corps  $p$ -adique (auquel cas  $\text{cd}(K) = 3$ ), on a un résultat analogue (corollaire 6.7) en remplaçant  $H^2(K, \hat{T})$  par  $H^2(K, T')$ , où  $T'$  est le tore dual de  $T$  ; mais ici, l'adhérence de  $\text{Im } r$  est à nouveau d'indice fini dans  $H^2(K, T')^D$ , le quotient étant le groupe fini  $\text{III}^1(K, T) := \ker[H^1(K, T) \rightarrow \prod_{v \in X(1)} H^1(K_v, T)]$ .

On comparera les résultats b) et c) avec les calculs du défaut d'approximation faible pour un tore de [7] et [8]. Pour l'approximation forte, ce sont les groupes  $H^2(K, \hat{T})$  et  $H^2(K, T')$  qui apparaissent respectivement, et non plus leur sous-groupe des éléments presque partout localement triviaux. En ce sens, la situation est assez similaire à celle des corps de nombres (voir [6]).

Nous complétons notre étude par une description plus précise de la partie de torsion du sous-groupe divisible maximal de  $A(\emptyset, T)$ , que nous relierons à la cohomologie galoisienne de  $\hat{T}$  (corollaires 4.24, 5.5 et 6.9). La structure de  $A(\emptyset, T)$  est ainsi complètement élucidée dans les trois cas considérés.

Par ailleurs, une difficulté (notamment dans le cas c)) est qu'il n'est pas a priori évident que le sous-groupe divisible maximal et le sous-groupe des éléments infiniment divisibles coïncident pour  $A(\emptyset, T)$ ; nous commençons donc par quelques généralités sur ces deux notions.

## 2. Quelques lemmes sur les groupes abéliens

Soit  $B$  un groupe abélien. On note  $B_{\text{div}}$  le plus grand sous-groupe divisible de  $B$ , qui est la somme de tous les sous-groupes divisibles de  $B$ . On rappelle que comme tout sous-groupe divisible, c'est un facteur direct de  $B$ . On pose  $\bar{B} = B/B_{\text{div}}$ . Par ailleurs, on note  $B_{\infty\text{-div}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} nB$  le sous-groupe des éléments infiniment divisibles de  $B$ . On a clairement  $B_{\text{div}} \subset B_{\infty\text{-div}}$ , mais l'inclusion peut être stricte si on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire sur  $B$ , autrement dit  $B_{\infty\text{-div}}$  peut ne pas être un groupe divisible (cf. [4], exemple de la page 150). Si  $p$  est un nombre premier et  $B_{\text{div}_p}$  désigne le plus grand sous-groupe  $p$ -divisible de  $B$  (c'est le plus grand sous-groupe sur lequel la multiplication par  $p$  est surjective), on voit immédiatement que  $B_{\text{div}}$  est l'intersection pour  $p$  premier des  $B_{\text{div}_p}$ . On a  $x \in B_{\text{div}_p}$  si et seulement s'il existe une suite infinie (et pas seulement une suite finie de longueur arbitrairement grande)  $(x_n)$  d'éléments de  $B$  avec  $x_1 = x$  et  $x_n = px_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit aisément que  $x \in B_{\text{div}}$  si et seulement s'il existe une suite infinie  $(x_n)$  d'éléments de  $B$  avec  $x_1 = x$  et  $x_n = mx_{m+1}$  pour tous  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

Si  $B$  est un groupe de torsion de type cofini (i.e. la  $n$ -torsion  ${}_nB$  est finie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ), il est classique que  $B_{\text{div}} = B_{\infty\text{-div}}$  car on sait alors que  $B$  est somme directe sur tous les nombres premiers  $\ell$  de groupes de la forme  $F \oplus (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^r$ , où  $F$  est un  $\ell$ -groupe abélien fini.

Dans cette section, on regroupe quelques résultats généraux ayant trait notamment au comportement de  $B_{\text{div}}$  et  $B_{\infty\text{-div}}$  dans les suites exactes. On note  $B_{\text{tors}} = \bigcup_{n > 0} nB$  le sous-groupe de torsion de  $B$ .

**Lemme 2.1.** *Considérons une suite exacte de groupes abéliens :*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0, \quad (1)$$

telle que  $C_{\text{div}} = 0$ . Alors la suite (1) induit une suite exacte :

$$0 \rightarrow \bar{A} \xrightarrow{\bar{f}} \bar{B} \xrightarrow{\bar{g}} C \rightarrow 0. \quad (2)$$

*Démonstration.* Le seul point non trivial à vérifier est l'injectivité de  $\bar{f}$ . Donnons-nous  $x \in \text{Ker}(\bar{f})$ . Soit  $\tilde{x} \in A$  un relèvement de  $x$ . On sait alors que  $\tilde{y} := f(\tilde{x}) \in B_{\text{div}}$ . Comme

$B_{\text{div}}$  est divisible, il existe une famille  $(\tilde{y}_n)_{n \geq 1}$  à valeurs dans  $B_{\text{div}}$  telle que  $\tilde{y} = \tilde{y}_1$  et  $\tilde{y}_n = m\tilde{y}_{mn}$  pour tous  $m, n \geq 1$ . De plus, comme  $C_{\text{div}} = 0$ , on a  $g(\tilde{y}_n) = 0$ , et donc, d'après la suite exacte (1), il existe  $\tilde{x}_n \in A$  vérifiant  $f(\tilde{x}_n) = \tilde{y}_n$ . Par injectivité de  $f$  on déduit que  $\tilde{x} = \tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_n = m\tilde{x}_{mn}$  pour tous  $m, n \geq 1$ . Autrement dit,  $\tilde{x} \in A_{\text{div}}$  et  $x = 0$ .  $\square$

**Lemme 2.2.** *Considérons une exacte de groupes abéliens :*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

où  $C$  est un groupe d'exposant fini  $e$ . Alors  $B_{\infty\text{-div}} = A_{\infty\text{-div}}$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in B_{\infty\text{-div}}$ . Pour  $n \geq 1$ , écrivons  $x = nx_n$  avec  $x_n \in B$ . Pour  $n \geq 1$ , on a  $x = n \cdot (ex_{ne})$ . Le groupe  $C$  étant d'exposant  $e$ , il existe  $y \in A$  ainsi que  $y_n \in A$  tels que  $f(y) = x$  et  $f(y_n) = ex_{ne}$ . On a alors  $y = ny_n$ . Cela prouve que  $x \in A_{\infty\text{-div}}$ , comme on voulait.  $\square$

**Lemme 2.3.** *Considérons une exacte de groupes abéliens :*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0.$$

Supposons que le groupe  $C$  s'insère dans une suite exacte :

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{h} C \xrightarrow{i} E \rightarrow 0$$

où  $C'$  est un groupe sans torsion avec  $C'_{\infty\text{-div}} = 0$  et  $E$  est un groupe d'exposant fini  $e$ . Alors  $B_{\infty\text{-div}} = A_{\infty\text{-div}}$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in B_{\infty\text{-div}}$ . Pour  $n \geq 1$ , écrivons  $x = nx_n$  avec  $x_n \in B$ .

- Montrons d'abord que  $x$  est dans l'image de  $f$ . L'élément  $g(x)$  de  $C$  est infiniment divisible. Donc d'après le lemme 2.2, il existe  $y \in C'_{\infty\text{-div}}$  tel que  $h(y) = g(x)$ . Par hypothèse,  $y = 0$ , et donc  $g(x) = 0$  : autrement dit, il existe  $z \in A$  tel que  $f(z) = x$ .
- Soit  $n \geq 1$ . Remarquons que  $ng(ex_{ne}) = g(x) = 0$  et d'autre part  $g(ex_{ne}) \in \text{Im}(h)$  car  $E$  est d'exposant  $e$ . Comme  $C'$  est sans torsion, on déduit que  $g(ex_{ne}) = 0$ . Il existe alors  $z_n \in A$  tel que  $f(z_n) = ex_{ne}$ . On a  $z = nz_n$  pour chaque  $n$ , donc  $z$  est infiniment divisible dans  $A$ .  $\square$

**Lemme 2.4.** *Considérons une suite exacte de groupes abéliens :*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} C' \rightarrow 0.$$

Supposons que  $A$  et  $C'$  sont d'exposant fini et que le sous-groupe divisible maximal  $B_{\text{div}}$  de  $B$  est uniquement divisible. Alors  $C_{\text{div}}$  est uniquement divisible.

*Démonstration.* Comme  $C'$  est d'exposant fini,  $C_{\text{div}}$  est contenu dans l'image de  $g$ . De plus  $B_{\text{div}} \subset g^{-1}(C_{\text{div}})$ , ce qui montre que  $B$  et  $g^{-1}(C_{\text{div}})$  ont tous deux pour sous-groupe divisible maximal  $B_{\text{div}}$ . Quitte à remplacer  $C$  par  $C_{\text{div}}$  et  $B$  par  $g^{-1}(C_{\text{div}})$ , on peut donc supposer que  $C' = 0$  et que  $C$  est divisible. Donnons-nous  $x \in C_{\text{tors}}$  et considérons  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $C$  telle que  $x_1 = x$  et  $x_n = mx_{mn}$  pour tous  $m, n > 0$ . Pour

chaque  $n \geq 1$ , soit  $y_n \in B$  tel que  $g(y_n) = x_n$ . Quels que soient les entiers  $m$  et  $n$ , il existe  $z_{m,n} \in A$  tel que  $y_n = my_{mn} + z_{m,n}$ . Ainsi, si  $e$  désigne l'exposant de  $A$ , on a  $ey_n = mey_{mn}$ . En particulier,  $ey_e \in B_{\text{div}}$  car la suite infinie  $(u_n)$  définie par  $u_n = ey_{en}$  vérifie  $u_1 = ey_e$  et  $mu_{mn} = mey_{m(ne)} = ey_{en} = u_n$  pour tous  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $ey_e$  est de torsion (car  $g(ey_e)$  l'est, ainsi que  $A$ ), on en déduit que  $ey_e = 0$ , puis que  $y_1 \in A$  (via l'égalité  $y_1 = ey_e + z_{e,1}$ ) et enfin  $x = 0$ . Cela achève la preuve.  $\square$

**Lemme 2.5.** *Considérons une suite exacte de groupes abéliens :*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0.$$

*Supposons que  $A$  est fini et que  $B_{\infty\text{-div}} = B_{\text{div}}$ . Alors  $C_{\infty\text{-div}} = C_{\text{div}}$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in C_{\infty\text{-div}}$ . Pour  $n > 0$ , on se donne  $x_n \in C$  tel que  $x = nx_n$ . On considère ensuite  $y \in B$  (resp.  $y_n \in B$ ) tel que  $g(y) = x$  (resp.  $g(y_n) = x_n$ ). Pour chaque  $n > 0$ , il existe  $t_n \in A$  tel que  $y = ny_n + t_n$ . Soit  $t \in A$  tel que  $t_{n!} = t$  pour une infinité de valeurs de  $n$ . Alors  $y - t$  est infiniment divisible dans  $B$ . Par hypothèse, cela implique que  $y - t \in B_{\text{div}}$ , et donc que  $x = g(y - t) \in C_{\text{div}}$ .  $\square$

**Lemme 2.6.** *Soit  $B$  un groupe abélien tel que  $B_{\text{tors}}$  est de torsion de type cofini. Alors  $B_{\infty\text{-div}} = B_{\text{div}}$ .*

*Démonstration.* Écrivons  $B_{\text{tors}} = (\bigoplus_p F_p) \oplus D$  où  $p$  décrit l'ensemble des nombres premiers,  $F_p$  est un  $p$ -groupe abélien fini pour chaque  $p$  et  $D$  est divisible. On a des suites exactes :

$$0 \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow B/D \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$0 \rightarrow \bigoplus_p F_p \rightarrow B/D \rightarrow B/B_{\text{tors}} \rightarrow 0. \quad (4)$$

La suite (3) est scindée car  $D$  est divisible. Il suffit donc de démontrer que  $(B/D)_{\infty\text{-div}} = (B/D)_{\text{div}}$ . Soient  $x \in (B/D)_{\infty\text{-div}}$  et  $p$  un nombre premier. Pour chaque  $n \geq 1$ , considérons  $x_n \in B/D$  tel que  $x = p^n x_n$ . Notons  $y$  (resp.  $y_n$ ) l'image de  $x$  (resp.  $x_n$ ) dans  $B/B_{\text{tors}}$ . On a alors  $y = p^n y_n$  pour  $n \geq 1$ , et donc  $p^n(py_{n+1} - y_n) = 0$ . Comme  $B/B_{\text{tors}}$  n'a pas de torsion, on déduit que  $py_{n+1} = y_n$ . Par conséquent, pour  $n \geq 1$ , on a  $px_{n+1} = x_n + t_n$  pour un certain  $t_n \in \bigoplus_p F_p$ . En remarquant que  $p^n t_n = 0$ , on obtient que  $t_n \in F_p$ . Soit  $s \geq 1$  tel que  $p^s F_p = 0$ . On a alors  $p^{s+1} x_{n+1} = p^s x_n$  pour chaque  $n \geq 1$ . En posant  $z_n = p^s x_{s+n-1}$ , on obtient que  $z_1 = x$  et  $p z_{n+1} = z_n$  pour tout  $n \geq 1$ . Cela pouvant être fait pour chaque premier  $p$ , on déduit que  $x \in (B/D)_{\text{div}}$  (car  $x$  est dans le sous-groupe  $p$ -divisible maximal de  $B/D$  pour tout  $p$  premier), ce qui achève la preuve.  $\square$

Pour tout groupe abélien  $A$ , on pose  $A_{\wedge} := \varprojlim_{n>0} (A/nA)$ . Si tous les  $A/nA$  sont finis, alors  $A_{\wedge}$  n'est autre que le complété profini  $A^{\wedge}$  de  $A$ . De plus, on a  $A_{\wedge} = A$  si  $A$  est profini.

**Lemme 2.7.** *Soit  $C$  un groupe abélien profini. Soient  $A$  et  $B$  des groupes abéliens.*

*a) Soit  $f : B \rightarrow C$  un morphisme tel que le morphisme induit  $B_{\wedge} \rightarrow C$  soit surjectif. Alors  $f(B)$  est dense dans  $C$ .*

b) Soit

$$A \xrightarrow{i} B \rightarrow C$$

un complexe de groupes abéliens avec  $C$  profini. On suppose que le complexe associé

$$A_\wedge \rightarrow B_\wedge \rightarrow C$$

est une suite exacte. Soit  $E$  le quotient de  $B$  par  $i(A)$ . Alors le noyau de l'application induite  $u : E \rightarrow C$  est  $E_{\infty\text{-div}}$ .

*Démonstration.* a) L'hypothèse implique que pour tout  $n > 0$ , l'application  $B/nB \rightarrow C/nC$  induite par  $f$  est surjective. Comme  $C$  est profini, tout sous-groupe ouvert  $U$  de  $C$  est d'indice fini, donc contient  $nC$  pour un certain  $n > 0$ . Ceci montre que si  $x \in C$ , alors l'ouvert  $x + U$  rencontre  $f(B)$  puisqu'on peut écrire  $x = f(y) + x'$  avec  $x' \in nC$ . Ceci montre que  $f(B)$  est dense dans  $C$ .

b) Comme  $C$  est profini, il est limite projective des  $C/nC$  et on a donc  $C_{\infty\text{-div}} = 0$ , ce qui montre que  $E_{\infty\text{-div}} \subset \ker u$ . En sens inverse, soit  $x \in \ker u$ , qu'on relève en  $y \in B$ . Soit  $n > 0$ . Alors l'image de  $y$  dans  $B_\wedge$  provient de  $A_\wedge$ , ce qui implique que l'image de  $y$  dans  $B/nB$  provient de  $A/nA$ . Il existe donc  $a \in A$  tel que  $i(a) = y + nb$  avec  $b \in B$ . Ainsi l'image  $x$  de  $y$  dans  $E = B/i(A)$  est divisible par  $n$ . Finalement  $x \in E_{\infty\text{-div}}$ .  $\square$

### 3. Cas général

Dans cette section, on considère le corps des fonctions  $K$  d'une courbe projective lisse géométriquement intègre  $X$  sur un corps de base  $k$  de caractéristique 0. Nous allons montrer que sans aucune hypothèse sur  $k$ , le groupe des points rationnels  $T(K)$  d'un  $K$ -tore est discret dans l'espace adélique  $T(\mathbf{A}_K, S) = \prod'_{v \notin S} T(K_v)$ , et ce pour tout ensemble fini  $S$  de points fermés de  $X$ . On commence par le cas du tore déployé  $T = \mathbf{G}_m$ .

Soient  $U$  un ouvert non vide de  $X$  et  $S$  l'ensemble fini  $X - U$ . On note  $k[U]$  l'anneau des fonctions régulières sur  $U$  et  $k[U]^* = H^0(U, \mathbf{G}_m)$  le groupe des fonctions inversibles sur  $U$ . Les valuations associées aux points fermés de  $U$  induisent une application

$$\text{val} : \mathbf{G}_m(A, S) = \prod'_{v \in U(1)} K_v^* \rightarrow \bigoplus_{v \in U(1)} \mathbb{Z}.$$

On équipe  $\bigoplus_{v \in U(1)} \mathbb{Z}$  de la topologie discrète et  $\mathbf{G}_m(A, S)$  de la topologie de produit restreint associée aux topologies  $v$ -adiques. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} K^* & \xrightarrow{\iota} & \prod'_{v \in U(1)} K_v^* \\ & \searrow & \downarrow \text{val} \\ & & \bigoplus_{v \in U(1)} \mathbb{Z}. \end{array}$$

**Lemme 3.1.** *Le morphisme  $\iota(K^*) \rightarrow \bigoplus_{v \in U(1)} \mathbb{Z}$  est continu quand on équipe  $\iota(K^*)$  de la topologie induite par celle de  $\mathbf{G}_m(A, S)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que le morphisme  $\prod'_{v \in U(1)} K_v^* \rightarrow \bigoplus_{v \in U(1)} \mathbb{Z}$  induit par les valuations est continu. Cela découle immédiatement de la définition de la topologie produit restreint car le noyau  $\prod'_{v \in U(1)} \mathcal{O}_v^*$  de  $\text{val}$  est un sous-groupe ouvert de  $\prod'_{v \in U(1)} K_v^*$ .  $\square$

**Lemme 3.2.** Soit  $v \in U^{(1)}$ . Soit  $\iota_v$  l'injection naturelle de  $k[U]^*$  dans  $K_v^*$ . Alors  $\iota_v(k[U]^*)$  est fermé discret dans  $\mathcal{O}_v^*$  (et donc aussi dans  $K_v^*$ ).

*Démonstration.* Le groupe  $k[U]^*/k^*$  est de type fini car on a une suite exacte

$$1 \rightarrow k^* \rightarrow k[U]^* \xrightarrow{\oplus_{w \in S} \text{val}_w} \bigoplus_{w \in S} \mathbb{Z}.$$

Du coup, si on pose  $\mathcal{O}_v^1 := \{x \in \mathcal{O}_v \mid v(x-1) > 0\}$  et si on note  $k(v)$  le corps résiduel de  $\mathcal{O}_v$ , alors dans le groupe  $K_v^* \cong \mathbb{Z} \times k(v)^* \times \mathcal{O}_v^1$ , on a :

$$\iota_v(k[U]^*) \subset k(v)^* \times \mathcal{O}_v^1,$$

et il suffit de démontrer que  $\iota_v(k[U]^*) \cap \mathcal{O}_v^1$  est discret vu que  $k(v)^*$  est discret. Comme  $\iota_v(k[U]^*) \cap \mathcal{O}_v^1$  s'injecte dans le groupe de type fini  $\iota_v(k[U]^*/k^*)$ , il est lui même de type fini. Étant donné que  $\mathcal{O}_v^1 \cong k[[t]]$ , il suffit de démontrer le lemme qui suit :

**Lemme 3.3.** Soit  $H$  un sous-groupe de type fini du groupe additif  $k[[t]]$ . Alors  $H$  est fermé discret dans  $k[[t]]$ .

Notons que c'est précisément ce résultat qui est clairement faux si on remplace  $k[[t]]$  par l'anneau des entiers d'un corps complet pour une valuation discrète d'inégale caractéristique comme  $\mathbb{Q}_p$  : par exemple, le sous-groupe de type fini  $\mathbb{Z}$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{Z}_p$ .

*Démonstration du lemme.* Soit  $(z_1, \dots, z_m)$  une famille génératrice de  $H$  (on peut même supposer que c'est une base puisque  $H$  est libre, étant de type fini et sans torsion). Soit  $(x_n)_n$  une suite à valeurs dans  $H$  qui converge vers un certain  $y \in k[[t]]$ . Écrivons :

$$x_n = a_1^{(n)} z_1 + \dots + a_m^{(n)} z_m$$

avec  $a_1^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}$  entiers. Écrivons aussi :

$$z_j = \sum_{i \geq 0} z_i^{(j)} t^i, \quad y = \sum_{i \geq 0} y_i t^i.$$

On a donc

$$x_n = \sum_{i \geq 0} \left( \sum_{r=1}^m a_r^{(n)} z_i^{(r)} \right) t^i.$$

Par définition de la topologie sur  $k[[t]]$ , la convergence de la suite  $(x_n)$  vers  $y$  signifie que pour chaque  $i \geq 0$ , il existe  $n_i \geq 1$  tel que, pour tout  $n \geq n_i$ , on a :

$$y_i = a_1^{(n)} z_i^{(1)} + \dots + a_m^{(n)} z_i^{(m)}.$$

Notons :

$$M_s := \{(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{Q}^m \mid \forall i \in \{0, 1, \dots, s\}, y_i = b_1 z_i^{(1)} + \dots + b_m z_i^{(m)}\},$$

de sorte que  $(a_1^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}) \in M_s$  pour  $n \geq \max\{n_0, \dots, n_s\}$ . On remarque que les  $M_s$  forment une suite décroissante de sous-espaces affines non vides de  $\mathbb{Q}^m$ . Par conséquent, si  $M_\infty := \{(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{Q}^m \mid y = b_1 z_1 + \dots + b_m z_m\}$ , il existe  $s_0 \geq 0$  tel que :

$$M_{s_0} = M_{s_0+1} = \dots = M_\infty.$$

En notant  $N = \max\{n_0, \dots, n_{s_0}\}$ , on a donc  $(a_1^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}) \in M_\infty$  pour  $n \geq N$ . La suite  $(x_n)$  est donc stationnaire, ce qui achève la preuve.  $\square$

**Proposition 3.4.** *L'image  $\iota(K^*)$  de  $K^*$  dans  $\prod'_{v \in U(1)} K_v^*$  en est un sous-groupe discret (donc fermé).*

*Démonstration.* D'après le lemme 3.1, le sous-groupe  $\iota(k[U]^*)$  est un voisinage ouvert de  $\{1\}$  dans  $\iota(K^*)$ . Choisissons  $v \in X^{(1)}$ . D'après le lemme 3.2,  $\iota_v(k[U]^*)$  est discret dans  $K_v^*$ , donc a fortiori  $\iota(k[U]^*)$  est un sous-groupe discret de  $\prod'_{v \in U(1)} K_v^*$  (la topologie induite par  $\prod'_{v \in U(1)} K_v^*$  est au moins aussi fine que celle induite par  $K_v^*$ ). Comme  $\iota(k[U]^*)$  est un voisinage ouvert de  $\{1\}$  dans  $\iota(K^*)$ , cela montre que  $\{1\}$  est ouvert dans  $\iota(K^*)$ , autrement dit  $\iota(K^*)$  est un groupe discret.  $\square$

On va maintenant traiter le cas d'un tore quelconque. Rappelons qu'un  $K$ -tore  $T$  est *quasi-trivial* si  $\hat{T}$  est un module galoisien de permutation (i.e. il existe une base de  $\hat{T}$  en tant que groupe abélien qui est stable par l'action de Galois). De façon équivalente, cela signifie que  $T$  est isomorphe à un produit de tores de la forme  $R_{E_i/K} \mathbf{G}_m$  (où  $R_{E_i/K}$  désigne la restriction de Weil de  $E_i$  à  $K$ ,  $E_i$  étant une extension finie de corps de  $K$ ). Tout tore se plonge dans un tore quasi-trivial, car tout module galoisien de type fini est quotient d'un module de permutation.

**Corollaire 3.5.** *Soit  $R$  un  $K$ -tore quasi-trivial. L'image de l'injection diagonale :*

$$R(K) \rightarrow \prod'_{v \in U(1)} R(K_v)$$

*est fermée discrète dans  $\prod'_{v \in U(1)} R(K_v)$ .*

*Démonstration.* Écrivons  $R = R_{E/K}(\mathbf{G}_m)$  avec  $E = E_1 \times \dots \times E_r$  et  $E_1, \dots, E_r$  des extensions finies de  $K$ . Soient  $X_1, \dots, X_r$  des courbes projectives lisses sur  $K$  telles que  $K(X_i) = E_i$  pour chaque  $i$ . Les extensions  $E_i/K$  induisent bien sûr des morphismes  $\pi_i : X_i \rightarrow X$ . Notons  $U_i = \pi_i^{-1}(U)$  pour chaque  $i$ . L'injection naturelle :

$$R(K) \rightarrow \prod'_{v \in U(1)} R(K_v)$$

s'identifie alors, via le lemme de Shapiro, à l'injection naturelle :

$$\prod_i E_i^* \rightarrow \prod_i \prod'_{w \in U_i^{(1)}} E_{i,w}^*.$$

D'après la proposition 3.4, son image est bien fermée discrète.  $\square$

**Théorème 3.6.** *Soit  $T$  un  $K$ -tore. Considérons l'injection diagonale :*

$$\iota_T : T(K) \rightarrow \prod'_{v \in U(1)} T(K_v).$$

*Son image est fermée discrète dans  $\prod'_{v \in U(1)} T(K_v)$ .*



*Démonstration.* Soit  $f : T \rightarrow R$  un  $K$ -morphisme injectif vers un tore quasi-trivial  $R$ . On a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & T(K) & \longrightarrow & R(K) \\ & & \downarrow \iota_T & & \downarrow \iota_R \\ 0 & \longrightarrow & \prod'_{v \in U(1)} T(K_v) & \longrightarrow & \prod'_{v \in U(1)} R(K_v) \end{array}$$

L'image de  $\iota_R$  étant fermée discrète dans  $\prod'_{v \in U(1)} R(K_v)$  d'après le lemme 3.5, il en est de même de l'image de  $\iota_T$  dans  $\prod'_{v \in U(1)} T(K_v)$ .  $\square$

## 4. Cas $k$ algébriquement clos

Soit  $K$  le corps des fonctions d'une courbe projective et lisse  $X$  sur un corps  $k$  de caractéristique zéro. Fixons quelques notations, qui seront en vigueur jusqu'à la fin de l'article :

**Notation 4.1.** Lorsque  $T$  est un  $K$ -tore et  $S$  une partie finie de  $X^{(1)}$ , on note :

$$A(S, T) := \left( \prod'_{v \in U(1)} T(K_v) \right) / T(K)$$

où  $U = X \setminus S$  et on a identifié  $T(K)$  avec son image diagonale dans  $\prod'_{v \in U(1)} T(K_v)$ .

**Notation 4.2.** Soit  $T$  un  $K$ -tore. Soit  $\mathcal{T}$  un tore sur un ouvert non vide  $U$  de  $X$  étendant  $T$ .

On pose :

$$\mathbb{P}^0(T) := \prod'_{v \in X^{(1)}} T(K_v),$$

(le produit restreint étant relatif aux  $\mathcal{T}(\mathcal{O}_v)$ ) et on munit  $\mathbb{P}^0(T)$  de sa topologie de produit restreint.

Pour tout module galoisien  $M$  sur  $K$  et tout  $i > 0$ , on pose :

$$\mathrm{III}^i(K, M) := \ker[H^i(K, M) \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} H^i(K_v, M)].$$

Dans cette section, le corps  $k$  est supposé algébriquement clos. Nous allons voir que dans ce cas, on peut déterminer beaucoup plus précisément  $A(S, T)$  (qui est aussi le défaut d'approximation forte d'après le théorème 3.6).

### 4.1 Structure de $A(S, T)$

**Lemme 4.3.** Soit  $S$  une partie finie de  $X^{(1)}$ . Notons  $U = X \setminus S$  et considérons le groupe :

$$A(S, \mathbf{G}_m) := \left( \prod'_{v \in U(1)} K_v^* \right) / K^*.$$

(i) Si  $S = \emptyset$ , le groupe  $\overline{A(S, \mathbf{G}_m)}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

(ii) Si  $S \neq \emptyset$ , le groupe  $A(S, \mathbf{G}_m)$  est divisible.

*Démonstration.* En considérant la valuation en chaque  $v \in U^{(1)}$ , on définit une flèche surjective  $\prod'_{v \in U^{(1)}} K_v^* \rightarrow \text{Div } U$ , induisant une flèche surjective  $\prod'_{v \in U^{(1)}} K_v^* \rightarrow \text{Pic } U$  dont le noyau est le sous-groupe  $K^* \prod_{v \in U^{(1)}} \mathcal{O}_v^*$ . Comme par ailleurs on a  $K^* \cap \prod_{v \in U^{(1)}} \mathcal{O}_v^* = k[U]^*$ , on obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow \left( \prod_{v \in U^{(1)}} \mathcal{O}_v^* \right) / k[U]^* \rightarrow A(S, \mathbf{G}_m) \rightarrow \text{Pic}(U) \rightarrow 0. \quad (5)$$

Pour chaque  $v \in U^{(1)}$ , le groupe  $\mathcal{O}_v^*$  est divisible par le lemme de Hensel car le corps résiduel de  $\mathcal{O}_v$  est algébriquement clos de caractéristique zéro.

Soit  $J$  la jacobienne de la courbe  $X$ . On a alors une suite exacte scindée par le choix de tout point fermé de  $X$  (qui est un  $k$ -point puisque  $k$  est algébriquement clos) :

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0 X \simeq J(k) \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

et  $\text{Pic } U$  est le quotient de  $\text{Pic } X$  par l'image de  $\bigoplus_{v \in S} \mathbb{Z}.v$ . Comme  $J(k)$  est divisible (toujours parce que  $k$  est algébriquement clos), il en résulte que  $\overline{\text{Pic}(U)}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  si  $S = \emptyset$  et il est trivial sinon. On en déduit la même propriété pour  $\overline{A(S, \mathbf{G}_m)}$  via la suite exacte (5), dont on a vu que le groupe de gauche est divisible.  $\square$

**Remarque 4.4.** Soit  $T$  un tore quasi-trivial sur  $K$ . Le lemme 4.3 impose que  $A(S, T)$  est divisible si  $S \neq \emptyset$  et que :

$$\overline{A(\emptyset, T)} \cong \mathbb{Z}^{r_T}$$

où  $r_T = \text{rg } H^0(K, \hat{T})$ .

**Théorème 4.5.** *Supposons que  $k$  est algébriquement clos. Soit  $T$  un  $K$ -tore.*

(i) *Le groupe  $\overline{A(\emptyset, T)}$  est un groupe abélien de type fini de rang  $\text{rg}(H^0(K, \hat{T}))$ .*

(ii) *Soit  $S$  une partie finie non vide de  $X^{(1)}$ . Alors le groupe  $A(S, T)$  est divisible.*

*Démonstration.* Donnons-nous une partie finie  $S$  (éventuellement vide) de  $X^{(1)}$  et notons  $U = X \setminus S$ . D'après le lemme d'Ono (cf. par exemple [17], lemme 1.7), il existe un entier  $m > 0$  et une suite exacte :

$$0 \rightarrow F \rightarrow R_0 \rightarrow T^m \times R_1 \rightarrow 0$$

tels que  $F$  est un  $K$ -groupe abélien fini et  $R_0$  et  $R_1$  sont des tores quasi-triviaux. Observons que comme  $F$  est fini, le groupe  $\prod'_{v \in U^{(1)}} F(K_v)$  est simplement  $\prod_{v \in U^{(1)}} F(K_v)$ ; d'autre part, le groupe  $\prod'_{v \in U^{(1)}} H^1(K_v, F)$  est en fait  $\bigoplus_{v \in U^{(1)}} H^1(K_v, F)$  : en effet, on peut étendre  $F$  en un schéma en groupes fini étale  $\mathcal{F}$  au-dessus d'un ouvert de Zariski non vide  $U_0$  de  $X$ , après quoi on a, pour tout  $v \in U_0^{(1)}$ , l'égalité  $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{F}) = 0$  puisque le corps résiduel  $k$  de  $\mathcal{O}_v$  est algébriquement clos.

On obtient alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F(K) & \longrightarrow & R_0(K) & \longrightarrow & T(K)^m \times R_1(K) & \longrightarrow & H^1(K, F) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \prod_{v \in U^{(1)}} F(K_v) & \longrightarrow & \prod'_{v \in U^{(1)}} R_0(K_v) & \longrightarrow & \prod'_{v \in U^{(1)}} (T(K_v)^m \times R_1(K_v)) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in U^{(1)}} H^1(K_v, F) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Une chasse au diagramme permet de montrer qu'on a alors (en notant pour simplifier encore  $H^1(K, F)$  l'image de  $H^1(K, F)$  dans  $\bigoplus_{v \in U^{(1)}} H^1(K_v, F)$ ) une suite exacte :

$$0 \rightarrow N \rightarrow A(S, R_0) \rightarrow A(S, T)^m \times A(S, R_1) \rightarrow \left( \bigoplus_{v \in U^{(1)}} H^1(K_v, F) \right) / H^1(K, F) \rightarrow 0, \quad (6)$$

avec  $N$  un groupe abélien d'exposant fini. Comme  $\overline{A(S, R_0)}$  est un groupe abélien sans torsion d'après la remarque 4.4, l'image de  $N$  dans  $\overline{A(S, R_0)}$  est contenue dans  $A(S, R_0)_{\text{div}}$ . Comme  $A(S, R_0)$  est isomorphe au produit direct de  $\overline{A(S, R_0)}$  et de  $A(S, R_0)_{\text{div}}$ , on déduit de la suite (6) que l'on a aussi une suite exacte :

$$0 \rightarrow \overline{A(S, R_0)} \times D_0 \rightarrow A(S, T)^m \times A(S, R_1) \rightarrow \left( \bigoplus_{v \in U^{(1)}} H^1(K_v, F) \right) / H^1(K, F) \rightarrow 0, \quad (7)$$

où  $D_0$  est un groupe divisible. Or la suite exacte de Poitou-Tate pour un module galoisien fini sur  $K$  (cas  $d = -1$  de [11], Th. 2.7) implique, en posant  $F' := \text{Hom}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ , que :

$$\left( \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, F) \right) / H^1(K, F) \cong F'(K)^D,$$

et donc le groupe :

$$M_U := \left( \bigoplus_{v \in U^{(1)}} H^1(K_v, F) \right) / H^1(K, F)$$

est fini ; de plus, ce groupe est nul si  $U \neq X$ , c'est-à-dire si  $S \neq \emptyset$  ([2], Prop. 3.2. iii).

En appliquant le lemme 2.1, on obtient alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow \overline{A(S, R_0)} \rightarrow \overline{A(S, T)}^m \times \overline{A(S, R_1)} \rightarrow M_U \rightarrow 0. \quad (8)$$

(i) Supposons d'abord que  $S = \emptyset$ . Dans ce cas, la remarque 4.4 montre que  $\overline{A(\emptyset, R_0)} \cong \mathbb{Z}^{r_0}$  (resp.  $\overline{A(\emptyset, R_1)} \cong \mathbb{Z}^{r_1}$ ) pour  $r_0 = \text{rg } H^0(K, \hat{R}_0)$  (resp.  $r_1 = \text{rg } H^0(K, \hat{R}_1)$ ). On en déduit que  $\overline{A(\emptyset, T)}$  est un groupe abélien de type fini de rang :

$$\frac{r_0 - r_1}{m} = \frac{\text{rg } H^0(K, \hat{T}^m)}{m} = \text{rg } H^0(K, \hat{T}).$$

(ii) Supposons maintenant que  $S$  est non vide. Dans ce cas, la remarque 4.4 montre que  $A(S, R_0)$  et  $A(S, R_1)$  sont divisibles. Par conséquent,  $\overline{A(S, T)}^m \cong M_U$  est nul et  $A(S, T)$  est divisible. □

**Corollaire 4.6.** *Supposons que  $k$  est algébriquement clos. Soit  $T$  un  $K$ -tore. Le groupe  $\overline{A(\emptyset, T)}$  est fini si, et seulement si,  $T$  est anisotrope.*

## 4.2 Une application aux groupes linéaires connexes

On suppose toujours que  $K$  est le corps des fonctions d'une courbe projective et lisse  $X$  sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro  $k$ . Soit  $S$  un ensemble fini de points fermés de  $X$ . Dans ce paragraphe, on étend le théorème 4.5, ii) à un  $K$ -groupe algébrique linéaire connexe  $G$  quelconque. On note  $G(S, \mathbf{A}_K)$  le produit restreint des  $G(K_v)$  pour  $v \notin S$  et  $G(K)_{\text{adh}}$  l'adhérence de  $G(K)$  dans  $G(S, \mathbf{A}_K)$ , puis  $A(S, G)$  l'ensemble quotient  $G(S, \mathbf{A}_K)/G(K)_{\text{adh}}$ , qui est donc le défaut d'approximation forte en dehors de  $S$ .

**Théorème 4.7.** *Soit  $S$  un ensemble fini non vide de points fermés de  $X$ . Soit  $G$  un  $K$ -groupe linéaire connexe. Alors  $G(K)_{\text{adh}}$  est un sous-groupe normal de  $G(S, \mathbf{A}_K)$  et le quotient  $A(S, G)$  est un groupe abélien divisible.*

**Démonstration :** On va déduire ce résultat du théorème 4.5, ii) et du théorème principal de [2], en suivant une méthode un peu similaire à celle de [17], Th. 3.3.

On commence par observer que comme le corps  $K$  et les complétés  $K_v$  sont  $C_1$ , le théorème de Steinberg ([19], §III.2.2., Th. 1) assure que  $H^1(K, L) = H^1(K_v, L) = 1$  pour tout groupe linéaire connexe  $L$ . Il en résulte que toute suite exacte de  $K$ -groupes linéaires connexes

$$1 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow 1$$

induit une suite exacte de groupes

$$1 \rightarrow L_1(K) \rightarrow L_2(K) \rightarrow L_3(K) \rightarrow 1,$$

et de même si on remplace  $K$  par  $K_v$ . On en déduit immédiatement par dévissage que si  $L_1$  et  $L_3$  satisfont l'approximation forte en dehors de  $S$ , il en va de même de  $L_2$ . Or, le groupe additif  $\mathbf{G}_a$  vérifie l'approximation forte en dehors de  $S$  parce que  $S$  est non vide, d'après le théorème d'approximation forte pour les anneaux de Dedekind ([1], Th. 10.5.10) appliqué à l'anneau des fonctions régulières sur la courbe affine  $U := X - S$ . Comme tout groupe connexe unipotent en caractéristique zéro s'obtient à partir du groupe trivial via des extensions successives par  $\mathbf{G}_a$ , on en déduit que tout  $K$ -groupe unipotent connexe satisfait l'approximation forte en dehors de  $S$ .

Si  $U$  désigne le radical unipotent de  $G$ , le quotient  $H := G/U$  est réductif; de plus, en tant que  $K$ -variété,  $G$  est isomorphe au produit  $U \times_K H$  par le théorème de Mostow. Il en résulte que  $G(K)_{\text{adh}}$  est l'image réciproque de  $H(K)_{\text{adh}}$  par la surjection canonique  $G(S, \mathbf{A}_K) \rightarrow H(S, \mathbf{A}_K)$ . Pour démontrer le théorème, on peut donc supposer que  $G$  est réductif.

On sait alors que  $G$  s'insère dans une suite exacte de  $K$ -groupes algébriques

$$1 \rightarrow L \rightarrow G \rightarrow T \rightarrow 1,$$

où  $L$  est semi-simple et  $T$  est un tore. Le théorème de Steinberg fournit encore un diagramme commutatif à lignes exactes de groupes topologiques

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & L(K) & \longrightarrow & G(K) & \xrightarrow{\varphi} & T(K) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \theta & & \\ 1 & \longrightarrow & \prod'_{v \notin S} L(K_v) & \longrightarrow & \prod'_{v \notin S} G(K_v) & \xrightarrow{u} & \prod'_{v \notin S} T(K_v) & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Soit  $I = u^{-1}(\text{Im } \theta)$ . Comme  $T(K)$  est fermé dans  $\prod'_{v \notin S} T(K_v)$  d'après le théorème 3.6, le sous-groupe  $I$  est fermé dans  $\prod'_{v \notin S} G(K_v)$ , et il est également normal car  $\prod'_{v \notin S} T(K_v)$  est abélien. Ainsi  $I$  contient l'adhérence  $G(K)_{\text{adh}}$ . On obtient un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & L(K) & \longrightarrow & G(K) & \xrightarrow{\varphi} & T(K) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow i & & \downarrow & & \downarrow \theta & & \\ 1 & \longrightarrow & \prod'_{v \notin S} L(K_v) & \longrightarrow & I & \xrightarrow{u} & \text{Im } \theta & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

où la flèche  $\theta$  est maintenant surjective. Comme  $L(K)$  est dense dans  $\prod'_{v \notin S} L(K_v)$  d'après le Th. 3.4. de [2], une chasse au diagramme immédiate donne alors que  $G(K)_{\text{adh}} = I$ . Ainsi

$$A(S, G) = \left( \prod'_{v \notin S} G(K_v) \right) / I \cong \left( \prod'_{v \notin S} T(K_v) \right) / T(K) = A(S, T)$$

est bien un groupe abélien divisible, ce qui achève la preuve.  $\square$

**Remarque 4.8.** Dans le cas où  $S = \emptyset$  et  $G = G_0 \times_k K$  (où  $G_0$  est un  $k$ -groupe linéaire), on peut prendre  $\mathcal{G} = G \times_k X$  comme modèle de  $G$  au-dessus de  $X$ . Alors, l'intersection

$$G(K) \cap \prod_{v \in X^{(1)}} \mathcal{G}(\mathcal{O}_v) = \mathcal{G}(X) = \text{Hom}_k(X, G_0)$$

est réduite à  $G_0(k)$  car  $X$  est projective et  $G_0$  affine sur  $k$ . On en déduit immédiatement que  $G(K)$  est discret dans  $G(\emptyset, \mathbf{A}_K)$  (ceci pour  $k$  quelconque). Il ne semble pas y avoir de bonne description de l'ensemble quotient  $G(\emptyset, \mathbf{A}_K)/G(K)$  en général (même si  $G$  est semi-simple et simplement connexe), tout comme dans le cas d'un corps de nombres ou d'un corps de fonctions sur un corps fini où il faut toujours enlever au moins une place pour obtenir des énoncés d'approximation forte. Nous allons voir au paragraphe suivant que la situation est meilleure si on se limite aux tores.

### 4.3 Suite de Poitou-Tate

Soit  $T$  un  $K$ -tore. Notre but ici est de traiter le cas " $d = -1$ " du théorème 3.20 de [11], et d'en déduire une suite exacte analogue à celle du corps de classes global reliant  $A(\emptyset, T)$  à un groupe de cohomologie galoisienne sur  $K$  associé à  $T$ . Dans loc. cit., où le corps  $k$  est un corps  $d$ -local, c'est le complexe motivique  $\mathbb{Z}(d)$  qui apparaît. Suivant une suggestion de B. Kahn, que nous remercions pour son aide, c'est  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1)$  qui va jouer ce rôle dans notre cas  $d = -1$ . Plus précisément, on pose, en suivant [14], définition 4.1 :

$$\tilde{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1).$$

Rappelons que  $\mathbf{G}_m = \mathbb{Z}(1)[1]$  dans la catégorie dérivée des modules galoisiens sur  $K$ . On a alors ([14], section 5) dans cette catégorie un accouplement naturel :

$$T \otimes^{\mathbb{L}} \tilde{T} \rightarrow \mathbb{Z}(1)[1] \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1) \rightarrow \mathbb{Z}[2]. \quad (9)$$

Pour  $v \in X^{(1)}$ , on obtient alors un accouplement naturel en cohomologie :

$$H^0(K_v, T) \times H^0(K_v, \tilde{T}) \rightarrow H^2(K_v, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (10)$$

Notons que  $\tilde{T}$  est de torsion, avec  ${}_n\tilde{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)$  pour tout  $n > 0$ .

**Lemme 4.9.** *Soit  $v \in X^{(1)}$ . L'accouplement (10) induit un accouplement parfait entre un groupe profini et un groupe discret de torsion :*

$$H^0(K_v, T)_\wedge \times H^0(K_v, \tilde{T}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* Soit  $n > 0$ . On écrit la suite exacte de Kummer

$$0 \rightarrow_n T \rightarrow T \xrightarrow{\cdot n} T \rightarrow 0.$$

On a  $H^1(K_v, T) = 0$  (ce groupe est d'exposant fini par Hilbert 90 et  $H^1(K_v, T)/n$  s'injecte dans  $H^2(K_{v,n}T)$  via la suite de Kummer, avec de plus  $K_v$  de dimension cohomologique 1 comme corps complet pour une valuation discrète de corps résiduel algébriquement clos). Ainsi  $H^0(K_v, T)/n \cong H^1(K_{v,n}T)$ . Par [16], partie I, exemple 1.10, le groupe  $H^1(K_{v,n}T)$  est fini et il est dual de  $H^0(K_v, \hat{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1))$ , ou encore de  $H^0(K_{v,n}\tilde{T})$ .

Finalement, pour chaque  $n > 0$ , on a un isomorphisme naturel :

$$H^0(K_v, T)/n \cong ({}_nH^0(K_v, \tilde{T}))^D.$$

En passant à la limite projective sur  $n$  et en notant que  $\tilde{T}$  est de torsion, on obtient un isomorphisme :

$$H^0(K_v, T)_\wedge \cong H^0(K_v, \tilde{T})^D.$$

Notons que  $H^0(K_v, T)_\wedge = H^0(K_v, T)^\wedge$  est bien profini puisque chaque  $H^0(K_v, T)/n$  est fini.  $\square$

Soit  $\mathcal{T}$  un tore sur un ouvert non vide  $U$  de  $X$  étendant  $T$ . Soit  $\tilde{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1)$ .

Posons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^0(\tilde{\mathcal{T}}) &:= \prod_{v \in X^{(1)}} \tilde{\mathcal{T}}(K_v), \\ \mathbb{P}^1(\tilde{\mathcal{T}}) &:= \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, \tilde{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Pour chaque  $n > 0$ , munissons  ${}_n\mathbb{P}^0(\tilde{\mathcal{T}}) := \prod_{v \in X^{(1)}} {}_n\tilde{\mathcal{T}}(K_v)$  de la topologie produit (obtenue à partir des topologies discrètes sur chaque groupe fini  ${}_n\tilde{\mathcal{T}}(K_v)$ ), qui en fait un espace compact. Munissons ensuite  $\mathbb{P}^0(\tilde{\mathcal{T}})_{\text{tors}} = \varinjlim_n {}_n\mathbb{P}^0(\tilde{\mathcal{T}})$  de la topologie limite inductive. Noter que  $\mathbb{P}^1(\tilde{\mathcal{T}})$  est aussi le produit restreint  $\prod'_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, \tilde{\mathcal{T}})$  : en effet on a  $H^1(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}}) = 0$  pour  $v \in U^{(1)}$  puisque le corps résiduel de  $\mathcal{O}_v$  est algébriquement clos.

**Remarque 4.10.** Contrairement au cas où  $K$  est un corps de nombres, on n'a pas en général  $\text{III}^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ , faute d'avoir l'analogue du théorème de Čebotarev. Plus précisément,  $\text{III}^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  s'identifie au dual du groupe fondamental étale de  $X$  (ou de son abélianisé), il est donc nul seulement quand  $X$  est la droite projective, et est infini en général.

**Lemme 4.11.** *On a une suite exacte :*

$$0 \rightarrow H^0(K, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow \mathbb{P}^0(\tilde{\mathcal{T}})_{\text{tors}} \rightarrow (H^0(K, T)_\wedge)^D \rightarrow \text{III}^1(K, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \varinjlim_n H^0(K, n\tilde{T}) & \longrightarrow & \varinjlim_n \mathbb{P}^0(n\tilde{T}) & \longrightarrow & \varinjlim_n (H^1(K, nT)^D) & \longrightarrow & \varinjlim_n H^1(K, n\tilde{T}) & \longrightarrow & \varinjlim_n \mathbb{P}^1(n\tilde{T}) \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 0 & \longrightarrow & H^0(K, \tilde{T}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^0(\tilde{T})_{\text{tors}} & \longrightarrow & (H^0(K, T)_{\wedge})^D & \longrightarrow & H^1(K, \tilde{T}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\tilde{T})
 \end{array}$$

Montrons d'abord que tous les morphismes verticaux sont des isomorphismes. Le premier est clair parce que  $\tilde{T}$  est de torsion, et pour le deuxième c'est immédiat. Le troisième vient des isomorphismes  $H^0(K, T)/n \cong H^1(K, nT)$ , lesquels résultent de la suite de Kummer et de ce que  $H^1(K, T) = 0$  puisque  $K$  est un corps  $C_1$  par le théorème de Tsen. Le quatrième vient de ce que  $\tilde{T}$  est de torsion. Enfin, pour le dernier, on utilise la commutation de  $\varinjlim$  avec  $\oplus$  et avec la cohomologie galoisienne.

Maintenant, la première ligne est exacte en passant à la limite sur la suite de Poitou-Tate pour les modules finis ([11], Th. 2.7 dans le cas  $d = -1$ ). Il en est donc de même de la deuxième, d'où le lemme.  $\square$

**Lemme 4.12.** *La dualité locale induit un isomorphisme :*

$$\mathbb{P}^0(T)_{\wedge} \cong (\mathbb{P}^0(\tilde{T})_{\text{tors}})^D.$$

*Démonstration.* On observe que pour  $v \notin U^{(1)}$ , le groupe  $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{T})$  est divisible via le lemme de Hensel, puisque la réduction modulo  $v$  de  $\mathcal{T}$  est un tore sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Il en résulte que pour tout  $n > 0$  le groupe  $\mathbb{P}^0(T)/n$  s'identifie à  $\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^0(K_v, T)/n$ . En utilisant alors le lemme 4.9, on obtient :

$$\mathbb{P}^0(T)/n \cong ({}_n\mathbb{P}^0(\tilde{T}))^D.$$

Il suffit alors de passer à la limite projective sur  $n$ .  $\square$

**Théorème 4.13.** *On a une suite exacte (de type Poitou-Tate) :*

$$0 \rightarrow \text{III}^1(K, \tilde{T})^D \rightarrow H^0(K, T)_{\wedge} \rightarrow \mathbb{P}^0(T)_{\wedge} \rightarrow H^0(K, \tilde{T})^D \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* D'après le lemme 4.11, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(K, \tilde{T}) \rightarrow \mathbb{P}^0(\tilde{T})_{\text{tors}} \rightarrow (H^0(K, T)_{\wedge})^D \rightarrow \text{III}^1(K, \tilde{T}) \rightarrow 0$$

telle que :

- l'image du morphisme  $H^0(K, \tilde{T}) \rightarrow \mathbb{P}^0(\tilde{T})_{\text{tors}}$  est discrète car  $H^0(K, \tilde{T})$  est de torsion de type cofini ;
- le groupe  $\text{III}^1(K, \tilde{T})$  est discret ;
- le groupe localement compact  $\mathbb{P}^0(\tilde{T})_{\text{tors}}$  est réunion dénombrable d'espaces compacts. Le groupe  $H^0(K, T)_{\wedge}$  est limite projective de groupes discrets de torsion, donc le groupe  $(H^0(K, T)_{\wedge})^D$  est localement compact (limite inductive de groupes profinis) et son dual est  $H^0(K, T)_{\wedge}$  ;
- l'image du morphisme  $\mathbb{P}^0(\tilde{T})_{\text{tors}} \rightarrow (H^0(K, T)_{\wedge})^D$  est fermée : ce morphisme est donc strict ([10], Th. 5.29).

On en déduit (en utilisant [8], Lemme 2.4) que la suite duale :

$$0 \rightarrow \text{III}^1(K, \tilde{T})^D \rightarrow H^0(K, T)_{\wedge} \rightarrow \mathbb{P}^0(T)_{\wedge} \rightarrow H^0(K, \tilde{T})^D \rightarrow 0$$

est exacte.  $\square$

**Remarque 4.14.** La flèche  $\mathbb{P}^0(T)_\wedge \rightarrow H^0(K, \tilde{T})^D$  est ici induite par une flèche “de réciprocité”  $r : \mathbb{P}^0(T) \rightarrow H^0(K, \tilde{T})^D$  (dont le noyau contient l’image de  $H^0(K, T)$ ), l’accouplement correspondant

$$\mathbb{P}^0(T) \times H^0(K, \tilde{T}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (11)$$

étant défini pour tout  $(t_v) \in \mathbb{P}^0(T)$  et tout  $\tilde{t} \in H^0(K, \tilde{T})$  par la formule

$$((t_v), \tilde{t}) = \sum_{v \in X^{(1)}} (t_v, \tilde{t}_v)_v,$$

où  $(\cdot)_v$  est l’accouplement local en  $v$  et  $\tilde{t}_v$  est l’image de  $\tilde{t}$  dans  $H^0(K_v, \tilde{T})$ .

**Théorème 4.15.** Soit  $\rho = \text{rg}(H^0(K, \hat{T}))$ . Rappelons que  $A(\emptyset, T)$  désigne le groupe  $\mathbb{P}^0(T)/T(K)$ .

- (i) On a un isomorphisme naturel  $\overline{A(\emptyset, T)}_{\text{tors}} \cong H^1(K, \hat{T})^D$ .
- (ii) On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \overline{A(\emptyset, T)} \rightarrow H^0(K, \tilde{T})^D \rightarrow (\hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z})^\rho \rightarrow 0,$$

telle que l’image  $I$  du morphisme  $r : A(\emptyset, T) \rightarrow H^0(K, \tilde{T})^D$  soit dense et vérifie  $I \otimes \hat{\mathbb{Z}} \cong H^0(K, \tilde{T})^D$ .

En particulier, ce théorème dit que le noyau de la flèche de réciprocité est divisible modulo  $T(K)$ , et il décrit son conoyau.

*Démonstration.* • D’après le lemme 2.7 b), le noyau de  $r : A(\emptyset, T) \rightarrow H^0(K, \tilde{T})^D$  est  $A(\emptyset, T)_{\infty\text{-div}}$  puisqu’on a la suite exacte :

$$H^0(K, T)_\wedge \rightarrow \mathbb{P}^0(T)_\wedge \rightarrow H^0(K, \tilde{T})^D.$$

Il coïncide avec le sous-groupe divisible maximal de  $A(\emptyset, T)$  car  $\overline{A(\emptyset, T)}$  est de type fini. Cela montre l’injectivité de  $\overline{A(\emptyset, T)} \rightarrow H^0(K, \tilde{T})^D$ . De plus, l’image de  $\overline{A(\emptyset, T)}$  dans le groupe profini  $H^0(K, \tilde{T})^D$  est dense d’après le lemme 2.7 a) et le théorème 4.13.

- Par ailleurs, on a une suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow H^0(K, \hat{T}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow H^0(K, \tilde{T}) \rightarrow H^1(K, \hat{T}) \rightarrow 0$$

où  $H^1(K, \hat{T})$  est fini et où  $H^0(K, \hat{T}) \cong \mathbb{Z}^\rho$ . On en déduit que  $H^0(K, \tilde{T})^D$  est isomorphe à  $\hat{\mathbb{Z}}^\rho \oplus H^1(K, \hat{T})^D$  avec  $H^1(K, \hat{T})^D$  fini. Toutes les assertions restantes du théorème découlent alors du lemme qui suit, puisque l’image de  $A(\emptyset, T) \rightarrow H^0(K, \tilde{T})^D$  est un groupe abélien de type fini de rang  $\rho$  qui est dense dans  $H^0(K, \tilde{T})^D$ .

**Lemme 4.16.** Soit  $G$  un groupe topologique de la forme  $\hat{\mathbb{Z}}^\rho \oplus F$  pour un certain entier naturel  $\rho$  et un certain groupe abélien fini  $F$ . Soit  $H$  un sous-groupe dense de  $G$ . Supposons que  $H$  est de type fini et de rang  $\rho$ . Alors :

- (i) le groupe  $H$  contient  $F$ ,
- (ii) on a l’égalité  $H \otimes \hat{\mathbb{Z}} = G$ ,
- (iii) on a un isomorphisme  $G/H \cong (\hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z})^\rho$ .



On peut supposer que  $H$  est sans torsion, quitte à remplacer  $G$  et  $H$  par leur quotient par  $H_{\text{tors}}$ . Soit  $(e_1, \dots, e_\rho)$  une  $\mathbb{Z}$ -base de  $H$ . Soit  $p$  un nombre premier. L'image de  $H$  dans  $\mathbb{Z}_p^\rho \oplus F\{p\}$  doit être dense. Par conséquent, l'image de  $(e_1, \dots, e_\rho)$  doit être  $\mathbb{Z}_p$ -libre (sinon elle engendrerait un sous-groupe de rang  $< \rho$  dans  $G$ ), d'où on déduit que  $F\{p\} = 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $p$ , on obtient que  $F = 0$ , ce qui prouve (i). Alors, l'image de  $(e_1, \dots, e_\rho)$  dans  $\mathbb{Z}_p^\rho$  doit être une  $\mathbb{Z}_p$ -base de  $\mathbb{Z}_p^\rho$  quel que soit  $p$ , d'où on voit que  $(e_1, \dots, e_\rho)$  est une  $\hat{\mathbb{Z}}$ -base de  $G = \hat{\mathbb{Z}}^\rho$ , ce qui prouve (ii) et (iii).  $\square$

**Corollaire 4.17.** *On a une suite exacte :*

$$0 \rightarrow H^1(K, \hat{T})^D \rightarrow \overline{A(\emptyset, T)} \rightarrow \mathbb{Z}^\rho \rightarrow 0,$$

dans laquelle le groupe  $H^1(K, \hat{T})$  est fini. En particulier, le groupe  $A(\emptyset, T)$  est divisible si, et seulement si,  $T$  est anisotrope et  $H^1(K, \hat{T}) = 0$ .

**Remarque 4.18.** Le groupe  $H^0(K, \tilde{T})$  peut également être interprété de la manière suivante. Posons  $\bar{T} = T \times_K \bar{K}$ . Comme  $\text{Pic } \bar{T} = 0$ , le module galoisien  $H^1(\bar{T}, \mu_n)$  est isomorphe à  $\bar{K}[T]^*/\bar{K}[T]^{*n} \cong \hat{T}/n$ , et le module galoisien  $H^1(\bar{T}, \mathbb{Z}/n) \cong \hat{T} \otimes \mathbb{Z}/n(-1)$  s'identifie alors à  ${}_n\tilde{T}$ . La suite spectrale de Hochschild-Serre jointe au fait que  $K$  est de dimension cohomologique 1 permet alors d'identifier  $H^1(T, \mathbb{Z}/n)/H^1(K, \mathbb{Z}/n)$  avec  $H^0(K, H^1(\bar{T}, \mathbb{Z}/n)) \cong_n H^0(K, \tilde{T})$ . On peut alors voir l'obstruction pour un point adélique  $(P_v)_{v \in X^{(1)}}$  à provenir d'un point rationnel comme une obstruction de réciprocité, analogue à la classique obstruction de Brauer-Manin sur les corps de nombres : le point  $(P_v)$  est dans l'image de  $T(K)$  modulo divisible si et seulement si on a

$$\sum_{v \in X^{(1)}} \alpha(P_v) = 0$$

pour tout  $\alpha \in H^1(T, \mathbb{Z}/n)$ , où  $\alpha(P_v) \in H^1(K_v, \mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/n$ .

#### 4.4 Le sous-groupe de torsion de $A(\emptyset, T)$

Le but de ce paragraphe est de décrire plus précisément la partie de torsion de  $A(\emptyset, T)_{\text{div}}$ , ce qui déterminera complètement la structure de  $A(\emptyset, T)$  à un sous-groupe uniquement divisible près.

Plus précisément, nous allons maintenant construire un accouplement naturel :

$$A(\emptyset, T)_{\text{tors}} \times \varprojlim_n H^1(K, {}_n\tilde{T}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (12)$$

Pour ce faire, nous commençons par introduire quelques notations et rappels :

**Notation 4.19.** Soit  $U_0$  un ouvert non vide *strict* de  $X$  tel que  $T$  s'étende en un tore  $\mathcal{T}$  sur  $U_0$ . Pour chaque ouvert non vide  $U$  de  $U_0$ , on note  $j_U : U \hookrightarrow X$  l'immersion ouverte et on définit la cohomologie à support compact de  $\mathcal{T}$  par  $H_c^i(U, \mathcal{T}) := H^i(X, (j_U)_! \mathcal{T})$ . Si on note  $K_v^h$  l'hensélisé de  $K$  par rapport à  $v$  pour chaque  $v \in X^{(1)}$ , on rappelle la suite exacte ([9], Prop. 3.1) :

$$\dots \rightarrow H_c^r(U, \mathcal{T}) \rightarrow H^i(U, \mathcal{T}) \rightarrow \bigoplus_{v \in X \setminus U} H^i(K_v^h, T) \rightarrow \dots \quad (13)$$

Lorsque  $V$  est un ouvert non vide de  $U$ , on a un diagramme commutatif ([7], Prop. 4.3) :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{v \in X \setminus U} H^i(K_v^h, T) & \longrightarrow & H_c^{i+1}(U, \mathcal{T}) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \bigoplus_{v \in X \setminus V} H^i(K_v^h, T) & \longrightarrow & H_c^{i+1}(V, \mathcal{T}), \end{array} \quad (14)$$

où la flèche verticale de gauche est donnée par  $(x_v)_{v \in X \setminus U} \mapsto ((x_v), 0, \dots, 0)$ .

Donnons-nous maintenant un ouvert  $U$  non vide de  $U_0$ . Soient  $v \in X^{(1)}$  et  $V = U \setminus \{v\}$ . On peut alors définir un morphisme  $T(K_v^h) \rightarrow H_c^1(U, \mathcal{T})$  par composition :

$$f_v : T(K_v^h) \rightarrow H_c^1(V, \mathcal{T}) \rightarrow H_c^1(U, \mathcal{T}).$$

Ici, le morphisme  $T(K_v^h) \rightarrow H_c^1(V, \mathcal{T})$  vient de la suite (13) et donc de l'identification :

$$T(K_v^h) \cong H_v^1(\mathcal{O}_v^h, j_{V!}\mathcal{T}) \cong H_v^1(X, j_{V!}\mathcal{T})$$

et du morphisme naturel  $H_v^1(X, j_{V!}\mathcal{T}) \rightarrow H_c^1(V, \mathcal{T})$ .

Supposons maintenant que  $v \in U^{(1)}$ . Dans ce cas, on a  $H^0(\mathcal{O}_v^h, j_{U!}\mathcal{T}) = \mathcal{T}(\mathcal{O}_v^h)$  et  $H^0(K_v^h, j_{U!}\mathcal{T}) = T(K_v^h)$ . De plus, on a  $H_v^1(X, j_{U!}\mathcal{T}) = H_v^1(\mathcal{O}_v^h, j_{U!}\mathcal{T})$  par excision. La suite de localisation pour l'immersion ouverte  $\text{Spec } K_v^h \hookrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v^h$  donne alors une suite exacte

$$\mathcal{T}(\mathcal{O}_v^h) \rightarrow T(K_v^h) \rightarrow H_v^1(X, j_{U!}\mathcal{T}),$$

d'où on tire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} T(K_v^h) & \xrightarrow{\cong} & H_v^1(X, j_{V!}\mathcal{T}) & \longrightarrow & H_c^1(V, \mathcal{T}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T(K_v^h)/\mathcal{T}(\mathcal{O}_v^h) & \hookrightarrow & H_v^1(X, j_{U!}\mathcal{T}) & \longrightarrow & H_c^1(U, \mathcal{T}). \end{array}$$

On en déduit que  $f_v(\mathcal{T}(\mathcal{O}_v^h)) = 0$ .

En sommant tous les  $f_v$ , on définit donc un morphisme :

$$\prod'_{v \in X^{(1)}} T(K_v^h) \rightarrow H_c^1(U, \mathcal{T}).$$

La commutativité du diagramme (14) permet alors de passer à la limite projective sur  $U$  pour obtenir un morphisme :

$$\prod'_{v \in X^{(1)}} T(K_v^h) \rightarrow \varprojlim_U H_c^1(U, \mathcal{T}).$$

Remarquons que, si  $x$  est un élément de  $T(K) \subseteq \prod'_{v \in X^{(1)}} T(K_v^h)$ , il appartient à  $\mathcal{T}(U)$  pour un certain ouvert non vide  $U$  de  $U_0$ . On déduit alors de la suite (13) que son

image dans  $H_c^1(V, \mathcal{T})$  est nulle pour chaque ouvert non vide  $V$  de  $U$ . On obtient donc un morphisme :

$$\frac{\prod'_{v \in X^{(1)}} T(K_v^h)}{T(K)} \rightarrow \varprojlim_U H_c^1(U, \mathcal{T}),$$

d'où finalement un morphisme :

$$\left( \frac{\prod'_{v \in X^{(1)}} T(K_v^h)}{T(K)} \right)_{\text{tors}} \rightarrow \varinjlim_n \varprojlim_U {}_n H_c^1(U, \mathcal{T}) \cong \varinjlim_n \varprojlim_U H_c^1(U, {}_n \mathcal{T})$$

via l'identification  ${}_n H_c^1(U, \mathcal{T}) \cong H_c^1(U, {}_n \mathcal{T})$  (le groupe  $H_c^0(U, \mathcal{T}) = \ker[\mathcal{T}(U) \rightarrow \bigoplus_{v \notin U} T(K_v)]$  est nul car  $U \neq X$ ).

**Lemme 4.20.** *On a l'égalité :*

$$\left( \frac{\prod'_{v \in X^{(1)}} T(K_v^h)}{T(K)} \right)_{\text{tors}} = A(\emptyset, T)_{\text{tors}}.$$

*Démonstration.* On a une inclusion évidente  $\left( \frac{\prod'_{v \in X^{(1)}} T(K_v^h)}{T(K)} \right)_{\text{tors}} \subseteq A(\emptyset, T)_{\text{tors}}$ . Soit donc  $(x_v)_{v \in X^{(1)}} \in A(\emptyset, T)_{\text{tors}}$ . Soit  $(\tilde{x}_v)$  un relèvement de  $(x_v)$  à  $\mathbb{P}^0(T)$ . Soient  $n \geq 1$  et  $x \in T(K)$  tels que  $n\tilde{x}_v = x$  pour chaque  $v \in X^{(1)}$ . Comme  $K_v^h$  est algébriquement clos dans  $K_v$ , on en déduit que  $\tilde{x}_v \in T(K_v^h)$  pour chaque  $v$ . Autrement dit,  $(x_v) \in \left( \frac{\prod'_{v \in X^{(1)}} T(K_v^h)}{T(K)} \right)_{\text{tors}}$ .  $\square$

On obtient donc un morphisme :

$$A(\emptyset, T)_{\text{tors}} \rightarrow \varinjlim_n \varprojlim_U {}_n H_c^1(U, \mathcal{T}) \cong \varinjlim_n \varprojlim_U H_c^1(U, {}_n \mathcal{T}).$$

Pour chaque  $n > 0$ , munissons  ${}_n A(\emptyset, T)$  (resp.  ${}_n \mathbb{P}^0(T)$ ) de la topologie induite par  $A(\emptyset, T)$  (resp.  $\mathbb{P}^0(T)$ ) et  $H^1(K, {}_n \tilde{T})$  de la topologie discrète. Munissons ensuite le groupe  $A(\emptyset, T)_{\text{tors}} = \varinjlim_n {}_n A(\emptyset, T)$  (resp.  $\mathbb{P}^0(T)_{\text{tors}} = \varinjlim_n {}_n \mathbb{P}^0(T)$ ) de la topologie limite inductive et  $\varprojlim_n H^1(K, {}_n \tilde{T})$  de la topologie limite projective. En exploitant la dualité de Poincaré, on a un isomorphisme :

$$\left( \varinjlim_n \varprojlim_U H_c^1(U, {}_n \mathcal{T}) \right)^D \cong \varprojlim_n \varinjlim_U H^1(U, {}_n \tilde{T}) \cong \varprojlim_n H^1(K, {}_n \tilde{T})$$

puisque  ${}_n \tilde{T} \cong \tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)$ , d'où l'accouplement de groupes topologiques (12).

**Lemme 4.21.** *On a une suite exacte :*

$$0 \rightarrow \frac{\mathbb{P}^0(T)_{\text{tors}}}{T(K)_{\text{tors}}} \rightarrow A(\emptyset, T)_{\text{tors}} \rightarrow \varinjlim_n \text{III}^1(K, {}_n T) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Pour  $n \geq 1$ , soit :

$$h_n : {}_n A(\emptyset, T) \rightarrow \text{Ker} \left( T(K)/n \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)/n \right)$$

qui à une famille  $(x_v) \in \mathbb{P}^0(T)$  telle qu'il existe  $x \in T(K)$  vérifiant  $nx_v = x$  pour tout  $v$  associe  $x$ . Le morphisme  $h_n$  est surjectif et son noyau est  $\frac{n\mathbb{P}^0(T)}{nT(K)}$ . On obtient donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow \frac{n\mathbb{P}^0(T)}{nT(K)} \rightarrow {}_nA(\emptyset, T) \rightarrow \text{Ker} \left( T(K)/n \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)/n \right) \rightarrow 0.$$

Via les identifications  $T(K)/n \cong H^1(K, {}_nT)$  et  $T(K_v)/n \cong H^1(K_v, {}_nT)$  obtenues grâce à la suite de Kummer  $0 \rightarrow {}_nT \rightarrow T \rightarrow T \rightarrow 0$  et à l'annulation de  $H^1(K, T)$  et de  $H^1(K_v, T)$  (qui viennent de ce que  $K$  et  $K_v$  sont de dimension cohomologique 1), on a un isomorphisme  $\text{Ker} (T(K)/n \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)/n) \cong \text{III}^1(K, {}_nT)$ , d'où la suite exacte :

$$0 \rightarrow \frac{n\mathbb{P}^0(T)}{nT(K)} \rightarrow {}_nA(\emptyset, T) \rightarrow \text{III}^1(K, {}_nT) \rightarrow 0.$$

En passant à la limite inductive sur  $n$ , on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \varinjlim_n \frac{n\mathbb{P}^0(T)}{nT(K)} \rightarrow A(\emptyset, T)_{\text{tors}} \rightarrow \varinjlim_n \text{III}^1(K, {}_nT) \rightarrow 0.$$

Il suffit alors d'identifier les groupes  $\varinjlim_n \frac{n\mathbb{P}^0(T)}{nT(K)}$  et  $\frac{\mathbb{P}^0(T)_{\text{tors}}}{T(K)_{\text{tors}}}$ , ce qui vient à nouveau de l'exactitude de la limite inductive.  $\square$

**Lemme 4.22.** *On a des accouplements parfaits de groupes topologiques :*

$$\frac{\mathbb{P}^0(T)_{\text{tors}}}{T(K)_{\text{tors}}} \times \frac{\varprojlim_n H^1(K, {}_n\tilde{T})}{\varprojlim_n \text{III}^1(K, {}_n\tilde{T})} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad (15)$$

$$\varinjlim_n \text{III}^1(K, {}_nT) \times \varprojlim_n \text{III}^1(K, {}_n\tilde{T}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (16)$$

*Démonstration.* Pour chaque  $n \geq 1$ , on écrit la suite de Poitou-Tate ([11], Th. 2.7 dans le cas  $d = -1$ ) :

$$0 \rightarrow \text{III}^1(K, {}_n\tilde{T}) \rightarrow H^1(K, {}_n\tilde{T}) \rightarrow \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, {}_n\tilde{T}) \rightarrow {}_nT(K)^D \rightarrow 0.$$

On déduit un isomorphisme :

$$\frac{H^1(K, {}_n\tilde{T})}{\text{III}^1(K, {}_n\tilde{T})} \cong \text{Ker} \left( \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, {}_n\tilde{T}) \rightarrow {}_nT(K)^D \right).$$

Via l'identification  $\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, {}_n\tilde{T}) \cong (\prod_{v \in X^{(1)}} H^0(K_v, {}_nT))^D \cong ({}_n\mathbb{P}^0(T))^D$ , on obtient un isomorphisme :

$$\frac{H^1(K, {}_n\tilde{T})}{\text{III}^1(K, {}_n\tilde{T})} \cong \left( \frac{{}_n\mathbb{P}^0(T)}{{}_nT(K)} \right)^D.$$

En passant à la limite projective, on a :

$$\varprojlim_n \frac{H^1(K, {}_n\tilde{T})}{\text{III}^1(K, {}_n\tilde{T})} \cong \left( \frac{\mathbb{P}^0(T)_{\text{tors}}}{T(K)_{\text{tors}}} \right)^D.$$

Comme  $\text{III}^1(K, {}_n\tilde{T})$  est fini pour tout  $n$ , on a un isomorphisme :

$$\varprojlim_n \frac{H^1(K, {}_n\tilde{T})}{\text{III}^1(K, {}_n\tilde{T})} \cong \frac{\varprojlim_n H^1(K, {}_n\tilde{T})}{\varprojlim_n \text{III}^1(K, {}_n\tilde{T})}.$$

On obtient donc un accouplement parfait :

$$\frac{\mathbb{P}^0(T)_{\text{tors}}}{T(K)_{\text{tors}}} \times \frac{\varprojlim_n H^1(K, {}_n\tilde{T})}{\varprojlim_n \text{III}^1(K, {}_n\tilde{T})} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Pour obtenir l'accouplement (16), il suffit de passer à la limite sur les accouplements parfaits de groupes finis :

$$\text{III}^1(K, {}_nT) \times \text{III}^1(K, {}_n\tilde{T}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

**Théorème 4.23.** *L'accouplement (12) est un accouplement parfait entre une limite inductive de groupes profinis et une limite projective de groupes discrets de torsion.*

*Démonstration.* On a un diagramme commutatif à colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\mathbb{P}^0(T)_{\text{tors}}}{T(K)_{\text{tors}}} & \xrightarrow{\cong} & \left( \frac{\varprojlim_n H^1(K, {}_n\tilde{T})}{\varprojlim_n \text{III}^1(K, {}_n\tilde{T})} \right)^D \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(\emptyset, T)_{\text{tors}} & \longrightarrow & \left( \varprojlim_n H^1(K, {}_n\tilde{T}) \right)^D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim_n \text{III}^1(K, {}_nT) & \xrightarrow{\cong} & \left( \varprojlim_n \text{III}^1(K, {}_n\tilde{T}) \right)^D \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Le lemme des cinq permet donc de conclure. □

**Corollaire 4.24.** *On a un accouplement naturel parfait entre une limite inductive de groupes profinis et une limite projective de groupes discrets de torsion :*

$$A(\emptyset, T)_{\text{div, tors}} \times \varprojlim_n H^2(K, \hat{T}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \varprojlim_n H^0(K, \tilde{T})/n \rightarrow \varprojlim_n H^1(K, {}_n\tilde{T}) \rightarrow \varprojlim_n H^1(K, \tilde{T}) \rightarrow 0.$$

Or  $H^0(K, \tilde{T})/n$  s'identifie à  $H^1(K, \hat{T})/n$  et  $H^1(K, \hat{T})$  est d'exposant fini. On obtient donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(K, \hat{T}) \rightarrow \varprojlim_n H^1(K, {}_n\tilde{T}) \rightarrow \varprojlim_n H^1(K, \tilde{T}) \rightarrow 0,$$

où  $\varprojlim_n H^1(K, \tilde{T})$  est sans torsion. On déduit alors le résultat du théorème 4.23 et de l'isomorphisme  $H^1(K, \tilde{T}) \cong H^2(K, \hat{T})$ . □

**Remarque 4.25.** Dans le cas  $K = \mathbb{G}_m$ , on obtient un accouplement parfait :

$$A(\emptyset, \mathbb{G}_m)_{\text{div, tors}} \times \text{Hom}_c(\text{Gal}(\overline{K}/K), \hat{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

**Conclusion 4.26.** Le groupe  $A(\emptyset, T)$  est somme directe d'un groupe uniquement divisible  $D$  et d'un groupe  $B(T)$  tel que :

$$B(T)_{\text{div}} \cong \left( \varprojlim_n H^2(K, \hat{T}) \right)^D, \\ \overline{B(T)}_{\text{tors}} \cong H^1(K, \hat{T})^D, \quad \overline{B(T)}/\overline{B(T)}_{\text{tors}} \cong \mathbb{Z}^{\text{rg}(H^0(k, \hat{T}))}.$$

## 5. Cas $k = \mathbb{C}((t))$

Dans cette section, on suppose que  $K$  est le corps des fonctions d'une courbe projective lisse  $X$  sur le corps  $k = \mathbb{C}((t))$ . La théorie du corps de classes pour  $K$  (cf. [16], section I, appendice A) présente des similitudes avec celle d'un corps de fonctions sur un corps fini, mais également des différences (en particulier le théorème de Brauer-Hasse-Noether et le théorème de Čebotarev ne valent en général pas). Ceci va se retrouver dans la description de l'espace adélique d'un  $K$ -tore.

**Proposition 5.1.** *Soit  $C_K := A(\emptyset, \mathbf{G}_m) = (\prod'_{v \in X^{(1)}} K_v^*) / K^*$ . Alors il existe un sous-groupe divisible  $U^0$  de  $C_K$  tel que  $(C_K/U^0)_{\text{tors}}$  soit de torsion de type cofini.*

*Démonstration.* Pour chaque  $v \in X^{(1)}$ , soit  $U_v^0$  le sous-groupe de  $\mathcal{O}_v^*$  constitué des éléments dont la réduction dans le corps résiduel  $k(v)$  est de valuation nulle. Soit  $U^0$  l'image de  $\prod_{v \in X^{(1)}} U_v^0$  dans  $C_K$ . Posons  $C_K^0 = C_K/U^0$ . Le groupe  $U^0$  est divisible. Montrons que  $(C_K/U^0)_{\text{tors}}$  est de torsion de type cofini.

Soit  $k(v)$  le corps résiduel de  $v$  et  $\text{val}_{k(v)}$  sa valuation (ici  $k(v)$  est vu comme un corps complet pour une valuation discrète, via le fait que c'est une extension finie de  $\mathbb{C}((t))$ ). Le groupe  $C_K^0$  s'insère dans une suite exacte, qu'on obtient comme la suite (5) :

$$0 \rightarrow \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \cdot (e_v)} \rightarrow C_K^0 \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow 0, \quad (17)$$

où l'élément  $(e_v) \in \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \mathbb{Z} \subset \prod_{v \in X^{(1)}} \mathbb{Z}$  est obtenu en posant  $e_v = \text{val}_{k(v)}(t)$ . En passant aux sous-groupes de torsion, on obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow F \rightarrow (C_K^0)_{\text{tors}} \rightarrow (\text{Pic } X)_{\text{tors}}. \quad (18)$$

dans laquelle le groupe  $F$  est fini. De plus,  $(\text{Pic } X)_{\text{tors}} = J(k)_{\text{tors}}$ , où  $J$  est la jacobienne de  $X$ . Mais  $J(\bar{k})_{\text{tors}}$  est déjà de type cofini car pour  $n > 0$ , le sous-groupe de  $n$ -torsion d'une variété abélienne de dimension  $g$  sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ . Ainsi,  $(C_K^0)_{\text{tors}}$  est aussi de type cofini. □

**Proposition 5.2.** *Soit  $T$  un  $K$ -tore. Alors  $A(\emptyset, T)_{\infty\text{-div}} = A(\emptyset, T)_{\text{div}}$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme d'Ono, il existe un entier  $m > 0$  et une suite exacte :

$$0 \rightarrow F \rightarrow R_0 \rightarrow T^m \times R_1 \rightarrow 0$$

tels que  $F$  est un groupe abélien fini étale et  $R_0$  et  $R_1$  sont des tores quasi-triviaux. On obtient alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F(K) & \longrightarrow & R_0(K) & \longrightarrow & T(K)^m \times R_1(K) & \longrightarrow & H^1(K, F) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \prod_{v \in X^{(1)}} F(K_v) & \longrightarrow & \prod'_{v \in X^{(1)}} R_0(K_v) & \longrightarrow & \prod'_{v \in X^{(1)}} (T(K_v)^m \times R_1(K_v)) & \longrightarrow & \prod'_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, F) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Une chasse au diagramme permet de montrer qu'on a alors une suite exacte :

$$0 \rightarrow N \rightarrow A(\emptyset, R_0) \rightarrow A(\emptyset, T)^m \times A(\emptyset, R_1) \rightarrow \left( \prod'_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, F) \right) / H^1(K, F) \rightarrow 0.$$

avec  $N$  un groupe abélien d'exposant fini. D'après le lemme 2.2, il suffit de démontrer que  $(A(\emptyset, R_0)/N)_{\infty\text{-div}} = (A(\emptyset, R_0)/N)_{\text{div}}$ .

D'après la proposition 5.1, il existe un sous-groupe divisible  $D$  de  $A(\emptyset, R_0)$  tel que  $(A(\emptyset, R_0)/D)_{\text{tors}}$  est de torsion de type cofini. Comme  $N$  est de torsion, on déduit que  $((A(\emptyset, R_0)/N)/(D/(D \cap N)))_{\text{tors}}$  est aussi de torsion de type cofini. Comme  $D/(D \cap N)$  est divisible, en appliquant le lemme 2.6, on en déduit que  $(A(\emptyset, R_0)/N)_{\infty\text{-div}} = (A(\emptyset, R_0)/N)_{\text{div}}$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Soit  $T$  un  $K$ -tore. Rappelons que pour tout  $v \in X^{(1)}$ , on a une dualité locale entre  $H^0(K_v, T)_{\wedge}$  et  $H^2(K_v, \hat{T})$  ([7], Prop. 3.4), d'où là encore une flèche de réciprocity (induite par un accouplement défini de manière similaire à (11))  $r : \mathbb{P}^0(T) \rightarrow H^2(K, \hat{T})^D$ . Le théorème suivant dit que le noyau de  $r$  est divisible modulo  $T(K)$  et décrit l'adhérence de son image.

**Théorème 5.3.** *La flèche  $r$  induit un morphisme injectif  $\overline{A(\emptyset, T)} \rightarrow H^2(K, \hat{T})^D$ , dont l'adhérence de l'image  $I_{\text{adh}}$  s'insère dans une suite exacte*

$$0 \rightarrow I_{\text{adh}} \rightarrow H^2(K, \hat{T})^D \rightarrow \text{III}^2(K, \hat{T})^D \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* D'après [11], Th. 3.20, on a une suite exacte

$$H^0(K, T)_{\wedge} \rightarrow \mathbb{P}^0(T)_{\wedge} \rightarrow C \rightarrow 0, \quad (19)$$

où  $C$  est le groupe profini défini par  $C := \ker[H^2(K, \hat{T})^D \rightarrow \text{III}^2(K, \hat{T})^D]$ . On remarquera que l'énoncé de [11], Th. 3.20 exige comme hypothèse l'existence d'une extension finie  $L$  de  $K$  déployant  $T$  telle que  $\text{III}^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$ . Mais sa preuve montre que cette hypothèse n'est pas nécessaire pour avoir l'exactitude de (19). Le résultat découle alors du lemme 2.7 joint à la proposition 5.2.  $\square$

Concernant le sous-groupe de torsion de  $A(\emptyset, T)$ , on peut procéder de manière similaire à la section 4.4. On obtient le théorème suivant :

**Théorème 5.4.** *Il existe un accouplement parfait entre une limite inductive de groupes profinis et une limite projective de groupes discrets de torsion :*

$$A(\emptyset, T)_{\text{tors}} \times \frac{\varprojlim_n H^2(K, \hat{T}/n)}{\text{Im}(\overline{\text{III}^2(K, \hat{T})})} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (20)$$

Dans cet énoncé, le groupe  $\overline{\text{III}^2(K, \hat{T})}$  est fini (cf. [7], Th. 7.2).

*Démonstration.* La preuve suit les mêmes lignes que celle du théorème 4.23. On commence par construire un accouplement naturel :

$$A(\emptyset, T)_{\text{tors}} \times \varprojlim_n H^2(K, \hat{T}/n) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

tout à fait analogue à l'accouplement (12), à condition de remplacer la dualité de Poincaré entre  $H_c^1(U, {}_n\mathcal{T})$  et  $H^1(U, {}_n\hat{\mathcal{T}})$  par la dualité d'Artin-Verdier ([7], Proposition 5.1) entre  $H_c^1(U, {}_n\mathcal{T})$  et  $H^2(U, \hat{T}/n)$ . Il faut ensuite remarquer que, dans la preuve du lemme 4.21, le groupe  $\text{Ker}(T(K)/n \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)/n)$  ne s'identifie plus à  $\text{III}^1(K, {}_nT)$ , mais à  $\text{Ker}(\text{III}^1(K, {}_nT) \rightarrow {}_n\text{III}^1(K, T))$ . Ainsi, la suite exacte du lemme 4.21 doit être remplacée par une suite exacte :

$$0 \rightarrow \frac{\mathbb{P}^0(T)_{\text{tors}}}{T(K)_{\text{tors}}} \rightarrow A(\emptyset, T)_{\text{tors}} \rightarrow \text{Ker} \left( \varinjlim_n \text{III}^1(K, {}_nT) \rightarrow \text{III}^1(K, T) \right) \rightarrow 0.$$

Par conséquent, les accouplements du lemme 4.22 doivent être remplacés par des accouplements parfaits :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{P}^0(T)_{\text{tors}}}{T(K)_{\text{tors}}} \times \frac{\varprojlim_n H^2(K, \hat{T}/n)}{\varprojlim_n \text{III}^2(K, \hat{T}/n)} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ & \text{Ker} \left( \varinjlim_n \text{III}^1(K, {}_nT) \rightarrow \text{III}^1(K, T) \right) \times \frac{\varprojlim_n \text{III}^2(K, \hat{T}/n)}{\text{Im}(\overline{\text{III}^2(K, \hat{T})})} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On termine la preuve en utilisant le lemme des cinq comme dans la démonstration du théorème 4.23.  $\square$

**Corollaire 5.5.** *On a un accouplement parfait entre une limite inductive de groupes profinis et une limite projective de groupes discrets de torsion :*

$$A(\emptyset, T)_{\text{div, tors}} \times \varprojlim_n H^3(K, \hat{T}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et le groupe  $\overline{A(\emptyset, T)_{\text{tors}}}$  est d'exposant fini.

*Démonstration.* On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \varprojlim_n H^2(K, \hat{T})/n \rightarrow \varprojlim_n H^2(K, \hat{T}/n) \rightarrow \varprojlim_n H^3(K, \hat{T}) \rightarrow 0$$

(le passage à la limite projective ne pose pas de problèmes car les flèches de transition dans le terme de gauche sont surjectives). Si  $L$  est une extension finie déployant  $T$ ,



le groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{L}/L)$  n'a pas de torsion d'après le théorème d'Artin-Schreier car  $L$  contient  $\sqrt{-1}$ . Par conséquent, le groupe  $H^2(L, \mathbb{Z})$  est divisible. Un argument de restriction-corestriction implique donc que  $\varprojlim_n H^2(K, \hat{T})/n$  est d'exposant fini. De plus, le groupe  $\varprojlim_n H^3(K, \hat{T})$  est sans torsion. Le corollaire découle donc immédiatement du théorème 5.4 et du fait que l'image de  $H^2(K, \hat{T})$  (donc a fortiori aussi celle de  $\text{III}^2(K, \hat{T})$ ) dans  $\varprojlim_n H^2(K, \hat{T}/n)$  est contenue dans  $\varprojlim_n H^2(K, \hat{T})/n$ .  $\square$

## 6. Cas $k = \mathbb{Q}_p$

Supposons que  $k$  soit un corps  $p$ -adique. On va démontrer l'existence d'une suite exacte analogue à celles des théorèmes 4.15 et 5.3. La principale difficulté est ici de montrer que le sous-groupe  $A(\emptyset, T)_{\text{div}}$  coïncide avec  $A(\emptyset, T)_{\infty\text{-div}}$ , ce qui s'avère plus ardu que dans les cas traités précédemment. On commence comme d'habitude par le cas  $T = \mathbf{G}_m$ .

**Lemme 6.1.** *Soit  $D_K = (C_K)_{\infty\text{-div}}$  le sous-groupe des éléments divisibles de  $C_K := A(\emptyset, \mathbf{G}_m) = (\prod'_{v \in X^{(1)}} K_v^*) / K^*$ . On a alors une suite exacte :*

$$0 \rightarrow D_K \rightarrow C_K \rightarrow (\text{Br } K)^D.$$

*Démonstration.* Cela découle immédiatement de la suite exacte ([8], Th. 2.9. dans le cas  $T = \mathbf{G}_m$ )

$$0 \rightarrow (K^*)_{\wedge} \rightarrow \left( \prod'_{v \in X^{(1)}} K_v^* \right)_{\wedge} \rightarrow (\text{Br } K)^D$$

et du lemme 2.7, b).  $\square$

**Théorème 6.2.** *Pour  $v \in X^{(1)}$ , soient  $\mathfrak{m}_v$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_v$  et  $U_v^1$  le groupe  $1 + \mathfrak{m}_v$ . On a alors une suite exacte :*

$$0 \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} U_v^1 \rightarrow C_K \rightarrow (\text{Br } K)^D,$$

avec  $D_K = \prod_{v \in X^{(1)}} U_v^1$  uniquement divisible ; de plus  $D_K$  est le sous-groupe divisible maximal de  $C_K$ .

*Démonstration.* Nous avons des suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathcal{O}_v^*}{k^*} \rightarrow C_K \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow C' \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow E \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où  $C' \cong \mathbb{Z}_p^m \oplus \mathbb{Z}$  pour un certain  $m \geq 0$  et  $E$  est fini : en effet, si  $J$  est la jacobienne de  $X$ , on a  $\text{Pic}^0 X = J(k)$ , qui est de la forme  $\mathbb{Z}^m \oplus E$  avec  $E$  fini d'après [15].

Soit  $k(v)$  le corps résiduel de  $v \in X^{(1)}$ . D'après le lemme 2.3, le groupe  $D_K = (C_K)_{\infty\text{-div}}$  coïncide avec le sous-groupe  $\mathcal{D}_K$  des éléments divisibles de  $\frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathcal{O}_v^*}{k^*}$ . En exploitant l'isomorphisme  $\mathcal{O}_v^* \cong U_v^1 \times k(v)^*$ , on obtient un isomorphisme :

$$\frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathcal{O}_v^*}{k^*} \cong \prod_{v \in X^{(1)}} U_v^1 \times \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} k(v)^*}{k^*}.$$

Or le groupe  $\prod_{v \in X^{(1)}} U_v^1$  est uniquement divisible via [18], chapitre IV, Prop. 6 (jointe au fait que le corps résiduel  $k(v)$  de  $K_v$  est de caractéristique zéro). En utilisant le lemme 6.1, il nous suffit donc pour conclure de montrer la proposition suivante :

**Proposition 6.3.** *Posons  $B = \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} k(v)^*}{k^*}$ . Alors  $B_{\infty\text{-div}} = 0$ .*

Notons  $\mathcal{R}$  (resp.  $\mathcal{R}_v$ ) l'anneau des entiers de  $k$  (resp.  $k(v)$ ) et  $\mathfrak{n}$  (resp.  $\mathfrak{n}_v$ ) l'idéal maximal de  $\mathcal{R}$  (resp.  $\mathcal{R}_v$ ). On note aussi  $V^1$  (resp.  $V_v^1$ ) le groupe  $1 + \mathfrak{n}$  (resp.  $1 + \mathfrak{n}_v$ ), puis  $\mathbb{F}$  (resp.  $\mathbb{F}_v$ ) le corps résiduel de  $k$  (resp.  $k(v)$ ). En choisissant  $v_0 \in X^{(1)}$  et en notant  $e_{v_0}$  l'indice de ramification de l'extension  $k(v)/k$ , on a des suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathcal{R}_v^*}{\mathcal{R}^*} \rightarrow \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} k(v)^*}{k^*} \rightarrow \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)} \setminus \{v_0\}} \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{e_{v_0} \mathbb{Z}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En appliquant encore le lemme 2.3, on voit que le sous-groupe des éléments divisibles de  $B = \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} k(v)^*}{k^*}$  coïncide avec celui de  $\frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathcal{R}_v^*}{\mathcal{R}^*}$ . On a de plus une suite exacte :

$$0 \rightarrow \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} V_v^1}{V_1} \rightarrow \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathcal{R}_v^*}{\mathcal{R}^*} \rightarrow \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathbb{F}_v^*}{\mathbb{F}^*} \rightarrow 0, \quad (21)$$

qui est scindée par le relèvement de Teichmüller. En écrivant les suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)} \setminus \{v_0\}} V_v^1 \rightarrow \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} V_v^1}{V_1} \rightarrow \frac{V_{v_0}^1}{V_1} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)} \setminus \{v_0\}} \mathbb{F}_v^* \rightarrow \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathbb{F}_v^*}{\mathbb{F}^*} \rightarrow \frac{\mathbb{F}_{v_0}^*}{\mathbb{F}^*} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

et en remarquant que  $\prod_{v \in X^{(1)} \setminus \{v_0\}} V_v^1$  et  $\prod_{v \in X^{(1)} \setminus \{v_0\}} \mathbb{F}_v^*$  n'ont pas d'éléments infiniment divisibles non triviaux et que  $\frac{V_{v_0}^1}{V_1}$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module de type fini, le lemme 2.2 montre que  $\frac{\prod_{v \in X^{(1)}} V_v^1}{V_1}$  et  $\frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathbb{F}_v^*}{\mathbb{F}^*}$  n'ont pas d'éléments divisibles non triviaux. Comme la suite exacte (21) est scindée, on en déduit qu'il en va de même de  $\frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \mathcal{R}_v^*}{\mathcal{R}^*}$ , et donc que  $B_{\infty\text{-div}} = 0$  comme on voulait.  $\square$

**Corollaire 6.4.** *Si  $R$  est un  $K$ -tore quasi-trivial, alors  $A(\emptyset, R)_{\infty\text{-div}} = A(\emptyset, R)_{\text{div}}$ , et ce groupe est uniquement divisible.*

Soit maintenant  $T$  un  $K$ -tore quelconque. D'après le lemme d'Ono, il existe un entier  $m > 0$  et une suite exacte :

$$0 \rightarrow F \rightarrow R_0 \rightarrow T^m \times R_1 \rightarrow 0$$

tels que  $F$  est un  $K$ -groupe abélien fini, tandis que  $R_0$  et  $R_1$  sont des tores quasi-triviaux. On fixe une telle suite jusqu'à la fin de cette section.

**Proposition 6.5.** *Le sous-groupe divisible maximal de  $A(\emptyset, T)$  est uniquement divisible.*

*Démonstration.* On considère le diagramme commutatif à lignes exactes, et dont les trois premières flèches verticales sont injectives :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & F(K) & \longrightarrow & R_0(K) & \longrightarrow & T(K)^m \times R_1(K) & \longrightarrow & H^1(K, F) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \prod_{v \in X^{(1)}} F(K_v) & \longrightarrow & \prod'_{v \in X^{(1)}} R_0(K_v) & \longrightarrow & \prod'_{v \in X^{(1)}} (T(K_v)^m \times R_1(K_v)) & \longrightarrow & \prod'_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, F) & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{22}$$

Une chasse au diagramme permet de montrer qu'on a alors une suite exacte :

$$0 \rightarrow N \rightarrow A(\emptyset, R_0) \rightarrow A(\emptyset, T)^m \times A(\emptyset, R_1) \rightarrow \left( \prod'_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, F) \right) / H^1(K, F) \rightarrow 0. \tag{23}$$

avec  $N$  un groupe abélien d'exposant fini (tout comme le groupe de droite). La proposition découle alors du lemme 2.4 et du corollaire 6.4.  $\square$

**Théorème 6.6.** *Soit  $T$  un  $K$ -tore. Alors  $A(\emptyset, T)_{\infty\text{-div}} = A(\emptyset, T)_{\text{div}}$ . Ce groupe est uniquement divisible.*

*Démonstration.* Elle va consister en plusieurs réductions successives. Pour simplifier les notations, convenons qu'un groupe abélien  $A$  vérifie la propriété (DD) si  $A_{\infty\text{-div}} = A_{\text{div}}$ . Soit  $M$  l'image de  $\prod_{v \in X^{(1)}} F(K_v)$  dans  $A(\emptyset, R_0)$ .

**Étape 1 :** On va montrer qu'il suffit d'avoir la propriété (DD) pour le groupe  $A(\emptyset, R_0)/M$ . On utilise la suite exacte (23), où le groupe de droite est d'exposant fini. D'après le lemme 2.2 et le corollaire 6.4, il suffit de démontrer que  $A(\emptyset, R_0)/N$  a la propriété (DD).

Remarquons maintenant que via le diagramme (22), le groupe  $N$  s'insère dans une suite exacte :

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow \text{III}^1(K, F) \rightarrow 0.$$

On a alors une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{III}^1(K, F) \rightarrow A(\emptyset, R_0)/M \rightarrow A(\emptyset, R_0)/N \rightarrow 0.$$

D'après le lemme 2.5, comme le groupe  $\text{III}^1(K, F)$  est fini, il suffit bien de démontrer que  $A(\emptyset, R_0)/M$  a la propriété (DD).

Écrivons  $R_0 = \prod_{i=1}^m R_{L_i/K}(\mathbb{G}_m)$ . Pour chaque  $i$ , on se donne une courbe projective lisse géométriquement intègre  $X_i$  sur une extension finie  $k_i$  de  $k$ , telle que  $L_i = k_i(X_i)$ . L'extension  $L_i/K$  induit un morphisme  $\pi_i : X_i \rightarrow X$ . Pour tout point fermé  $w$  de  $X_i$ , on note  $\mathcal{O}_{i,w}$  le complété de l'anneau local de  $X_i$  en  $w$  et  $k_i(w)$  son corps résiduel. On note aussi  $\mathfrak{m}_{i,w}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{i,w}$  et  $U_{i,w}^1$  le groupe  $1 + \mathfrak{m}_{i,w}$ . On note ensuite  $\mathcal{R}_i$  (resp.  $\mathcal{R}_{i,w}$ ) l'anneau des entiers de  $k_i$  (resp.  $k_i(w)$ ), et  $\mathfrak{n}_i$  (resp.  $\mathfrak{n}_{i,w}$ ) l'idéal maximal de  $\mathcal{R}_i$  (resp.  $\mathcal{R}_{i,w}$ ). Soient finalement  $V_i^1$  (resp.  $V_{i,w}^1$ ) le groupe  $1 + \mathfrak{n}_i$  (resp.  $1 + \mathfrak{n}_{i,w}$ ), et  $\mathbb{F}_i$  (resp.  $\mathbb{F}_{i,w}$ ) le corps résiduel de  $k_i$  (resp.  $k_i(w)$ ).

**Étape 2 :** Pour chaque  $v \in X^{(1)}$ , notons  $\tilde{M}_v$  l'image de  $F(K_v)$  dans  $R_0(K_v)$ . Pour chaque  $v \in X^{(1)}$ , on a un isomorphisme (non canonique) :

$$R_0(K_v) \cong \prod_{i=1}^m \prod_{w \in X_i^{(1)} \cap \pi_i^{-1}(v)} L_{i,w}^* \cong \prod_{i=1}^m \prod_{w \in X_i^{(1)} \cap \pi_i^{-1}(v)} (\mathbb{Z} \times U_{i,w}^1 \times \mathbb{Z} \times \mathcal{R}_{i,w}^*).$$

En particulier, le conoyau de l'injection  $j_v : \prod_{i=1}^m \prod_{w \in X_i^{(1)} \cap \pi_i^{-1}(v)} \mathcal{R}_{i,w}^* \hookrightarrow R_0(K_v)$  est sans torsion. Le groupe  $F(K_v)$  étant d'exposant fini,  $\tilde{M}_v$  est contenu dans l'image de  $j_v$ . Des dévissages parfaitement analogues à ceux du théorème 6.2 montrent alors qu'il suffit de prouver que le groupe :

$$Z := \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \frac{\prod_{i=1}^m \prod_{w \in X_i^{(1)} \cap \pi_i^{-1}(v)} \mathcal{R}_{i,w}^*}{\tilde{M}_v}}{\text{Im} \left( \prod_{i=1}^m \mathcal{R}_i^* \right)}$$

a la propriété (DD).

**Étape 3 :** On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow T \rightarrow Z \rightarrow V \rightarrow 0,$$

avec  $T := \frac{\prod_{v \in X^{(1)}} \frac{\prod_{i=1}^m \prod_{w \in X_i^{(1)} \cap \pi_i^{-1}(v)} (\mathcal{R}_{i,w}^*)^{\text{tors}}}{\tilde{M}_v}}{\text{Im} \left( \prod_{i=1}^m (\mathcal{R}_i^*)^{\text{tors}} \right)}, \quad V := \prod_{i=1}^m \frac{\prod_{w \in X_i^{(1)}} (V_{i,w}^1 / V_{i,w,\text{tors}}^1)}{(V_i^1 / V_{i,\text{tors}}^1)}.$

Comme chaque  $V_{i,w}^1$  et chaque  $V_i^1$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module de type fini, le lemme 2.3 montre qu'il suffit de vérifier que le groupe  $T$  vérifie la propriété (DD). Or le groupe  $\prod_{i=1}^m (\mathcal{R}_i^*)^{\text{tors}}$  est fini et le groupe  $\prod_{v \in X^{(1)}} \frac{\prod_{i=1}^m \prod_{w \in X_i^{(1)} \cap \pi_i^{-1}(v)} (\mathcal{R}_{i,w}^*)^{\text{tors}}}{\tilde{M}_v}$  vérifie la propriété (DD) car c'est un produit de groupes finis. On conclut en appliquant le lemme 2.5.  $\square$

Soit  $\mathbb{P}^0(T) = \prod'_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$  l'espace adélique d'un  $K$ -tore  $T$ . La dualité locale entre  $H^0(K_v, T)$  et  $H^2(K_v, T')$  ([9], Prop 2.2) induit un accouplement  $\mathbb{P}^0(T) \times H^2(K, T') \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , d'où une flèche de réciprocité  $r : \mathbb{P}^0(T) \rightarrow H^2(K, T')^D$ . Cette flèche a encore un noyau divisible modulo  $T(K)$ , et ici l'adhérence de son image est d'indice fini dans  $H^2(K, T')^D$  :

**Corollaire 6.7.** *Soit  $T$  un  $K$ -tore. L'application  $r$  induit une flèche injective  $\overline{A(\emptyset, T)} \rightarrow H^2(K, T')^D$ . De plus, l'adhérence  $I_{\text{adh}}$  de l'image  $I$  de  $r$  s'insère dans une suite exacte*

$$0 \rightarrow I_{\text{adh}} \rightarrow H^2(K, T')^D \rightarrow \text{III}^1(T) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* D'après [8], Th. 2.9, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(K, T)_{\wedge} \rightarrow \mathbb{P}^0(T)_{\wedge} \rightarrow H^2(K, T')^D \rightarrow \text{III}^1(T) \rightarrow 0,$$

avec  $\text{III}^1(T)$  fini et dual de  $\text{III}^2(T')$ . Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.7 et le théorème 6.6.  $\square$

Concernant le sous-groupe de torsion de  $A(\emptyset, T)$ , on peut encore procéder comme dans la section 4.4, en utilisant cette fois-ci la dualité d'Artin-Verdier entre  $H_c^1(U, {}_n\mathcal{T})$  et  $H^3(U, {}_n\mathcal{T}')$  (cf. [9], preuve du Th. 1.3). D'où le théorème suivant :

**Théorème 6.8.** *Il existe un accouplement parfait entre une limite inductive de groupes profinis et une limite projective de groupes discrets de torsion :*

$$A(\emptyset, T)_{\text{tors}} \times \frac{\varprojlim_n H^3(K, {}_n T')}{\text{Im}(\text{III}^2(K, T'))} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (24)$$

Dans cet énoncé, le groupe  $\text{III}^2(K, T')$  est fini (cf. [9], Prop. 3.4).

**Corollaire 6.9.** *Le groupe  $H^3(K, T')$  est nul et on a un accouplement parfait entre une limite inductive de groupes profinis et une limite projective de groupes discrets de torsion :*

$$A(\emptyset, T)_{\text{tors}} \times \frac{H^2(K, T')_{\wedge}}{\text{Im}(\text{III}^2(K, T'))} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \varprojlim_n H^2(K, T')/n \rightarrow \varprojlim_n H^3(K, {}_n T') \rightarrow \varprojlim_n {}_n H^3(K, T') \rightarrow 0.$$

Le groupe  $\varprojlim_n {}_n H^3(K, T')$  n'a pas de torsion et l'image de  $H^2(K, T')$  (donc aussi celle de  $\text{III}^2(K, T')$ ) dans  $\varprojlim_n H^3(K, {}_n T')$  est contenue dans  $\varprojlim_n H^2(K, T')/n$ . De plus, d'après le théorème 6.6, le groupe  $A(\emptyset, T)_{\text{tors, div}}$  est nul. Donc  $\varprojlim_n {}_n H^3(K, T') = 0$ . En outre, par dimension cohomologique, le groupe  $H^3(K, T')$  est divisible car  $H^4(K, {}_n T') = 0$ . On en déduit que  $H^3(K, T') = 0$ , puis que  $H^2(K, T')_{\wedge} \cong \varprojlim_n H^3(K, {}_n T')$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

**Remarque 6.10.** Un résultat d'U. Jannsen ([13], points 2) et 3) de la page 128) affirme que  $H^3(K, \mathbb{G}_m) = 0$ . Cela implique la nullité de  $H^3(K, T)$  pour tout  $K$ -tore  $T$  via un argument de restriction-corestriction. Le corollaire précédent permet de retrouver ce résultat. On peut aussi l'obtenir plus facilement via la suite exacte de Faddeev (cf. [5], p. 241) quand  $X = \mathbb{P}^1$ , argument qui s'étend sans trop de difficultés à une courbe quelconque en exploitant la nullité de  $H^2(k, \text{Pic}^0 X)$  (laquelle découle de [16], Cor. I.3.4).

**Remarque 6.11.** Dans le cas  $T = \mathbb{G}_m$ , on obtient un accouplement parfait :

$$A(\emptyset, \mathbb{G}_m)_{\text{tors}} \times (\text{Br } K)_{\wedge} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

*Remerciements.* Nous tenons à remercier B. Kahn pour nous avoir expliqué que le faisceau  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1)$  est le bon analogue du complexe motivique  $\mathbb{Z}(d)$  lorsque  $d = -1$ , ainsi que J.-L. Colliot-Thélène pour plusieurs suggestions et discussions intéressantes sur cet article.

## REFERENCES

- [1] P. M. Cohn : *Basic algebra. Groups, rings and fields*, Springer-Verlag London, Ltd., London 2003.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène : *Approximation forte pour les espaces homogènes de groupes semi-simples sur les corps de fonctions d'une courbe algébrique complexe*, à paraître dans European Journal of Mathematics.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille : *Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable*, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), 121–134, Progr. Math. **226**, Birkhäuser 2004.

- [4] L. Fuchs : *Infinite abelian groups. Vol. I*. Pure and Applied Mathematics **36**, Academic Press, New York-London, 1970.
- [5] D. Harari : *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75**, 221–260 (1994).
- [6] D. Harari : *Le défaut d’approximation forte pour les groupes algébriques commutatifs*, Algebra and number Theory **2**, No 5, 595–611 (2008).
- [7] D. Harari, J.-L. Colliot-Thélène : *Dualité et principe local-global pour les tores sur une courbe au-dessus de  $\mathbb{C}((t))$* , Proc. Lond. Math. Soc. (3) **110**, No. 6, 1475–1516 (2015).
- [8] D. Harari, C. Scheiderer, T. Szamuely : *Weak approximation for tori over  $p$ -adic function fields*, Internat. Math. Res. Notices (2015), Vol. 2015, 2751–2783.
- [9] D. Harari, T. Szamuely : *Local-global questions for tori over  $p$ -adic function fields*, J. Algebraic Geom. **25**, No 3, 571–605 (2016).
- [10] E. Hewitt, K. Ross : *Abstract harmonic analysis I*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [11] D. Izquierdo : *Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs*, Mathematische Zeitschrift **284** (1-2), 615–642 (2016).
- [12] D. Izquierdo : *Principe local-global pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs II*, à paraître dans Bull. SMF.
- [13] U. Jannsen : *Principe de Hasse cohomologique*, in Séminaire de Théorie des Nombres, Sinnou David (ed.), Paris, 1989-1990. Progress in Math., **102**, 121—140 (1992).
- [14] B. Kahn : *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. **1**, No. 17, 395—416 (1996).
- [15] A. Mattuck : *Abelian varieties over  $p$ -adic ground fields* Ann. of Math. **62**, 92—19 (1955).
- [16] J. S. Milne : *Arithmetic duality theorems*, Second Edition, Kea Books 2006.
- [17] J.-J. Sansuc : *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327**, 12–80 (1981).
- [18] J.-P. Serre : *Corps locaux*, Hermann, Paris 1968.
- [19] J.-P. Serre : *Cohomologie Galoisienne* (cinquième édition, révisée et complétée), Lecture Notes in Math. **5**, Springer Verlag, 1994.