

# DUALITÉ ET PRINCIPE LOCAL-GLOBAL POUR LES ANNEAUX LOCAUX HENSÉLIENS DE DIMENSION 2

Diego Izquierdo<sup>\*</sup>  
avec un appendice de Joël Riou<sup>†</sup>

**Abstract.** Let  $k$  be an algebraically closed field, a finite field or a  $p$ -adic field. Let  $K_0 = k((x, y))$  be the field of Laurent series in two variables over  $k$  and let  $K$  be a finite extension of  $K_0$ . We define Tate-Shafarevich groups of a commutative group scheme over  $K$  via cohomology classes locally trivial at each completion of  $K$  coming from a codimension 1 point of  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , where  $\mathcal{O}_K$  is the integral closure of  $k[[x, y]]$  in  $K$ . We establish duality theorems between Tate-Shafarevich groups for finite groups schemes and for tori. We apply these results to the study of the obstruction to the local-global principle for  $K$ -torsors under a connected linear algebraic group, answering in that way a question of Colliot-Thélène, Parimala and Suresh, and to the weak approximation for tori over  $K$ .

**Résumé.** Soit  $k$  un corps algébriquement clos, un corps fini, ou encore un corps  $p$ -adique. Soient  $K_0 = k((x, y))$  le corps des séries de Laurent à deux variables sur  $k$  et  $K$  une extension finie de  $K_0$ . On définit les groupes de Tate-Shafarevich d'un  $K$ -schéma en groupes commutatif en considérant les classes de cohomologie qui deviennent triviales sur chaque complété de  $K$  provenant d'un point de codimension 1 de  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , où  $\mathcal{O}_K$  désigne la clôture intégrale de  $k[[x, y]]$  dans  $K$ . On établit des théorèmes de dualité arithmétique entre des groupes de Tate-Shafarevich pour les modules finis et pour les tores. On applique ces résultats à l'étude du principe local-global pour les  $K$ -torseurs sous un groupe linéaire connexe, répondant ainsi à une question de Colliot-Thélène, Parimala et Suresh, ainsi qu'à l'approximation faible pour les tores sur  $K$ .

**MSC classes.** 11E72, 11G99, 12G05, 14G05, 14G27.

**Keywords :** 2-dimensional local rings, arithmetic duality, algebraic groups, local-global principle, torsors, weak approximation, Galois cohomology.

**Mots-clés :** anneaux locaux de dimension 2, dualité arithmétique, groupes algébriques, principe local-global, toseurs, approximation faible, cohomologie galoisienne.

## Introduction

Annoncés dans les années 1960 par Tate, les théorèmes de dualité arithmétique ont joué depuis un rôle fondamental dans l'étude des points rationnels des variétés algébriques sur les corps globaux (corps de nombres et corps de fonctions de courbes sur des corps finis). Plus récemment, nous avons connu un regain d'intérêt pour ces questions sur des corps plus compliqués. C'est ainsi que Harari, Scheiderer et Szamuely ont étudié

---

<sup>\*</sup>Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure, CNRS, PSL Research University, 45 Rue d'Ulm, 75005 Paris, France. [diego.izquierdo@ens.fr](mailto:diego.izquierdo@ens.fr)

<sup>†</sup>Département de Mathématiques Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay Université Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex, France. [joel.riou@math.u-psud.fr](mailto:joel.riou@math.u-psud.fr)

les corps de fonctions de courbes sur des corps  $p$ -adiques ([HSz13], [HSSz15]), puis que Colliot-Thélène et Harari se sont penchés sur les corps de fonctions de courbes sur  $\mathbb{C}((t))$  ([CTH15]). L'auteur du présent article a ensuite généralisé les précédents résultats aux corps de fonctions de courbes sur des corps locaux supérieurs ([Izq16a], [Izq15], [Izq17b]).

Soit  $k$  un corps algébriquement clos, un corps fini,  $\mathbb{C}((t))$  ou encore un corps  $p$ -adique. Considérons  $R$  une  $k$ -algèbre commutative, locale, intègre, normale, hensélienne, excellente, de dimension 2, de corps résiduel  $k$ . Supposons de plus que  $R \otimes_k k^s$  est intègre, et notons  $K$  le corps des fractions de  $R$ . À titre d'exemple, l'algèbre  $R$  pourrait être la  $k$ -algèbre  $k[[x, y]]$  des séries formelles à deux variables et le corps  $K$  son corps des fractions, c'est-à-dire le corps  $k((x, y))$  des séries de Laurent à deux variables sur  $k$ . On rappelle que  $k((x, y))$  est strictement contenu dans  $k((x))((y))$  et que, contrairement à  $k((x))((y))$ , son comportement est similaire à celui d'un corps global.

Le but de cet article est d'obtenir des théorèmes de dualité arithmétique sur  $K$ , puis de les appliquer à l'étude des points rationnels sur les  $K$ -variétés algébriques. Pour ce faire, l'une des difficultés principales que nous rencontrons vient du fait que nous devons travailler avec le schéma  $\text{Spec } R$ , qui est de dimension 2 et qui peut être singulier. En particulier, cela complique de manière importante l'établissement de théorèmes de dualité à la Artin-Verdier. Un tel phénomène n'avait pas été rencontré dans les travaux précédents portant sur les corps de fonctions de courbes, puisque dans ces cas-là les objets géométriques sous-jacents étaient de dimension 1 et réguliers, et la dualité d'Artin-Verdier découlait assez formellement de la dualité de Poincaré et d'un théorème de dualité pour le corps de base.

Les motivations pour se pencher sur de telles questions sont multiples. Tout d'abord, les corps que nous étudions ont récemment intéressé plusieurs auteurs (Colliot-Thélène, Gille, Hu, Ojanguren, Parimala, Suresh...). Citons notamment l'article [CTPS16], dans lequel Colliot-Thélène, Parimala et Suresh introduisent certaines obstructions au principe local-global sur  $K$  lorsque  $k$  est algébriquement clos de caractéristique 0 et se demandent si ce sont les seules pour les espaces principaux homogènes sous des tores. Nous répondrons affirmativement à cette question dans le présent article. Ensuite, les extensions finies de  $\mathbb{C}((x, y))$  interviennent de manière importante dans les travaux de Harbater, Hartmann et Krashen dans lesquels ils utilisent des techniques de patching pour étudier le principe local-global sur certains corps de fonctions de courbes (par exemple [HHK14]). Il est donc naturel de penser que, si l'on veut comprendre les résultats qu'ils obtiennent avec les techniques de dualité, il convient de commencer par se pencher sur les questions de dualité pour  $\mathbb{C}((x, y))$  et ses extensions finies. Finalement, il est probablement nécessaire de comprendre le corps  $\mathbb{C}((x, y))$  avant de s'intéresser aux corps de fonctions de surfaces complexes, pour lesquels rien n'est connu actuellement du point de vue de la dualité arithmétique.

## Organisation de l'article.

Dans cet article on se donne  $k$  un corps et  $R$  une  $k$ -algèbre commutative, locale, intègre, normale, hensélienne, excellente, de dimension 2, de corps résiduel  $k$ . On suppose de plus que  $R \otimes_k k^s$  est intègre, et on note  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $R$  et  $X = \text{Spec } R \setminus \{\mathfrak{m}\}$ . Soit  $X^{(1)}$  l'ensemble des points de codimension 1 de  $X$ . On remarquera que l'algèbre  $R$

n'a pas été supposée régulière. Le but de l'article est d'étudier le corps des fractions  $K$  de  $R$ .

Le texte est constitué de 4 parties et un appendice écrit par Joël Riou. Dans la première section, on se place dans le cas où  $k$  est algébriquement clos de caractéristique 0, et on établit une suite exacte de Brauer-Hasse-Noether pour le corps  $K$  :

**Théorème 0.1.** (*Théorème 1.6*)

*Supposons que  $k$  est algébriquement clos de caractéristique 0. On a une suite exacte :*

$$0 \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_X} \rightarrow \text{Br}(K) \rightarrow \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \text{Br}(K_v) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

où  $n_X$  est un entier explicite qui est défini grâce à la géométrie de la fibre spéciale d'une désingularisation de  $\text{Spec } R$ .

La preuve de ce théorème repose notamment sur une analyse fine de la combinatoire des singularités de  $\text{Spec } R$ .

Dans la deuxième partie, nous énonçons une dualité de type Artin-Verdier sur le schéma  $X$  :

**Théorème 0.2.** (*Corollaire 2.3*)

*Supposons que  $k$  est algébriquement clos de caractéristique 0. Soient  $j : U \hookrightarrow X$  une immersion ouverte avec  $U$  non vide et  $F$  un schéma en groupes fini étale sur  $U$  de  $n$ -torsion et de dual de Cartier  $F' = \underline{\text{Hom}}_U(F, \mu_n)$ . Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :*

$$H^r(U, F') \times H^{3-r}(X, j_!F) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1).$$

Ici,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)$  désigne  $\text{Hom}(\mu_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , qui, quitte à choisir une racine primitive  $n$ -ième de l'unité, est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Nous proposons deux preuves du théorème 0.2 : une preuve fondée sur les résultats généraux de dualité d'Ofer Gabber, qui est présentée dans l'appendice écrit par Joël Riou ; et une preuve similaire à celle de la dualité d'Artin-Verdier classique sur les corps de nombres, mais qui présente des difficultés supplémentaires liées aux éventuelles singularités de  $\text{Spec } R$ , qui repose sur la suite exacte de Brauer-Hasse-Noether du théorème 0.1, et qui est détaillée dans la thèse de l'auteur (chapitre 4 de [Izq16b]).

Dans la troisième section, nous appliquons les résultats précédents pour obtenir des théorèmes de dualité de type Poitou-Tate pour les modules finis et les tores sur le corps  $K$  lorsque  $k$  est algébriquement clos, un corps fini,  $\mathbb{C}((t))$  ou encore un corps  $p$ -adique. Les principaux résultats sont les théorèmes 3.5 et 3.8.

Finalement, dans la quatrième section, nous appliquons les théorèmes de dualité précédents pour étudier les obstructions au principe local-global et à l'approximation faible. Plus précisément, dans les théorèmes 4.2 et 4.6, nous comprenons les obstructions au principe local-global pour les toseurs sous des groupes linéaires connexes sur  $K$  lorsque  $k$  est algébriquement clos, un corps fini,  $\mathbb{C}((t))$  ou encore un corps  $p$ -adique. Ce sont précisément ces deux théorèmes (4.2 et 4.6) qui répondent à la question posée à la fin de l'article [CTPS16]. Ils impliquent aussi la proposition suivante :

**Proposition 0.3.** (*Proposition 4.7*)

Supposons que  $k$  est fini de caractéristique  $p$  et considérons un tore stablement rationnel  $T$  sur  $K$ . Soit  $Y$  un espace principal homogène sous  $T$  qui devient trivial sur une extension finie de  $K$  de degré non divisible par  $p$ . Alors  $Y$  vérifie le principe local-global.

**Remarque 0.4.** Une proposition analogue à la précédente est vraie sur un corps de la forme  $\mathbb{Q}_p(x)$  (corollaire 5.7 de [HSz13]), mais pas sur un corps de la forme  $\mathbb{C}((t))(x)$  (exemple 2.9 de [CTH15]).

À la toute fin de l'article, dans le théorème 4.9, nous nous penchons sur l'approximation faible pour les tores sur  $K$ .

**Remerciements.** Je tiens à remercier en premier lieu David Harari pour son soutien et ses conseils, ainsi que pour sa lecture soigneuse de ce texte : sans lui, ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Je voudrais aussi remercier Ofer Gabber pour ses questions enrichissantes dans un exposé ainsi que Joël Riou pour ses explications éclairantes sur les liens du présent article avec les travaux d'Ofer Gabber et pour avoir accepté d'écrire l'appendice de cet article. Je suis aussi très reconnaissant à Olivier Wittenberg et à Tamás Szamuely pour d'intéressantes discussions et à Jean-Louis Colliot-Thélène pour ses nombreux commentaires permettant d'améliorer ce texte. Je remercie également le rapporteur pour d'intéressantes suggestions ayant permis d'améliorer ce texte. Je voudrais finalement remercier l'École Normale Supérieure pour ses excellentes conditions de travail.

**Rappels et notations**

**Corps.** Si  $L$  est un corps, on note  $L^s$  sa clôture séparable.

**Dimension.** Lorsque  $Z$  est un schéma noethérien et  $i$  un entier naturel, on note  $Z^{(i)}$  l'ensemble des points de codimension  $i$  de  $Z$ . En particulier,  $Z^{(0)}$  désigne l'ensemble des points génériques de  $Z$ , que l'on confond parfois avec l'ensemble des composantes irréductibles de  $Z$ .

**Groupes abéliens.** Pour  $M$  un groupe abélien,  $n > 0$  un entier et  $\ell$  un nombre premier, on note :

- ${}_nM$  le sous-groupe de  $n$ -torsion de  $M$ .
- $M\{\ell\}$  la partie de torsion  $\ell$ -primaire de  $M$ .
- $M_{\text{non-}\ell} = \bigoplus_{p \neq \ell} M\{p\}$  où  $p$  décrit les nombres premiers différents de  $\ell$ . Par commodité,  $M_{\text{non-}0}$  désignera  $M$ .
- $M^{(\ell)} = \varprojlim_n M/\ell^n$  le complété  $\ell$ -adique de  $M$ .
- $\overline{M}$  le quotient de  $M$  par son sous-groupe divisible maximal.
- $M^D$  le groupe des morphismes  $M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

**Faisceaux.** Sauf indication du contraire, tous les faisceaux sont considérés pour le petit site étale. Pour  $F$  un faisceau sur un schéma  $Z$ , on note  $\text{Hom}_Z(F, -)$  (ou  $\text{Hom}(F, -)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) le foncteur qui à un faisceau  $G$  sur  $Z$  associe le groupe des morphismes de faisceaux de  $F$  vers  $G$  et  $\underline{\text{Hom}}_Z(F, -)$  (ou  $\underline{\text{Hom}}(F, -)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) le foncteur qui à un faisceau  $G$  sur  $Z$  associe le faisceau étale  $U \mapsto$

$\mathrm{Hom}_U(F|_U, G|_U)$ .

**Cohomologie.** Par convention, pour  $F$  et  $G$  des faisceaux sur un schéma  $X$  et  $r$  un entier strictement négatif, on pose  $\mathrm{Ext}_X^r(F, G) = H^r(X, F) = 0$ .

**Groupe de Brauer.** Lorsque  $Z$  est un schéma, on note  $\mathrm{Br}(Z)$  le groupe de Brauer cohomologique  $H^2(Z, \mathbb{G}_m)$ . Si  $Z$  est une  $L$ -variété géométriquement intègre pour un certain corps  $L$ , on note  $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Z)$  le quotient du groupe de Brauer algébrique  $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(Z) \rightarrow \mathrm{Br}(Z \times_L L^s))$  par  $\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(L) \rightarrow \mathrm{Br}(Z))$ .

**Complexes de Bloch et cohomologie motivique.** Lorsque  $X$  est un schéma de Dedekind, on note  $\mathbb{Z}(i)$  le  $i$ -ème complexe de Bloch sur le petit site étale de  $X$ . On renvoie à la partie 0.5 de [Izq16a] pour des rappels sur les complexes de Bloch.

**Graphes.** On utilisera notamment les notions de graphe biparti et nombre cyclomatique d'un graphe. Un graphe (non orienté)  $\Gamma$  est ici un ensemble  $V$  muni d'une partie  $E$  de l'ensemble  $\mathcal{P}_2(V)$  des parties à 2 éléments de  $V$ . Les éléments de  $V$  sont appelés sommets et les éléments de  $E$  arêtes. On supposera toujours que les deux extrémités d'une arête sont distinctes. On dit que  $\Gamma$  est biparti s'il est muni d'une partition  $V = V_1 \sqcup V_2$  telle que toute arête dans  $E$  a une extrémité dans  $V_1$  et une extrémité dans  $V_2$ . Lorsque  $\Gamma$  est connexe, le nombre cyclomatique de  $\Gamma$  (ou le premier nombre de Betti de  $\Gamma$ ) est défini par la formule :

$$c = |E| - |V| + 1.$$

Pour plus de précisions à propos de ces notions, on pourra se référer à [Ber63].

## Les corps étudiés

Soient  $k$  un corps et  $R$  une  $k$ -algèbre commutative, locale, géométriquement intègre (ie  $R \otimes_k k^s$  est intègre), normale, hensélienne, excellente, de dimension 2 et de corps résiduel  $k$ . Par exemple,  $R$  pourrait être le complété ou l'hensélisé d'une surface complexe normale en un de ses points fermés. Soient  $K$  le corps des fractions de  $R$  et  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $R$ . Posons  $\mathcal{X} = \mathrm{Spec} R$  et  $X = \mathcal{X} \setminus \{\mathfrak{m}\}$ . Le schéma  $\mathcal{X}$  est, en général, singulier, alors que  $X$  est un schéma de Dedekind (non affine).

Supposons donnés  $\tilde{\mathcal{X}}$  un schéma régulier intègre de dimension 2 et un morphisme projectif surjectif  $f : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$  induisant un isomorphisme entre  $f^{-1}(X)$  et  $X$ . Si  $f$  n'est pas un isomorphisme, la fibre spéciale  $f^{-1}(\mathfrak{m})$  de  $f$  est une  $k$ -courbe en général réductible. Chaque  $v \in (\tilde{\mathcal{X}})^{(1)}$  définit une valuation discrète de rang 1 sur  $K$ . On note alors  $K_v$  le complété correspondant de  $K$  et  $k(v)$  son corps résiduel. Si  $v \notin f^{-1}(\mathfrak{m})$ , le corps  $k(v)$  est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien de corps résiduel  $k$ . Si  $v \in f^{-1}(\mathfrak{m})$ , le corps  $k(v)$  est le corps des fonctions de la composante irréductible de  $f^{-1}(\mathfrak{m})$  correspondant à  $v$ .

Dans le cas où  $k$  est algébriquement clos de caractéristique nulle, le corps  $K$  est de dimension cohomologique 2, et les  $k(v)$  sont de dimension cohomologique 1. De plus, si  $v \notin f^{-1}(\mathfrak{m})$ , le groupe de Galois absolu de  $k(v)$  est isomorphe à  $\hat{\mathbb{Z}}$  et, d'après l'exemple I.1.10 de [Mil06], pour chaque module galoisien fini  $F$  sur  $k(v)$ , on a une dualité parfaite

de groupes finis :

$$H^0(k(v), F) \times H^1(k(v), \underline{\mathrm{Hom}}(F, k(v)^{s, \times})) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Dans ce contexte, la remarque 2.3 de [CTPS16] fournit une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathrm{Br} K \rightarrow \bigoplus_{v \in (\mathcal{X})^{(1)}} \mathrm{Br} K_v \rightarrow \bigoplus_{v \in (\mathcal{X})^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

puisque l'application résidu  $H^2(K_v, \mu_n) \rightarrow H^1(k(v), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  (définie dans l'appendice du chapitre II de [Ser94]) est un isomorphisme.

Pour terminer, on rappelle aussi que, dans le cas où  $k$  est séparablement clos, l'indice et l'exposant pour les  $K$ -algèbres simples centrales coïncident et que la conjecture de Serre II vaut pour  $K$ . On pourra aller voir le théorème 1.4 de [CTGP04].

## 1. Suite exacte de Brauer-Hasse-Noether

Dans toute cette section, on supposera que le corps de base  $k$  est algébriquement clos de caractéristique 0. L'objectif consiste alors à établir le théorème 0.1, c'est-à-dire à démontrer une suite exacte de Brauer-Hasse-Noether sur le corps  $K$ . Nous verrons que la preuve exige de travailler avec la combinatoire des singularités du schéma  $\mathcal{X}$  : c'est une nouveauté importante apportée par cet article.

### 1.1 Préliminaire : deux lemmes d'algèbre linéaire

Dans ce paragraphe, on établit deux lemmes d'algèbre linéaire sur les graphes, qui seront très utiles par la suite.

**Lemme 1.1.** *Soit  $A$  un groupe abélien. Soit  $\Gamma$  un graphe fini connexe non orienté biparti. On note  $V = V_1 \sqcup V_2$  l'ensemble de ses sommets et  $E$  l'ensemble de ses arêtes. Pour  $v \in V$ , on note  $I(v)$  l'ensemble des arêtes ayant  $v$  pour extrémité. Soit  $(a_v)_{v \in V} \in A^V$  tel que :*

$$\sum_{v \in V_1} a_v = \sum_{v \in V_2} a_v.$$

Alors il existe  $(x_e)_{e \in E} \in A^E$  tel que, pour tout  $v \in V$ , on a :

$$\sum_{e \in I(v)} x_e = a_v.$$

*Démonstration.* Considérons un sous-ensemble d'arêtes  $E' \subseteq E$  tel que le sous-graphe  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  dont l'ensemble des sommets est  $V$  et celui des arêtes est  $E'$  soit un arbre connexe. En posant  $x_e = 0$  pour  $e \in E \setminus E'$ , on se ramène à prouver le lemme pour  $\Gamma'$  au lieu de  $\Gamma$ . On peut donc supposer que  $\Gamma$  est un arbre.

On procède alors par récurrence sur  $|V|$ . Si  $|V| = 1$  ou  $|V| = 2$ , le résultat est évident. Soit maintenant  $n \geq 1$  et supposons le résultat prouvé dans le cas  $|V| = n$ . Supposons que  $|V| = n + 1$ . Soit  $\Gamma'$  le sous-graphe de  $\Gamma$  obtenu en enlevant une feuille  $v_0 \in V$  et l'unique arête  $e_0 \in E$  qui lui est incidente. Soit  $v_1$  l'autre extrémité de  $e_0$  et considérons la famille

$(b_v)_{v \in V \setminus \{v_0\}}$  définie par  $b_v = a_v$  pour  $v \notin \{v_0, v_1\}$  et  $b_{v_1} = a_{v_1} - a_{v_0}$ . Par hypothèse de récurrence, il existe une famille  $(x_e)_{e \in E \setminus \{e_0\}}$  telle que, pour chaque  $v \in V \setminus \{v_0\}$ , on a :

$$\sum_{e \in I(v) \setminus \{e_0\}} x_e = b_v.$$

On pose  $x_{e_0} = a_{v_0}$ . On a alors, pour tout  $v \in V$  :

$$\sum_{e \in I(v)} x_e = a_v.$$

□

Gardons les notations du lemme précédent. Lorsque  $S$  est un ensemble, notons  $\Sigma_S$  le morphisme somme  $\bigoplus_{s \in S} A \rightarrow A$ . Posons :

$$\Theta_A(\Gamma) := \left( \bigoplus_{v \in V_1} \text{Ker } \Sigma_{I(v)} \right) \cap \left( \bigoplus_{v \in V_2} \text{Ker } \Sigma_{I(v)} \right) \subseteq \bigoplus_E A.$$

Cette définition ne présente aucune ambiguïté, puisque  $E = \coprod_{v \in V_1} I(v) = \coprod_{v \in V_2} I(v)$ . En d'autres termes,  $\Theta_A(\Gamma)$  est l'ensemble des  $(x_e)_{e \in E} \in \bigoplus_E A$  tels que, pour tout  $v \in V$ , on a l'égalité :

$$\sum_{e \in I(v)} x_e = 0. \quad (\mathcal{E}_v)$$

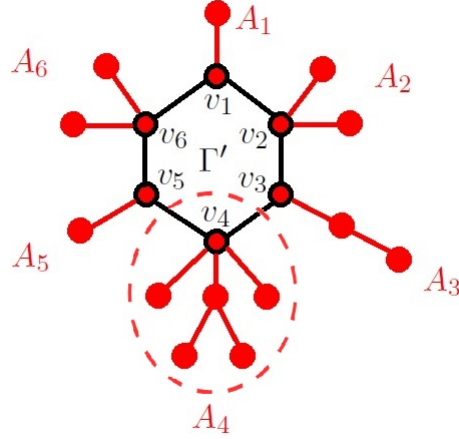
**Lemme 1.2.** *On reprend les notations précédentes. Soit  $c$  le nombre cyclomatique (ou premier nombre de Betti) de  $\Gamma$ .*

- (i) *Supposons que  $c = 0$  et fixons  $v_0 \in V$ . Si  $(x_e)_{e \in E}$  est une famille dans  $\bigoplus_E A$  vérifiant l'équation  $(\mathcal{E}_v)$  pour chaque  $v \in V \setminus \{v_0\}$ , alors  $x_e = 0$  pour tout  $e \in E$ . En particulier,  $\Theta_A(\Gamma) = 0$ .*
- (ii) *Soit  $e_0 \in E$  une arête de  $\Gamma$  telle que le sous-graphe de  $\Gamma$  obtenu en enlevant  $e_0$  est connexe. Notons  $p_{e_0}^\Gamma : \bigoplus_E A \rightarrow A$  la projection sur la composante indexée par  $e_0$ . Alors la restriction de  $p_{e_0}^\Gamma$  à  $\Theta_A(\Gamma)$  est surjective et scindée.*
- (iii) *Le groupe  $\Theta_A(\Gamma)$  est isomorphe à  $A^c$ .*

*Démonstration.* (i) Dire que  $c = 0$  signifie que  $\Gamma$  est un arbre. Soit  $(x_e)_{e \in E} \in \Theta_A(\Gamma)$ . On remarque alors que, si  $f$  une feuille de  $\Gamma$  différente de  $v_0$  et si  $e_f$  est l'unique arête de  $\Gamma$  ayant  $f$  pour extrémité, alors  $x_{e_f} = 0$  d'après l'équation  $(\mathcal{E}_f)$ . Une récurrence simple sur le nombre de sommets de  $\Gamma$  permet donc de conclure que  $x_e = 0$  pour tout  $e \in E$ .

(ii) Procédons par récurrence sur  $c$ .

- Le cas  $c = 0$  ne se présente pas puisqu'alors le sous-graphe de  $\Gamma$  obtenu en enlevant  $e_0$  ne peut pas être connexe (même si l'une des extrémités de  $e_0$  est une feuille de l'arbre  $\Gamma$ ).
- Supposons que  $c = 1$  et fixons  $(x_e)_{e \in E} \in \Theta_A(\Gamma)$ . Soit  $\Gamma'$  l'unique sous-graphe cyclique de  $\Gamma$  et notons  $v_1, \dots, v_r$  les sommets de  $\Gamma'$  de sorte que les arêtes de  $\Gamma'$  soient  $e_1 := \{v_1, v_2\}, e_2 := \{v_2, v_3\}, \dots, e_r := \{v_r, v_1\}$ . Soit  $E'$  l'ensemble  $\{e_1, \dots, e_r\}$  des arêtes de  $\Gamma'$ . Le graphe  $\Gamma$  est alors obtenu en recollant des arbres  $A_1, \dots, A_r$  sur les sommets  $v_1, \dots, v_r$  de  $\Gamma'$  respectivement, comme on peut le voir sur le dessin suivant :



Un exemple de graphe  $\Gamma$  avec  $c = 1$  et  $r = 6$ . Le sous-graphe  $\Gamma'$  est en noir, alors que les arbres  $A_1, \dots, A_6$  sont en rouge. L'arbre  $A_4$  a été entouré.

En appliquant (i) à chacun des arbres  $A_1, \dots, A_r$  et en prenant pour  $v_0$  les sommets  $v_1, \dots, v_r$  respectivement, on obtient que  $x_e = 0$  pour chaque  $e \in E \setminus E'$ . Les équations  $(\mathcal{E}_{v_1}), \dots, (\mathcal{E}_{v_r})$  s'écrivent alors :

$$\begin{cases} x_{e_1} + x_{e_2} = 0 \\ x_{e_2} + x_{e_3} = 0 \\ \dots \\ x_{e_r} + x_{e_1} = 0. \end{cases}$$

Comme  $\Gamma$  est biparti, l'entier  $r$  est pair, et donc les solutions de ce système d'équations sont données par  $x_{e_1} = -x_{e_2} = x_{e_3} = \dots = x_{e_{r-1}} = -x_{e_r} = a$  pour un certain  $a \in A$ . Cela prouve que, pour chaque  $e \in E'$ , la projection  $p_e^\Gamma$  induit un isomorphisme entre  $\Theta_A(\Gamma)$  et  $A$ . En particulier, comme le sous-graphe de  $\Gamma$  obtenu en enlevant  $e_0$  est connexe, l'arête  $e_0$  appartient à  $E'$ , et donc  $p_{e_0}^\Gamma$  induit un isomorphisme entre  $\Theta_A(\Gamma)$  et  $A$ .

- Soit  $c_0 \geq 1$  et supposons le résultat prouvé pour  $c = c_0$ . Supposons que  $\Gamma$  est de nombre cyclomatique  $c_0 + 1$ . Comme  $\Gamma$  est de nombre cyclomatique au moins 2, il existe une arête  $e_1$  telle que le sous-graphe de  $\Gamma$  obtenu en enlevant les arêtes  $e_0$  et  $e_1$  est connexe. Soit alors  $\Gamma'$  le sous-graphe de  $\Gamma$  obtenu en enlevant l'arête  $e_1$ . Par hypothèse de récurrence,  $p_{e_0}^{\Gamma'}|_{\Theta_A(\Gamma')}$  est un morphisme surjectif et scindé. On en déduit immédiatement que  $p_{e_0}^\Gamma|_{\Theta_A(\Gamma)}$  l'est aussi.
- (iii) Procédons par récurrence sur  $c$ .
  - Dans le cas  $c = 0$ , on a  $\Theta_A(\Gamma) = 0$  d'après (i).
  - Soit  $c_0 \geq 0$  et supposons le résultat prouvé pour  $c = c_0$ . Supposons que  $\Gamma$  est de nombre cyclomatique  $c_0 + 1$ . Considérons alors un sous-graphe  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ , connexe, de nombre cyclomatique  $c_0$ , obtenu à partir de  $\Gamma$  en enlevant une arête  $e_0$ . On remarque alors immédiatement que l'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \Theta_A(\Gamma') \rightarrow \Theta_A(\Gamma) \rightarrow A$$

où le morphisme  $\Theta_A(\Gamma) \rightarrow A$  est induit par la projection  $p_{e_0}^\Gamma$ . Par conséquent, en utilisant (ii) et l'hypothèse de récurrence, on obtient des isomorphismes :

$$\Theta_A(\Gamma) \cong \Theta_A(\Gamma') \oplus A \cong A^{c_0+1}.$$



□

## 1.2 Résolution des singularités

Rappelons que  $\mathfrak{m}$  désigne l'idéal maximal de  $R$ , que  $\mathcal{X}$  désigne le schéma affine  $\text{Spec}(R)$  et que  $X = \mathcal{X} \setminus \{\mathfrak{m}\}$ . On note aussi  $\eta = \text{Spec } K$  et  $g : \eta \hookrightarrow X$  le point générique de  $X$ .

Considérons un morphisme de schémas  $f : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X} = \text{Spec } R$  vérifiant les hypothèses suivantes :

- $\tilde{\mathcal{X}}$  est intègre régulier de dimension 2 et  $f$  est projectif ;
- $f : f^{-1}(X) \rightarrow X$  est un isomorphisme ;
- $f^{-1}(\mathfrak{m})$  est un diviseur à croisements normaux de  $\mathcal{X}$  (au sens de la définition 9.1.6 de [Liu02]).

Un tel morphisme existe d'après [Lip78]. On pose alors  $Y = f^{-1}(\mathfrak{m})$  muni de la structure réduite. Ainsi,  $Y$  est une  $k$ -courbe réduite qui n'est pas forcément irréductible, mais dont les composantes irréductibles sont lisses. Pour  $v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)} = Y^{(0)}$ , on désigne par  $Y_v$  la  $k$ -courbe projective lisse correspondant à  $v$ . On note  $g_v$  le genre de cette dernière.

Par ailleurs, à la courbe  $Y$  on associe le graphe biparti  $\Gamma$  suivant :

- sommets :  $V = V_1 \sqcup V_2$ , où  $V_1 = Y^{(0)}$  est l'ensemble des (points génériques des) composantes irréductibles de  $Y$  et  $V_2$  est l'ensemble des points fermés de  $Y$  qui sont intersection de deux composantes irréductibles de  $Y$  ;
- arêtes :  $E$  est l'ensemble des  $\{v_1, v_2\} \in \mathcal{P}_2(V)$  tels que  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$  et  $v_2 \in Y_{v_1}$ .

Soit  $c_\Gamma$  le nombre cyclomatique du graphe  $\Gamma$ . On pose finalement :

$$n_X = 2 \sum_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}} g_v + c_\Gamma.$$

A priori, la quantité  $n_X$  dépend de  $f$ , mais nous verrons dans la suite qu'en fait elle ne dépend que de  $X$ .

**Remarque 1.3.** Usuellement ce n'est pas le graphe  $\Gamma$  qu'on associe à  $Y$  mais le graphe  $\Gamma_{\text{réd}}$  défini par :

- sommets :  $V_{\text{réd}} = Y^{(0)}$  ;
- arêtes :  $E_{\text{réd}}$  est l'ensemble des couples  $(v_1, v_2) \in V_{\text{réd}}^2$  tels que  $Y_{v_1}$  et  $Y_{v_2}$  s'intersectent.

Le graphe  $\Gamma$  est obtenu à partir de  $\Gamma_{\text{réd}}$  en rajoutant un sommet sur chaque arête. En particulier, les deux graphes ont même nombre cyclomatique.

## 1.3 Les modules $\Lambda$ et $\Upsilon$

On rappelle que, pour  $v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}$ , le corps  $k(v)$  est le corps des fonctions  $k(Y_v)$  de la  $k$ -courbe projective lisse  $Y_v$ . Du coup, pour  $v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}$  et  $w \in Y_v^{(1)}$ , le corps  $k(Y_v)_w$  est isomorphe à  $k((t))$ . Son groupe de Galois absolu est isomorphe à  $\hat{\mathbb{Z}}$ , et donc on a un isomorphisme naturel  $H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . On peut alors considérer le morphisme naturel :

$$\phi : \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}} H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

induit par somme des morphismes de restriction :

$$H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^1(k(Y_v)_w, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

pour  $v \in Y^{(0)}$  et  $w \in Y_v^{(1)}$ . On pose  $\Lambda = \text{Coker } \phi$  et  $\Upsilon = \text{Ker } \phi$ .

**Lemme 1.4.** *Le morphisme somme  $\Sigma : \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  induit un isomorphisme  $\Lambda \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Le morphisme  $\phi$  est induit par les morphismes :

$$\phi_v : H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} H^1(k(Y_v)_w, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)),$$

qui sont eux-mêmes obtenus par passage à la limite inductive à partir des morphismes :

$$\phi_{v,n} : H^1(k(Y_v), \mu_n) \rightarrow \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} H^1(k(Y_v)_w, \mu_n).$$

Or, en identifiant chaque  $H^1(k(Y_v)_w, \mu_n)$  à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  via la valuation  $w$ -adique et en considérant le morphisme somme  $\Sigma : \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} H^1(k(Y_v)_w, \mu_n) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , chaque  $\phi_{v,n}$  s'insère dans une suite :

$$H^1(k(Y_v), \mu_n) \xrightarrow{\phi_{v,n}} \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} H^1(k(Y_v)_w, \mu_n) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

qui est exacte puisque :

- le morphisme  $\Sigma$  est évidemment surjectif ;
- pour toute fonction  $f \in k(Y_v)^\times$ , on a  $\deg \text{div}(f) = 0$ , et donc  $\Sigma \circ \phi_v = 0$  ;
- on a un isomorphisme  $\text{Pic}(Y_v)/n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  induit par le degré, et donc si on se donne une famille  $(m_w)_{w \in Y_v^{(1)}} \in \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} H^1(k(Y_v)_w, \mu_n)$  vérifiant l'égalité  $\sum_{w \in Y_v^{(1)}} m_w = 0 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , alors il existe une fonction  $f \in k(Y_v)^\times$  telle que  $\text{div}(f) = \sum_{w \in Y_v^{(1)}} m_w w$  dans  $\text{Div}(Y_v)/n$  : autrement dit,  $\phi_{v,n}(f) = (m_w)_w$ , et donc  $\text{Ker } \Sigma \subseteq \text{Im } \phi_{v,n}$ .

En passant à la limite inductive sur  $n$ , on obtient alors une suite exacte :

$$H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\phi_v} \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} H^1(k(Y_v)_w, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (\star)$$

Cela montre immédiatement que  $\Sigma$  induit un morphisme surjectif :

$$\Lambda \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Reste à prouver qu'il est injectif. Pour ce faire, on se donne  $\alpha = (\alpha_w)_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \in \text{Ker } \Sigma$  et on considère le graphe biparti  $\Gamma$ . Pour  $v_1 \in V_1$ , on pose  $a_{v_1} = -\sum_{w \in Y_{v_1}^{(1)} \setminus V_2} \alpha_w$ . Pour  $v_2 \in V_2$ , on pose  $a_{v_2} = \alpha_{v_2}$ . Comme  $(\alpha_w) \in \text{Ker } \Sigma$ , on vérifie immédiatement que :

$$\sum_{v \in V_1} a_v = \sum_{v \in V_2} a_v.$$

De plus, le graphe  $\Gamma$  est connexe d'après le principe de connexité de Zariski (corollaire 5.3.16 de [Liu02]). Par conséquent, le lemme 1.1 montre qu'il existe  $(x_e)_{e \in E} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^E$  tel que, pour tout  $v \in V$ , on a :

$$\sum_{e \in I(v)} x_e = a_v. \quad (\star\star)$$

Pour  $v_1 \in V_1$ , on considère la famille  $y_{v_1} = (y_{v_1, w})_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}}$  définie par :

$$\begin{cases} y_{v_1, w} = 0 & \text{si } w \notin Y_{v_1} \\ y_{v_1, w} = \alpha_w & \text{si } w \in Y_{v_1} \setminus V_2 \\ y_{v_1, w} = x_{\{v_1, w\}} & \text{si } \{v_1, w\} \in E. \end{cases} \quad (\star\star\star)$$

On remarque alors que, pour chaque  $v_1 \in V_1$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} y_{v_1, w} &= \sum_{w \in Y_{v_1}^{(1)}} y_{v_1, w} && \text{(d'après } (\star\star\star)) \\ &= \sum_{w \in Y_{v_1}^{(1)} \setminus V_2} y_{v_1, w} + \sum_{w \in Y_{v_1}^{(1)} \cap V_2} y_{v_1, w} \\ &= \sum_{w \in Y_{v_1}^{(1)} \setminus V_2} \alpha_w + \sum_{w \in Y_{v_1}^{(1)} \cap V_2} x_{\{v_1, w\}} && \text{(d'après } (\star\star\star)) \\ &= \sum_{w \in Y_{v_1}^{(1)} \setminus V_2} \alpha_w + \sum_{e \in I(v_1)} x_e \\ &= \sum_{w \in Y_{v_1}^{(1)} \setminus V_2} \alpha_w + a_{v_1} && \text{(d'après } (\star\star)) \\ &= 0. && \text{(par définition de } a_{v_1}) \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite exacte  $(\star)$  montre que  $y \in \text{Im}(\phi_{v_1})$ . De plus, pour  $w \in V_2$ , on a :

$$\sum_{v \in V_1} y_{v, w} \stackrel{(\star\star\star)}{=} \sum_{e \in I(w)} x_e \stackrel{(\star\star)}{=} a_w = \alpha_w,$$

d'où  $\sum_{v \in V_1} y_v = \alpha$ . On en déduit que  $\alpha \in \text{Im}(\phi)$  et  $\Sigma$  induit bien un isomorphisme  $\Lambda \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .  $\square$

Le lemme qui suit va permettre de calculer le groupe  $\Upsilon$  en fonction de l'entier  $n_X$  qui a été introduit dans le paragraphe 1.2.

**Lemme 1.5.** *Le groupe abélien  $\Upsilon$  est isomorphe à  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_X}$ .*

*Démonstration.* Comme cela a été déjà remarqué dans la preuve du lemme précédent, le morphisme  $\phi$  est induit par les morphismes :

$$\phi_v : H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} H^1(k(Y_v)_w, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$$

pour  $v \in Y^{(0)}$ . Ces derniers s'insèrent dans la suite exacte  $(\star)$ . On a donc un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \bigoplus_{v \in Y^{(0)}} \text{Ker}(\phi_v) & & \Upsilon & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in Y^{(0)}} H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{v \in Y^{(0)}} H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \bigoplus_{v \in Y^{(0)}} \phi_v & & \downarrow \phi & & \\
0 & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & & \\
& & \downarrow & & & & \\
& & 0 & & & & 
\end{array}$$

où :

$$\Theta = \text{Ker} \left( \Sigma : \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}} \text{Ker} \left( \Sigma : \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \right) \rightarrow \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \right).$$

Le lemme du serpent montre alors que l'on dispose d'une suite exacte :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}} \text{Ker} \phi_v \rightarrow \Upsilon \rightarrow \Theta \rightarrow 0.$$

Nous allons maintenant calculer les groupes  $\bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}} \text{Ker} \phi_v$  et  $\Theta$ .

- Fixons  $v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}$  et calculons  $\text{Ker} \phi_v$ . Le morphisme  $\phi_v$  s'identifie au morphisme :

$$H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} H^0(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

induit par les résidus (dont on peut trouver la définition dans l'appendice du chapitre II de [Ser94]). Par conséquent,  $\text{Ker} \phi_v = H^1(Y_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ . Comme  $Y_v$  est projective, ce groupe s'identifie au sous-groupe de torsion de  $\text{Pic } Y_v$ , autrement dit au sous-groupe de torsion des  $k$ -points de la Jacobienne de  $Y_v$ . On en déduit que  $\text{Ker} \phi_v \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2g_v}$ .

- Calculons maintenant  $\Theta$ . Pour ce faire, introduisons l'ensemble  $Y^{(0),(1)}$  des couples  $(v, w) \in Y^{(0)} \times Y^{(1)}$  tels que  $w \in Y_v$ . Le groupe  $\Theta$  s'identifie alors au sous-groupe de  $\bigoplus_{Y^{(0),(1)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  constitué des familles  $(x_\alpha)_{\alpha \in Y^{(0),(1)}}$  vérifiant les équations suivantes :

$$\forall v \in Y^{(0)}, \quad \sum_{w \in Y_v^{(1)}} x_{(v,w)} = 0 \quad (\mathcal{F}_v)$$

$$\forall w \in Y^{(1)}, \quad \sum_{v|(v,w) \in Y^{(0),(1)}} x_{(v,w)} = 0. \quad (\mathcal{F}_w)$$

Pour  $\alpha = (v, w) \in Y^{(0),(1)}$  tel que  $w \notin V_2$ , l'équation  $(\mathcal{F}_w)$  s'écrit  $x_{(v,w)} = 0$ . Via l'identification  $\{(v, w) \in Y^{(0),(1)} | w \in V_2\} \cong E$ , on en déduit que le groupe  $\Theta$  s'identifie au sous-groupe de  $\bigoplus_E \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  constitué des familles  $(x_e)_{e \in E}$  vérifiant les équations

suivantes :

$$\forall v \in V_1, \sum_{w \in I(v)} x_{\{v,w\}} = 0 \quad (\mathcal{F}'_v)$$

$$\forall w \in V_2, \sum_{v \in I(w)} x_{\{v,w\}} = 0 \quad (\mathcal{F}'_w)$$

où  $I(v)$  (resp.  $I(w)$ ) désigne toujours l'ensemble des arêtes de  $\Gamma$  incidentes sur  $v$  (resp.  $w$ ). Cela démontre que  $\Theta \cong \Theta_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}(\Gamma)$ . D'après le lemme 1.2, ce groupe est isomorphe à  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\text{cr}}$ .

On en déduit que  $\Upsilon \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_X}$ . □

### 1.4 Suite de Brauer-Hasse-Noether

Nous sommes enfin en mesure d'établir la suite exacte de Brauer-Hasse-Noether du théorème 0.1 sur notre corps  $K$  :

#### **Théorème 1.6. (Suite de Brauer-Hasse-Noether)**

On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_X} \rightarrow \text{Br}(K) \rightarrow \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \text{Br}(K_v) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

où  $n_X$  est l'entier qui a été défini dans le paragraphe 1.2.

**Remarque 1.7.** En particulier,  $n_X$  ne dépend que de  $X$ .

*Démonstration.* Le schéma  $\tilde{\mathcal{X}}$  étant régulier, d'après la remarque 2.3 de [CTPS16], il existe une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Br } K \rightarrow \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)}} \text{Br } K_v \rightarrow \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Par conséquent :

- le noyau de  $\text{Br } K \rightarrow \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \text{Br } K_v$  s'identifie à :

$$\Upsilon = \text{Ker} \left( \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}} \text{Br } K_v \rightarrow \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \right),$$

et donc à  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_X}$  d'après le lemme 1.5.

- le conoyau de  $\text{Br } K \rightarrow \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \text{Br } K_v$  s'identifie à :

$$\Lambda = \text{Coker} \left( \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}} \text{Br } K_v \rightarrow \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \right),$$

et donc à  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  d'après le lemme 1.4. □

La suite exacte de Brauer-Hasse-Noether précédente peut être appliquée à l'étude de la cohomologie du faisceau  $\mathbb{G}_m$  sur  $X$  :

**Corollaire 1.8.** *Soit  $j : U \hookrightarrow X$  une immersion ouverte, avec  $U$  non vide.*

(i) *On a une suite exacte :*

$$0 \rightarrow H^2(U, \mathbb{G}_m) \rightarrow \text{Br}(K) \rightarrow \bigoplus_{v \in U^{(1)}} \text{Br}(K_v) \rightarrow H^3(U, \mathbb{G}_m) \rightarrow 0.$$

De plus,  $H^r(U, \mathbb{G}_m) = 0$  pour  $r > 3$ .

(ii) *Le groupe  $H^3(X, j_! \mathbb{G}_m)$  est isomorphe à  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .*

(iii) *Le groupe  $\text{Br } X$  est isomorphe à  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_X}$ .*

*Démonstration. (Esquisse)*

(i) On dispose d'une suite exacte de faisceaux sur  $U$  :

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow g_* \mathbb{G}_m \rightarrow \bigoplus_{v \in U^{(1)}} i_{v*} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

où  $g : \eta \hookrightarrow U$  désigne l'inclusion du point générique et  $i_v$  l'immersion fermée  $\text{Spec}(k(v)) \hookrightarrow U$  pour chaque  $v \in U^{(1)}$ . La suite exacte longue associée s'écrit :

$$\dots \rightarrow H^r(U, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^r(U, g_* \mathbb{G}_m) \rightarrow \bigoplus_{v \in U^{(1)}} H^r(k(v), \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

De plus, l'annulation du faisceau  $R^s g_* \mathbb{G}_m$  pour  $s > 0$  et la suite spectrale de Leray  $H^r(U, R^s g_* \mathbb{G}_m) \Rightarrow H^{r+s}(K, \mathbb{G}_m)$  permettent l'identification  $H^r(U, g_* \mathbb{G}_m) \cong H^r(K, \mathbb{G}_m)$ . Comme  $\text{Br}(K_v) \cong H^r(k(v), \mathbb{Z})$  pour chaque  $v \in U^{(1)}$  et  $K$  est de dimension cohomologique 2, on obtient bien la suite exacte souhaitée ainsi que la trivialité de  $H^r(U, \mathbb{G}_m)$  pour  $r > 3$ .

(ii) En combinant (i) et le théorème 1.6, on voit que :

- si  $U = X$ , alors  $H^3(X, j_! \mathbb{G}_m) = H^3(X, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  ;
- si  $U \neq X$ , alors  $\text{Br } K$  se surjecte sur  $\bigoplus_{v \in U^{(1)}} \text{Br } K_v$  et donc  $H^3(U, \mathbb{G}_m) = 0$ . Cela permet d'obtenir une suite exacte :

$$H^2(U, \mathbb{G}_m) \rightarrow \bigoplus_{v \in X \setminus U} \text{Br } K_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Il suffit alors d'écrire la suite exacte de localisation (proposition 3.1.(1) de [HSz13]) :

$$0 \rightarrow H^2(X, j_! \mathbb{G}_m) \rightarrow H^2(U, \mathbb{G}_m) \rightarrow \bigoplus_{v \in X \setminus U} \text{Br } K_v \rightarrow H^3(X, j_! \mathbb{G}_m) \rightarrow 0$$

pour conclure que  $H^3(X, j_! \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

(iii) Il suffit de combiner (i) pour  $U = X$  et le théorème 1.6. □

## 2. Dualité d'Artin-Verdier

On suppose toujours que  $k$  est algébriquement clos de caractéristique 0 et on garde les notations de la section 1. Fixons un ouvert non vide  $U$  de  $X$ , ainsi qu'un faisceau constructible  $F$  sur  $U$ . Soit  $j : U \rightarrow X$  l'immersion ouverte et posons  $H_c^r(U, F) = H^r(X, j_! F)$  pour  $r \geq 0$ . Si  $D(U)$  désigne la catégorie dérivée bornée des faisceaux sur le

petit site étale de  $U$ , en identifiant  $\text{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m) = \text{Hom}_{D(U)}(F, \mathbb{G}_m[r])$ , on obtient un accouplement naturel :

$$AV : \text{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m) \times H_c^{3-r}(U, F) \rightarrow H_c^3(U, \mathbb{G}_m).$$

D'après le corollaire 1.8(ii), le groupe  $H_c^3(U, \mathbb{G}_m)$  est isomorphe à  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , d'où un accouplement :

$$AV : \text{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m) \times H_c^{3-r}(U, F) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

**Théorème 2.1.** *L'accouplement  $AV$  est un accouplement parfait de groupes finis.*

Ce théorème est l'analogue de la dualité d'Artin-Verdier classique sur les anneaux d'entiers des corps de nombres. Il est possible de donner deux preuves différentes de ce résultat.

- Une première preuve peut être retrouvée dans l'appendice écrit par Joël Riou à la fin de cet article. Elle est fondée sur l'application des théorèmes de dualité très généraux d'Ofer Gabber (théorème 0.2 du chapitre XVII de [Rio14]). Elle utilise notamment l'existence d'un complexe dualisant sur le schéma  $\text{Spec } R$  dont la restriction à  $X = \text{Spec } R \setminus \{\mathfrak{m}\}$  est le faisceau constant  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
- Une deuxième preuve peut être retrouvée dans ma thèse (paragraphe 1 du chapitre 4 de [Izq16b]). Elle suit le même schéma que la démonstration classique du théorème d'Artin-Verdier sur les corps de nombres (voir section II.3 de [Mil06]), mais demande de gérer un certain nombre de difficultés supplémentaires liées au fait que le schéma  $\mathcal{X}$  peut être singulier. Dans un premier temps, elle consiste à se ramener au cas où  $F = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  et  $U = X$  grâce à des arguments de dévissage et en procédant par récurrence. Il faut ensuite démontrer que  $AV$  est un accouplement parfait de groupes finis lorsque  $F = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ,  $U = X$  et  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Pour ce faire, le point crucial consiste à démontrer l'égalité :

$$|\text{Ext}_X^r(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)| = |H^{3-r}(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|.$$

Grâce aux suites exactes de Kummer :

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \text{Ext}_X^r(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^r(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^r(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow H^r(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H^r(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^r(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

on peut voir que cela découle des isomorphismes  $\text{Br } X \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_X}$  et  $H^3(X, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , ainsi que de l'égalité  $\frac{|{}_m\text{Pic } X|}{|\text{Pic } X/m|} = m^{n_X}$  (pour  $m > 0$ ), qui peut être démontrée indépendamment.

**Remarque 2.2.** Dans les articles [HSz13], [CTH15] et [Izq16a], la dualité d'Artin-Verdier s'obtenait plus simplement qu'ici puisqu'elle découlait assez formellement de la dualité de Poincaré et d'une dualité sur le corps de base.

**Corollaire 2.3.** *Soit  $F$  un faisceau constructible localement constant sur  $U$ . Notons  $F' = \underline{\text{Hom}}_U(F, \mathbb{G}_m)$ . Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :*

$$H^r(U, F') \times H_c^{3-r}(U, F) \rightarrow H_c^3(U, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* Il suffit d'identifier  $H^r(U, F')$  et  $\text{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m)$  grâce à la suite spectrale des Ext.  $\square$

**Remarque 2.4.**

- (i) Dans le cas où  $k$  est séparablement clos de caractéristique  $p > 0$ , le corollaire précédent reste vrai à condition de supposer que  $F$  de  $n$ -torsion avec  $n$  non divisible par  $p$ . On attire en particulier l'attention sur le fait que, si  $k$  est séparablement clos mais non algébriquement clos, le corps  $k(t)$  est encore de dimension cohomologique 1 puisque la cohomologie étale est invariante par extension purement inséparable.
- (ii) Comme cela m'a été suggéré par le rapporteur, il est possible que l'on puisse traiter le cas où  $k$  est séparablement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $F$  est de  $p$ -torsion en essayant d'adapter la théorie de la dualité de Gabber et de la combiner avec le théorème de pureté de Shiho pour les faisceaux de Hodge-Witt logarithmiques (section 3 de [Shi07]). J'espère pouvoir avancer sur cette question dans un futur travail.

**3. Théorèmes de dualité arithmétique**

On ne suppose plus  $k$  séparablement clos et on note  $\mathbb{P}$  l'ensemble des nombres premiers. Dans toute la suite de l'article, on supposera qu'il existe des entiers  $d \geq -1$  et  $p \in \{0\} \cup \mathbb{P}$  tels que :

- $\text{Car}(k) \in \{0, p\}$  ;
- le corps  $k$  est de dimension cohomologique  $d + 1$  ;
- pour chaque entier naturel non nul  $n$ , on a un isomorphisme  $H^{d+1}(k, \mu_n^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  de sorte que, pour  $m|n$ , le morphisme naturel  $H^{d+1}(k, \mu_m^{\otimes d}) \rightarrow H^{d+1}(k, \mu_n^{\otimes d})$  s'identifie au morphisme qui envoie la classe de 1 dans  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  sur la classe de  $n/m$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ;
- pour tout  $\text{Gal}(k^s/k)$ -module fini  $M$  d'ordre  $n$  non divisible par  $p$ , le cup-produit induit un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(k, M) \times H^{d+1-r}(k, \text{Hom}(M, \mu_n^{\otimes d})) \rightarrow H^{d+1}(k, \mu_n^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

On dira que  $k$  est un **corps  $(p, d)$ -bon pour la dualité**.

**Exemple 3.1.** Un corps séparablement clos de caractéristique  $p$  est  $(p, -1)$ -bon pour la dualité. Un corps fini de caractéristique  $p$  est  $(p, 0)$ -bon pour la dualité d'après l'exemple I.1.10 de [Mil06]. Un corps  $\ell$ -adique est  $(0, 1)$ -bon pour la dualité d'après le corollaire I.2.3 de [Mil06]. En procédant comme dans la preuve du théorème I.2.17 de [Mil06], on peut montrer qu'un corps de valuation discrète complet de corps résiduel  $(p, d)$ -bon pour la dualité est  $(p, d + 1)$ -bon pour la dualité. Par exemple, les corps  $d$ -locaux au sens de [Izq16a] sont  $(p, d)$ -bons pour la dualité si l'on choisit pour  $p$  la caractéristique du corps 1-local correspondant.

Dans la suite, on fixe  $R$  une  $k$ -algèbre commutative, locale, géométriquement intègre (ie  $R \otimes_k k^s$  est intègre), normale, hensélienne, excellente, de dimension 2 et de corps résiduel  $k$ . On note  $K$  son corps des fractions,  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal,  $\mathcal{X}$  le schéma  $\text{Spec } R$  et  $X$  le schéma  $\mathcal{X} \setminus \{\mathfrak{m}\}$ . Le but de cette section est d'établir des théorèmes de dualité de type Poitou-Tate pour les modules finis et les tores sur  $K$ .

**Remarque 3.2.** En comparant tous les résultats qui vont suivre à ceux des articles [HSz13], [HSSz15], [CTH15], [Izq16a] et [Izq17b], on remarquera que le corps  $K$  se comporte de manière très similaire au corps des fonctions d'une courbe sur un corps  $(p, d + 1)$ -bon pour la dualité. Par exemple, en ignorant les phénomènes liés à la caractéristique positive,  $\mathbb{C}((x, y))$  se comporte comme  $\mathbb{C}((x))(y)$  et  $\mathbb{F}_p(t)$ , et  $\mathbb{F}_p((x, y))$  et  $\mathbb{C}((t))((x, y))$  se comportent comme  $\mathbb{Q}_p(x)$  et  $\mathbb{C}((t))((x))(y)$ .



### 3.1 Dualité d'Artin-Verdier et descente galoisienne

**Lemme 3.3.** *La  $k^s$ -algèbre  $\overline{R} = R \otimes_k k^s$  est locale, intègre, normale, hensélienne, excellente, de dimension 2, de corps résiduel  $k^s$ .*

*Démonstration.* Comme  $R$  est géométriquement intègre,  $\overline{R}$  est intègre. Ainsi, pour chaque extension finie  $l$  de  $k$ , la  $l$ -algèbre  $R \otimes_k l$  est intègre. De plus, c'est une extension finie étale de  $R$ . Par conséquent, comme  $R$  est local normal hensélien excellent, il en est de même de  $R \otimes_k l$ . On vérifie immédiatement que l'idéal maximal de  $R \otimes_k l$  est  $\mathfrak{m}_l = \mathfrak{m} \otimes_k l$  et que le corps résiduel de  $R \otimes_k l$  est  $l$ . On déduit alors de la proposition 1 de l'appendice de [Bou06] et du corollaire 4.4 de [Mar79] que  $\overline{R}$  est un anneau local normal hensélien excellent d'idéal maximal  $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \otimes_k k^s$  et de corps résiduel  $k^s$ . Finalement, l'injection  $R \hookrightarrow \overline{R}$  étant plate, le théorème 4.3.12 de [Liu02] montre que  $\dim \overline{R} = \dim R = 2$ .  $\square$

**Théorème 3.4.** *Soient  $U$  un ouvert de  $X$  et  $F$  un schéma en groupes fini étale abélien sur  $U$  de  $n$ -torsion, avec  $n$  non divisible par  $p$ . Notons  $F' = \mathrm{Hom}(F, \mu_n^{\otimes(d+2)})$ . Le groupe  $H_c^{d+4}(U, \mu_n^{\otimes(d+2)})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et l'accouplement naturel :*

$$H^r(U, F) \times H_c^{d+4-r}(U, F') \rightarrow H_c^{d+4}(U, \mu_n^{\otimes(d+2)}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

*est un accouplement parfait de groupes finis.*

*Démonstration.* Notons  $G$  le groupe de Galois absolu de  $k$ . Comme  $k$  est un corps  $(p, d)$ -bon pour la dualité, on montre exactement comme dans le théorème 1.1 de [Izq16a] que l'on a un isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(M^\bullet, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))[d+1] \cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

pour chaque complexe  $M^\bullet$  de  $G$ -modules discrets de  $n$ -torsion borné inférieurement. Par ailleurs, d'après le théorème 2.3 et le lemme précédent, si l'on note  $\overline{U} = U \times_k k^s$  et  $\overline{F}$  la restriction de  $F$  à  $\overline{U}$ , on a des accouplements parfaits  $G$ -équivariants de groupes finis :

$$H^r(\overline{U}, \overline{F}) \times H_c^{3-r}(\overline{U}, \mathrm{Hom}(\overline{F}, \mu_n)) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1).$$

Comme dans le théorème 1.1 de [Izq16a], cela fournit un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens :

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\overline{U}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\overline{F}, \mu_n) \cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_c(\overline{U}, \overline{F}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1))[-3].$$

On conclut alors exactement de la même manière que la proposition 2.1 de [Izq16a].  $\square$

### 3.2 Dualité de Poitou-Tate pour les modules finis

Soit  $F$  un  $\mathrm{Gal}(K^s/K)$ -module fini d'ordre  $n$  non divisible par  $p$ . Notons  $F' = \mathrm{Hom}(F, \mu_n^{\otimes(d+2)})$ , et posons, pour  $r \in \{1, 2, \dots, d+3\}$  :

$$\mathrm{III}^r(K, F) = \mathrm{Ker} \left( H^r(K, F) \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} H^r(K_v, F) \right).$$

**Théorème 3.5.** *Pour  $r \in \{1, 2, \dots, d+3\}$ , il existe un accouplement parfait de groupes finis :*

$$\mathrm{III}^r(K, F) \times \mathrm{III}^{d+4-r}(K, F') \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

**Remarque 3.6.** Plaçons-nous dans le cas  $k = \mathbb{C}$ ,  $p = 0$ ,  $d = -1$ . Bien sûr, on aurait pu définir les groupes de Tate-Shafarevich en tenant compte de toutes les valuations discrètes de rang 1 de  $K$  :

$$\mathbb{III}_{tot}^r(K, F) := \text{Ker} \left( H^r(K, F) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_K} H^r(K_v, F) \right),$$

où  $\Omega_K$  désigne toutes les valuations discrètes de rang 1 de  $K$ . Cependant, on ne peut pas espérer une dualité parfaite de la forme :

$$\mathbb{III}_{tot}^1(K, F) \times \mathbb{III}_{tot}^2(K, F') \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

puisque  $\mathbb{III}_{tot}^2(K, \mu_n)$  est toujours nul (théorème 1.2 de [Hu14]) alors que  $\mathbb{III}_{tot}^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  peut être non nul (théorème 5 de [Jaw01]). Par ailleurs, ce dernier point montre que dans le théorème 3.5, les groupes de Tate-Shafarevich qui apparaissent ne sont pas toujours nuls.

Nous allons maintenant brièvement expliquer comment on obtient le théorème 3.5, la preuve étant analogue à celle du théorème 2.4 de [Izq16a]. Soit  $U$  un ouvert non vide de  $X$ . Considérons un schéma en groupes fini étale sur  $U$  prolongeant  $F$  : on le notera toujours  $F$ . Posons :

$$D_{sh}^r(U, F) = \text{Ker} \left( H^r(U, F) \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} H^r(K_v, F) \right),$$

$$\mathcal{D}^{d+4-r}(U, F') := \text{Im} \left( H_c^{d+4-r}(U, F') \rightarrow H^{d+4-r}(K, F') \right).$$

**Proposition 3.7.** (i) Il existe un ouvert non vide  $U_0$  de  $U$  tel que  $\mathcal{D}^{d+4-r}(V, F') = \mathbb{III}^{d+4-r}(K, F')$  pour chaque ouvert non vide  $V \subseteq U_0$ .

(ii) La suite  $\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+3-r}(K_v, F') \rightarrow H_c^{d+4-r}(U, F') \rightarrow \mathcal{D}^{d+4-r}(U, F') \rightarrow 0$  est exacte.

*Démonstration.* (i) Si  $V \subseteq V'$  sont des ouverts non vides de  $U$ , on a  $\mathcal{D}^{d+4-r}(V, F') \subseteq \mathcal{D}^{d+4-r}(V', F')$ . Comme  $\mathcal{D}^{d+4-r}(U, F')$  est fini, il existe un ouvert non vide  $U_0$  de  $U$  tel que  $\mathcal{D}^{d+4-r}(V, F') = \mathcal{D}^{d+4-r}(U_0, F')$  pour chaque ouvert non vide  $V \subseteq U_0$ . Par ailleurs, pour  $V \subseteq V'$  des ouverts non vides de  $U$ , on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{v \notin V'} H^{d+3-r}(K_v, F') & \longrightarrow & H_c^{d+4-r}(V', F') & \longrightarrow & H^{d+4-r}(V', F') & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin V'} H^{d+4-r}(K_v, F') \\ \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\ \bigoplus_{v \notin V} H^{d+3-r}(K_v, F') & \longrightarrow & H_c^{d+4-r}(V, F') & \longrightarrow & H^{d+4-r}(V, F') & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin V} H^{d+4-r}(K_v, F'). \end{array}$$

En prenant  $V' = U_0$ , une simple chasse au diagramme permet de montrer que  $U_0$  convient.

(ii) Ce n'est qu'une chasse au diagramme dans le diagramme de (i). □

On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D_{sh}^r(U, F) & \longrightarrow & H^r(U, F) & \longrightarrow & \prod_{v \in X^{(1)}} H^r(K_v, F) \\ & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}^{d+4-r}(U, F')^D & \longrightarrow & H_c^{d+4-r}(U, F')^D & \longrightarrow & \prod_{v \in X^{(1)}} H^{d+3-r}(K_v, F')^D. \end{array}$$

Le morphisme vertical central est un isomorphisme d'après le théorème 2.3. Pour voir que le morphisme vertical de droite est un isomorphisme, il suffit d'appliquer le même méthode que Milne dans le théorème I.2.17 de [Mil06] et d'utiliser que  $k$  est un corps  $(p, d)$ -bon pour la dualité. On obtient alors un isomorphisme  $D_{sh}^r(U, F) \cong \mathcal{D}^{d+4-r}(U, F')^D$ . Il suffit de passer à la limite sur  $U$  pour obtenir le théorème 3.5.

### 3.3 Dualité de Poitou-Tate pour les tores

**Théorème 3.8.** *Soit  $T$  un  $K$ -tore de module de caractères  $\hat{T}$  et de tore dual  $T'$ .*

(i) *Supposons  $d = -1$  (par exemple  $k$  séparablement clos). On a des accouplements parfaits de groupes finis :*

$$\begin{aligned} \text{III}^1(K, \hat{T})_{non-p} \times \overline{\text{III}^2(K, T)}_{non-p} &\rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \text{III}^1(K, T)_{non-p} \times \overline{\text{III}^2(K, \hat{T})}_{non-p} &\rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(ii) *Supposons que  $d = 0$  (par exemple  $k = \mathbb{C}((t))$  ou  $k$  fini). On a un accouplement parfait de groupes finis :*

$$\text{III}^1(K, T)_{non-p} \times \overline{\text{III}^2(K, T')}_{non-p} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* Les preuves sont semblables à celle du théorème 3.5.

(i) La preuve est en tous points analogue à celle des théorèmes 7.1 et 7.2 de [CTH15].

Rappelons brièvement les grandes étapes de la preuve du premier accouplement, le second étant obtenu de manière très similaire. Pour simplifier, on suppose que  $p = 0$ . Soit  $\ell$  un nombre premier. On considère  $\mathcal{T}$  un tore étendant  $T$  sur un ouvert non vide  $U$  de  $X$ . Pour  $v \in X^{(1)}$ , un argument identique à celui de la proposition 3.4 de [CTH15] montre que l'accouplement naturel :

$$H^1(K_v, \hat{T}) \times H^1(K_v, T) \rightarrow H^2(K_v, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est un accouplement parfait de groupes finis. De plus, le théorème 3.4 permet de prouver que, pour  $V$  ouvert non vide de  $U$ , l'accouplement naturel

$$H^1(V, \hat{T}) \times H_c^2(V, \mathcal{T}) \rightarrow H_c^3(V, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

induit un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^1(V, \hat{T})^{(\ell)} \times H_c^2(V, \mathcal{T})^{(\ell)} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Par conséquent, en introduisant pour chaque ouvert non vide  $V$  de  $U$  les groupes :

$$\begin{aligned} D_{sh}^1(V, \hat{T}) &= \text{Ker} \left( H^1(V, \hat{T}) \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, \hat{T}) \right), \\ \mathcal{D}^2(V, \mathcal{T}) &= \text{Im} (H_c^2(V, \mathcal{T}) \rightarrow H^2(K, T)), \end{aligned}$$

et en utilisant la suite exacte de localisation (proposition 3.1.(1) de [HSz13]), on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & D_{sh}^1(V, \hat{\mathcal{T}})\{\ell\} & \longrightarrow & H^1(V, \hat{\mathcal{T}})\{\ell\} & \longrightarrow & \prod_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, \hat{\mathcal{T}})\{\ell\} \\
& & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{D}^2(V, \mathcal{T})}\{\ell\}^D & \longrightarrow & \overline{H_c^2(V, \mathcal{T})}\{\ell\}^D & \longrightarrow & \prod_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, \mathcal{T})\{\ell\}^D.
\end{array}$$

Cela montre que  $D_{sh}^1(V, \hat{\mathcal{T}})\{\ell\}$  et  $\overline{\mathcal{D}^2(V, \mathcal{T})}\{\ell\}^D$  sont duaux l'un de l'autre. Reste à identifier ces deux groupes à des groupes de Tate-Shafarevich :

- on montre aisément (comme dans le lemme 7.3 de [CTH15]) que le morphisme  $H^1(V, \hat{\mathcal{T}}) \rightarrow H^1(K, \hat{\mathcal{T}})$  est injectif et donc que  $D_{sh}^1(V, \hat{\mathcal{T}}) = \text{III}^1(K, \hat{\mathcal{T}})$ ;
- le groupe  $\mathcal{D}^2(U, \mathcal{T})$  est abélien de torsion de type cofini, et pour  $V \subseteq V' \subseteq U$  des ouverts non vides, on a  $\mathcal{D}^2(V, \mathcal{T}) \subseteq \mathcal{D}^2(V', \mathcal{T})$ . Grâce au lemme 3.7 de [HSz13], on peut alors trouver un ouvert non vide  $U_0$  de  $U$  (dépendant de  $\ell$ ) tel que, pour tout ouvert non vide  $V$  de  $U_0$ , on ait  $\mathcal{D}^2(V, \mathcal{T})\{\ell\} = \mathcal{D}^2(U_0, \mathcal{T})\{\ell\}$ . Une chasse au diagramme montre alors que  $\mathcal{D}^2(U_0, \mathcal{T})\{\ell\} = \text{III}^2(K, \mathcal{T})\{\ell\}$ .

Cela achève la preuve.

- (ii) La preuve est très similaire à celle du théorème 4.4 de [HSz13] et à celle du théorème 3.10 de [Izq16a]. Il n'y a qu'une seule différence : comme  $X$  n'est pas une variété lisse sur un corps, il est moins clair qu'il existe un accouplement  $\mathbb{Z}(1) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(1) \rightarrow \mathbb{Z}(2)$  dans la catégorie dérivée des faisceaux étales sur  $X$  qui soit compatible avec le morphisme naturel  $\mu_n \otimes^{\mathbf{L}} \mu_n[1] \rightarrow \mu_n^{\otimes 2}[1]$ . Mais on peut voir dans la preuve du théorème 3.10 de [Izq16a] que l'on a en fait uniquement besoin d'un accouplement  $\mathbb{Z}(1) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$ . Et un tel accouplement existe bien puisque, pour chaque  $n \geq 1$ , d'après la proposition 1 de [Kah92], on a un morphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathbb{Z}(1) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1) \xleftarrow{\cong} (\mathbb{G}_m \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{G}_m)[-2] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2).$$

Une fois que l'on dispose de cet accouplement, on montre (ii) avec le même type d'arguments que (i). □

**Remarque 3.9.** • Dans (ii), si  $k$  est un corps fini, le groupe  $\text{III}^2(K, \mathbb{G}_m)_{\text{non-}p}$  est nul et donc le groupe  $\text{III}^2(K, T')$  est fini et on a un accouplement parfait de groupes finis :

$$\text{III}^1(K, T)_{\text{non-}p} \times \text{III}^2(K, T')_{\text{non-}p} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Pour prouver la nullité de  $\text{III}^2(K, \mathbb{G}_m)_{\text{non-}p}$ , il suffit de procéder comme dans la preuve de la proposition 3.4(2) de [HSz13], en remplaçant la dualité de Lichtenbaum par le théorème 0.11 de [Sai86].

- Il est aussi possible d'obtenir un théorème pour  $d$  quelconque. Pour ce faire, il faut poser  $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1)$ , comme dans la section 3 de [Izq16a]. On peut alors obtenir des accouplements parfaits de groupes finis :

$$\begin{aligned}
\text{III}^{d+2}(K, \tilde{T})_{\text{non-}p} \times \overline{\text{III}^2(K, T)_{\text{non-}p}} &\rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\text{III}^1(K, T)_{\text{non-}p} \times \overline{\text{III}^{d+3}(K, \tilde{T})_{\text{non-}p}} &\rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

La preuve est identique à celle du théorème 3.10 [Izq16a].

Pour les applications arithmétiques (en particulier le théorème 4.2), il sera utile d'avoir aussi un théorème de dualité pour certains complexes de tores à deux termes :

**Théorème 3.10.** *Supposons  $d = -1$  (par exemple  $k$  séparablement clos). Soit  $G$  un groupe de type multiplicatif sur  $K$ . Soit  $\rho : T_1 \rightarrow T_2$  un morphisme de tores algébriques sur  $K$  à noyau fini. Soient  $\mathcal{G}$  le complexe  $[T_1 \rightarrow T_2]$  où  $T_1$  est en degré  $-1$  et  $T_2$  en degré  $0$ , et  $\tilde{\mathcal{G}}$  le complexe  $[\hat{T}_2 \rightarrow \hat{T}_1]$  où  $\hat{T}_2$  est placé en degré  $-1$  et  $\hat{T}_1$  en degré  $0$ . On a alors un accouplement parfait de groupes finis :*

$$\mathrm{III}^1(K, G)_{\mathrm{non-p}} \times \overline{\mathrm{III}^1(K, \tilde{\mathcal{G}})}_{\mathrm{non-p}} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* La preuve est tout à fait analogue à celle du corollaire 4.18 du chapitre 1 de [Izq16b] ou du corollaire 2 de [Izq17a], et les idées sont similaires à celles du théorème 3.8. On se contente donc d'esquisser la preuve, en supposant (pour simplifier) que  $p = 0$ . Soit  $U$  un ouvert non vide de  $X$  sur lequel  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) s'étend en un tore  $\mathcal{T}_1$  (resp.  $\mathcal{T}_2$ ) et  $\rho$  s'étend en un morphisme  $\mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ , aussi noté  $\rho$ . Soient  $\mathcal{G}$  le complexe  $[\mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2]$  et  $\tilde{\mathcal{G}}$  le complexe  $[\hat{\mathcal{T}}_2 \rightarrow \hat{\mathcal{T}}_1]$ . Fixons  $\ell$  un nombre premier. En utilisant le théorème 3.4, on peut alors montrer qu'il y a un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^1(U, \mathcal{G})\{\ell\}^{(\ell)} \times H_c^1(U, \tilde{\mathcal{G}})^{(\ell)}\{\ell\} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (\sharp)$$

Introduisons maintenant les groupes :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^1(U, \tilde{\mathcal{G}}) &= \mathrm{Im} \left( H_c^1(U, \tilde{\mathcal{G}}) \rightarrow H^1(K, \tilde{\mathcal{G}}) \right), \\ D_{sh}^1(U, \mathcal{G}) &= \mathrm{Ker} \left( H^1(U, \mathcal{G}) \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, G) \right). \end{aligned}$$

En combinant la dualité parfaite ( $\sharp$ ) avec une dualité locale, on montre que l'on a un morphisme surjectif à noyau divisible  $D_{sh}^1(U, \mathcal{G})\{\ell\} \rightarrow \mathcal{D}^1(U, \tilde{\mathcal{G}})\{\ell\}^D$ . Or on peut prouver que, si  $U$  est suffisamment petit, on a  $\mathcal{D}^1(U, \tilde{\mathcal{G}})\{\ell\} = \mathrm{III}^1(K, \tilde{\mathcal{G}})\{\ell\}$ . Du coup, en passant à la limite sur  $U$ , on obtient un isomorphisme :

$$\overline{\mathrm{III}^1(K, G)\{\ell\}} \cong \overline{\mathrm{III}^1(K, \tilde{\mathcal{G}})\{\ell\}}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que le groupe  $\mathrm{III}^1(K, G)\{\ell\}$  est fini (car  $\rho$  est à noyau fini).  $\square$

## 4. Applications arithmétiques

On suppose toujours que  $k$  est un corps  $(p, d)$ -bon pour la dualité et on se donne comme dans la section 3 une  $k$ -algèbre  $R$  commutative, locale, géométriquement intègre (ie  $R \otimes_k k^s$  est intègre), normale, hensélienne, excellente, de dimension 2 et de corps résiduel  $k$ . On note toujours  $K$  son corps des fractions,  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal,  $\mathcal{X}$  le schéma  $\mathrm{Spec} R$  et  $X$  le schéma  $\mathcal{X} \setminus \{\mathfrak{m}\}$ . Le but de cette section est d'utiliser les théorèmes de dualité de type Poitou-Tate de la section précédente pour étudier le principe local-global et l'approximation faible sur  $K$ .

### 4.1 Principe local-global dans le cas $k = k^s$ et $\mathrm{Car}(k) = 0$

Supposons que  $k$  soit algébriquement clos de caractéristique 0. En particulier,  $k$  est un corps  $(-1, 0)$ -bon pour la dualité. Soient  $H$  un  $K$ -groupe linéaire réductif connexe et

$Z$  un espace principal homogène sous  $H$  tel que, pour chaque  $v \in X^{(1)}$ , on a  $Z(K_v) \neq \emptyset$ . D'après le théorème 1.6, on a une suite exacte :

$$\mathrm{Br}K \rightarrow \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \mathrm{Br} K_v \xrightarrow{\theta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0. \quad (b)$$

En considérant un modèle géométriquement intègre  $\mathcal{Z}$  de  $Z$  sur un ouvert non vide  $U$  de  $X$ , on peut définir un accouplement analogue à l'accouplement de Brauer-Manin pour les variétés sur les corps de nombres :

$$[\cdot, \cdot] : Z(\mathbb{A}_K) \times \mathrm{Br}(Z) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((P_v)_v, \alpha) \mapsto \theta((\alpha(P_v))_v),$$

où :

$$Z(\mathbb{A}_K) = \varinjlim_{V \subseteq U} \prod_{v \in V^{(1)}} \mathcal{Z}(\mathcal{O}_v) \times \prod_{v \in X \setminus V} Z(K_v).$$

Ici,  $V$  décrit les ouverts non vides de  $U$  et  $\mathcal{O}_v$  désigne le complété de l'anneau local de  $X$  en  $v$ . Notons :

$$\mathbb{B}(Z) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Z) \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} \mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Z \times_K K_v)).$$

Toujours en utilisant la suite exacte (b), on remarque que  $[\cdot, \cdot]$  induit un accouplement :

$$[\cdot, \cdot] : Z(\mathbb{A}_K) \times \mathbb{B}(Z) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et que  $Z(K)$  est contenu dans l'orthogonal de  $\mathbb{B}(Z)$  dans  $Z(\mathbb{A}_K)$  : cela définit une obstruction au principe local-global pour  $Z$ , que l'on appellera **obstruction de Brauer-Manin associée à  $\mathbb{B}(Z)$** .

On remarque que, pour  $\alpha \in \mathbb{B}(Z)$ , la valeur de  $[(P_v), \alpha]$  ne dépend pas du choix du point adélique  $(P_v) \in Z(\mathbb{A}_K)$ . Comme on dispose d'un isomorphisme canonique  $\mathbb{B}(Z) \rightarrow \mathbb{B}(H)$  (voir le lemme 5.2(iii) de [BvH09]), cela permet de définir un accouplement :

$$\mathrm{BM} : \mathrm{III}^1(H) \times \mathbb{B}(H) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ([Z], \alpha) \mapsto [(P_v), \alpha]$$

où  $(P_v) \in Z(\mathbb{A}_K)$  est un point adélique quelconque.

Par ailleurs, notons  $H^{ss}$  le sous-groupe dérivé de  $H$  et  $H^{sc}$  son revêtement universel, qui est semi-simple simplement connexe. Soit  $T$  un tore maximal de  $H$ . Notons  $T^{(sc)}$  l'image réciproque de  $T$  par le morphisme composé  $\rho : H^{sc} \rightarrow H^{ss} \rightarrow H$  et  $G = [T^{(sc)} \rightarrow T]$ . Comme dans la section 2 de l'article [Bor98] de Borovoi, pour  $L$  une extension de  $K$ , on définit la cohomologie galoisienne abélienne de  $H$  par  $H_{\mathrm{ab}}^r(L, H) = H^r(L, G)$ . Elle est munie de morphismes d'abélianisation  $\mathrm{ab}_L^1 : H^1(L, H) \rightarrow H_{\mathrm{ab}}^1(L, H)$  (voir section 3 de [Bor98]).

**Proposition 4.1.** *Pour chaque  $v \in X^{(1)}$ , le morphisme  $\mathrm{ab}_{K_v}^1$  est bijectif. Il en est de même du morphisme  $\mathrm{ab}_K^1$ .*

*Démonstration.* D'après les théorèmes 1.4 et 1.5 de [CTGP04],  $K$  et  $K_v$  sont des corps de caractéristique 0, de dimension cohomologique 2, tels que indice et exposant coïncident pour les algèbres simples centrales, et sur lesquels la conjecture de Serre II vaut. Il suffit donc de procéder comme dans le corollaire 5.4.1 de [Bor98] pour obtenir l'injectivité et d'invoquer le théorème 5.1(i) et l'exemple 5.4(vi) de [GA12] pour obtenir la surjectivité.  $\square$

Le noyau du morphisme  $T^{(sc)} \rightarrow T$  étant fini, le théorème 3.10 fournit un accouplement parfait de groupes finis de type Poitou-Tate :

$$\text{PT} : \text{III}^1(K, G) \times \overline{\text{III}^1(K, \tilde{G})} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

où  $\tilde{G}$  est le complexe  $[\hat{T}_2 \rightarrow \hat{T}_1]$  dans lequel  $\hat{T}_2$  est placé en degré -1 et  $\hat{T}_1$  en degré 0. Nous disposons d'isomorphismes permettant de comparer cet accouplement à l'accouplement de Brauer-Manin :

- d'après la proposition 4.1, les morphismes d'abélianisation induisent une bijection  $\text{ab}^1 : \text{III}^1(K, H) \rightarrow \text{III}^1(K, G)$ ,
- d'après le corollaire 2.20 et le théorème 4.8 de [BvH09], les groupes  $\text{Br}_{\text{al}}(H)$  et  $H^1(K, \tilde{G})$  sont isomorphes, ce qui induit un isomorphisme  $B : \mathbb{B}(H) \rightarrow \overline{\text{III}^1(K, \tilde{G})}$ .

On peut alors montrer, comme dans la proposition 2.5 de [Izq17b], que l'on a un diagramme commutatif au signe près :

$$\begin{array}{ccc} \text{BM} : & \text{III}^1(K, H) \times \overline{\mathbb{B}(H)} & \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ & \downarrow \text{ab}^1 & \downarrow B \\ \text{PT} : & \text{III}^1(K, G) \times \overline{\text{III}^1(K, \tilde{G})} & \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

On en déduit le théorème :

**Théorème 4.2.** *Supposons que  $k$  soit algébriquement clos de caractéristique 0. Soit  $H$  un groupe réductif connexe sur  $K$ . L'accouplement de Brauer-Manin :*

$$\text{III}^1(K, H) \times \overline{\mathbb{B}(H)} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

*induit une bijection  $\text{III}^1(K, H) \cong \overline{\mathbb{B}(H)}^D$ . En particulier, l'obstruction de Brauer-Manin associée à  $\mathbb{B}(Z)$  est la seule obstruction pour les espaces principaux homogènes sous  $H$ .*

À la fin de l'article [CTPS16], J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala et V. Suresh soulèvent la question suivante :

**Question 4.3** ([CTPS16]). *Gardons les notations du théorème 4.2. Soit  $Z$  est un espace principal homogène sous  $H$  et donnons-nous une désingularisation  $\tilde{\mathcal{X}}$  de  $\mathcal{X}$  comme dans la section 1.2. Supposons qu'il existe une famille  $(P_v) \in Z(\mathbb{A}_K) \times \prod_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus \mathcal{X}^{(1)}} Z(K_v)$  telle que pour tout  $A \in \mathbb{B}(Z)$  :*

$$(\partial_v(A(P_v)))_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)}} \in \text{Ker} \left( \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)}} H^1(k(v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\partial_{v,w}} \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \right).$$

*Ici, les morphismes  $\partial_v : \text{Br } K_v \rightarrow H^1(k(v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$  et  $\partial_{v,w} : H^1(k(v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^0(k(w), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  sont induits par les morphismes résidus. Peut-on alors déduire que  $Z$  a un point rationnel ?*

**Corollaire 4.4.** *Gardons les notations du théorème 4.2 et de la question 4.3. Supposons qu'il existe une famille  $(P_v) \in Z(\mathbb{A}_K) \times \prod_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}} Z(K_v)$  telle que pour tout  $A \in \mathbb{B}(Z)$  :*

$$\sum_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \sum_{\substack{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \\ w \in Z_v}} \partial_{v,w}(\partial_v(A(P_v))) = 0.$$

Alors  $Z$  a un point rationnel. En particulier, la question 4.3 admet une réponse affirmative.

*Démonstration.* On reprend toutes les notations de la section 1.2. En se rappelant des preuves du lemme 1.4 et du théorème 1.6), on voit que le morphisme surjectif  $\theta : \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \text{Br } K_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)}} \text{Br } K_v & \xrightarrow{\partial_v} \cong \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)}} H^1(k(v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) & \xrightarrow{\partial_{v,w}} \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \uparrow & & \downarrow \Sigma \\ \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \text{Br } K_v & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

On a alors, pour tout  $A \in \mathbb{B}(Z)$  :

$$\begin{aligned} [(P_v)_v, A] &= \theta((A(P_v))_v) \\ &= \sum_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \sum_{\substack{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \\ w \in Y_v}} \partial_{v,w}(\partial_v(A(P_v))) \\ &= \sum_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \sum_{\substack{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \\ w \in Y_v}} \partial_{v,w}(\partial_v(A(P_v))) - \sum_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \sum_{\substack{v \in Y^{(0)} \\ w \in Y_v}} \partial_{v,w}(\partial_v(A(P_v))) \\ &= \sum_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \sum_{\substack{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \\ w \in Y_v}} \partial_{v,w}(\partial_v(A(P_v))) - \sum_{v \in Y^{(0)}} \sum_{w \in Y_v^{(1)}} \partial_{v,w}(\partial_v(A(P_v))). \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \sum_{\substack{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \\ w \in Y_v}} \partial_{v,w}(\partial_v(A(P_v))) = 0$$

par hypothèse, et pour chaque  $v \in Y^{(0)}$ ,

$$\sum_{w \in Y_v^{(1)}} \partial_{v,w}(\partial_v(A(P_v))) = 0$$

d'après la loi de réciprocité de Weil sur la courbe projective lisse  $Y_v$ . Par conséquent, pour tout  $A \in \mathbb{B}(Z)$ , on a  $[(P_v)_v, A] = 0$ . D'après le théorème 4.2, on en déduit que  $Z(K) \neq \emptyset$ .  $\square$

## 4.2 Principe local-global dans le cas général

On ne fait plus d'hypothèse sur  $d$  ni sur  $p$ . Ainsi, le corps  $k$  peut être séparablement clos de caractéristique positive, fini,  $\ell$ -adique, ou encore  $\mathbb{C}((t))$ . Soient  $T$  un tore sur  $K$  et  $Z$  un espace principal homogène sous  $T$  tel que  $Z(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$  et qui devient trivial sur une



extension finie de  $K$  de degré non divisible par  $p$ . La théorie de Bloch-Ogus (rappelée par exemple dans le paragraphe 2 de [CTPS16]) fournit un complexe :

$$H^{d+3}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p} \rightarrow \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+3}(K_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p} \xrightarrow{\vartheta} H^{d+1}(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))_{\text{non-}p}. \quad (bb)$$

Comme dans le paragraphe précédent, en identifiant les groupes  $H^{d+1}(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))_{\text{non-}p}$  et  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{non-}p}$ , on peut alors définir un accouplement à la Brauer-Manin :

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : Z(\mathbb{A}_K) \times H^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p} &\rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((P_v)_v, \alpha) &\mapsto \vartheta((\alpha(P_v))_v). \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} H_{\text{lc}}^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2)) &= \text{Ker}(H^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))/\text{Im}(H^{d+3}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))) \\ &\rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} H^{d+3}(Z_{K_v}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))/\text{Im}(H^{d+3}(K_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))) \end{aligned}$$

où  $Z_{K_v}$  désigne  $Z \times_K K_v$ . En utilisant de nouveau le complexe (bb), on remarque que l'accouplement  $[\cdot, \cdot]$  induit un accouplement :

$$[\cdot, \cdot] : Z(\mathbb{A}_K) \times H_{\text{lc}}^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et que  $Z(K)$  est contenu dans l'orthogonal de  $H_{\text{lc}}^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p}$ . De plus, pour  $\alpha \in H_{\text{lc}}^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p}$ , la quantité  $[(P_v)_v, \alpha]$  est indépendante du choix du point adélique  $(P_v) \in Z(\mathbb{A}_K)$ . L'accouplement  $[\cdot, \cdot]$  induit donc un morphisme :

$$\rho_Z : H_{\text{lc}}^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

**Proposition 4.5.** *Soit :*

$$PT : \text{III}^1(K, T)_{\text{non-}p} \times \overline{\text{III}^{d+3}(K, \tilde{T})_{\text{non-}p}} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

*l'accouplement parfait de la remarque 3.9. Il existe un morphisme*

$$\tau : \text{III}^{d+3}(K, \tilde{T})_{\text{non-}p} \rightarrow H_{\text{lc}}^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p}$$

*tel que l'on ait  $\rho_Z \circ \tau = PT([Z], \cdot)$ .*

*Démonstration.* La preuve est analogue à la partie 5 de [HSz13]. On se contente de rappeler brièvement la construction de  $\tau$ .

Notons  $\bar{Z} = Z \times_K K^s$ . La suite spectrale

$$H^p(K, H^q(\bar{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))) \Rightarrow H^{p+q}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))$$

induit un morphisme :

$$H^{d+2}(K, H^1(\bar{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))) \rightarrow H^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2)).$$

Comme dans le lemme 5.2 de [HSz13], on a un isomorphisme de modules galoisiens  $H^1(\bar{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p} \cong \hat{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)_{\text{non-}p}$ . On obtient donc un morphisme :

$$H^{d+2}(K, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))_{\text{non-}p} \rightarrow H^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p}.$$

D'après le lemme 3.1 de [Izq16a], les groupes  $H^{d+2}(K, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}(d+1))$  et  $H^{d+3}(K, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}(d+1))$  sont triviaux. En exploitant le triangle distingué

$$\hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d+1) \rightarrow \hat{T} \otimes \mathbb{Q}(d+1) \rightarrow \hat{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1) \rightarrow \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d+1)[1],$$

on montre alors que  $H^{d+2}(K, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))_{\text{non-}p} \cong H^{d+3}(K, \tilde{T})_{\text{non-}p}$ , ce qui fournit un morphisme :

$$H^{d+3}(K, \tilde{T})_{\text{non-}p} \rightarrow H^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p}.$$

En passant aux éléments localement triviaux, on obtient un morphisme :

$$\text{III}^{d+3}(K, \tilde{T})_{\text{non-}p} \rightarrow H_{\text{lc}}^{d+3}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non-}p}.$$

C'est le morphisme  $\tau$ . □

La proposition précédente entraîne alors le théorème suivant :

**Théorème 4.6.** *Soient  $T$  un tore sur  $K$  et  $Z$  un espace principal homogène sous  $T$  tel que  $Z(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$  et qui devient trivial sur une extension finie de  $K$  de degré non divisible par  $p$ . Si  $\rho_Z$  est trivial, alors  $Z(K) \neq \emptyset$ .*

Comme dans le paragraphe 4.1, en prenant  $d = -1$ , cela répond affirmativement à la question de J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala et V. Suresh posée à la toute fin de l'article [CTPS16] dans le cas (b) lorsque  $k$  est de caractéristique quelconque.

Pour terminer ce paragraphe, remarquons qu'en utilisant la remarque 3.9 et en procédant comme dans le corollaire 5.7 de [HSz13], on peut obtenir la proposition :

**Proposition 4.7.** *Supposons  $k$  fini de caractéristique  $p$  et considérons un tore stablement rationnel  $T$  sur  $K$ . Soit  $Z$  un espace principal homogène sous  $T$  tel que  $Z(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$  et qui devient trivial sur une extension finie de  $K$  de degré non divisible par  $p$ . Alors  $Z$  vérifie le principe local-global.*

*Démonstration.* Comme  $T$  est stablement rationnel, il existe une résolution de  $T'$  :

$$0 \rightarrow T' \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow 0$$

où  $R$  et  $S$  sont des tores quasi-triviaux (proposition 6 de [CTS77]). Or la remarque 3.9 impose que  $\text{III}^2(K, R)_{\text{non-}p}$  est trivial. On en déduit que  $\text{III}^2(K, T')_{\text{non-}p} = 0$ , et le théorème 3.8 permet de conclure que  $\text{III}^1(K, T)_{\text{non-}p} = 0$ . □

### 4.3 Approximation faible

On suppose dans ce paragraphe que  $p = 0$ . En particulier,  $k$  est de caractéristique nulle. Pour  $M$  un  $\text{Gal}(K^s/K)$ -module discret, on note  $\text{III}_\omega^2(K, M)$  l'ensemble des éléments de  $H^2(K, M)$  dont la restriction à  $H^2(K_v, M)$  est triviale pour presque tout  $v \in X^{(1)}$ . On rappelle la définition 1.1 de [Izq17b] :

**Définition 4.8.** *Soit  $T$  un  $K$ -tore. On dit que  $T$  vérifie l'**approximation faible** si  $T(K)$  est dense dans  $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$ , où le groupe  $T(K_v)$  est muni de la topologie  $v$ -adique pour chaque  $v$ . On dit que  $T$  vérifie l'**approximation faible faible** (resp. l'**approximation faible faible dénombrable**) s'il existe une partie finie (resp. dénombrable)  $S_0$  de  $X^{(1)}$  telle que, pour toute partie finie  $S$  de  $X^{(1)}$  n'intersectant pas  $S_0$ , le groupe  $T(K)$  est dense dans  $\prod_{v \in S} T(K_v)$ .*

Exactement comme dans la section 9 de [CTH15], dans la section 3 de [HSSz15] ou encore dans la section 1 de [Izq17b], on peut comprendre l'obstruction à l'approximation faible :

**Théorème 4.9.** *Soit  $T$  un  $K$ -tore de module de caractères  $\hat{T}$  et de tore dual  $T'$ . On note  $\overline{T(K)}$  l'adhérence de  $T(K)$  dans  $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$ .*

(i) *Supposons  $d = -1$  (par exemple  $k = \mathbb{C}$ ). On a la suite exacte :*

$$0 \rightarrow \overline{T(K)} \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \rightarrow (\mathbb{III}_\omega^2(K, \hat{T}))^D \rightarrow (\mathbb{III}^2(K, \hat{T}))^D \rightarrow 0.$$

*Le tore  $T$  vérifie toujours l'approximation faible faible, et il vérifie l'approximation faible si, et seulement si,  $\mathbb{III}^2(K, \hat{T}) = \mathbb{III}_\omega^2(K, \hat{T})$ .*

(ii) *Supposons que  $d = 0$  (par exemple  $k = \mathbb{C}((t))$ ). On a la suite exacte :*

$$0 \rightarrow \overline{T(K)} \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \rightarrow (\mathbb{III}_\omega^2(K, T'))^D \rightarrow (\mathbb{III}^2(K, T'))^D \rightarrow 0.$$

*Le tore  $T$  vérifie l'approximation faible si, et seulement si,  $\mathbb{III}^2(K, T') = \mathbb{III}_\omega^2(K, T')$ . Le tore  $T$  vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, le groupe de torsion  $\mathbb{III}_\omega^2(K, T')$  est de type cofini. Le tore  $T$  vérifie l'approximation faible faible dénombrable si, et seulement si, le groupe de torsion  $\mathbb{III}_\omega^2(K, T')$  est dénombrable.*

*Démonstration. (Esquisse).* Voici les grandes étapes pour (i) :

1. On montre d'abord que, pour  $F$  un  $\text{Gal}(K^s/K)$ -module fini et  $S$  une partie finie de  $X^{(1)}$ , on a une suite exacte :

$$H^1(K, F) \rightarrow \prod_{v \in S} H^1(K_v, F) \rightarrow \mathbb{III}_S^1(K, F')^D \rightarrow \mathbb{III}^1(K, F')^D \rightarrow 0,$$

où  $\mathbb{III}_S^1(K, M) = \text{Ker} \left( H^1(K, M) \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)} \setminus S} H^1(K_v, M) \right)$  pour chaque module galoisien  $M$ .

2. L'exploitation de la suite exacte précédente avec  $F = \mu_n$  permet de montrer que  $\mathbb{III}_S^2(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{III}^2(K, \mathbb{Z})$ . D'après le théorème 3.8, c'est un groupe de torsion de type cofini divisible. De plus, l'égalité  $\mathbb{III}_S^2(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{III}^2(K, \mathbb{Z})$  permet de vérifier que le théorème est vrai pour les tores quasi-triviaux.

3. Le lemme d'Ono (théorème 1.5.1 de [Ono61]) fournit une résolution :

$$0 \rightarrow F \rightarrow R_0 \rightarrow T^m \times R_1 \rightarrow 0$$

pour un certain entier  $m > 0$ , un certain groupe fini étale  $F$  et deux tores quasi-triviaux  $R_0$  et  $R_1$ . En appliquant l'étape 1 à  $F$  et l'étape 2 à  $R_0$  et  $R_1$ , on établit une suite exacte :

$$0 \rightarrow \overline{T(K)}_S \rightarrow \prod_{v \in S} T(K_v) \rightarrow (\mathbb{III}_S^2(K, \hat{T}))^D,$$

où  $\overline{T(K)}_S$  désigne l'adhérence de  $T(K)$  dans  $\prod_{v \in S} T(K_v)$ . En passant à la limite projective sur  $S$ , on obtient l'exactitude de :

$$0 \rightarrow \overline{T(K)} \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \rightarrow (\mathbb{III}_\omega^2(K, \hat{T}))^D.$$

4. L'exactitude de  $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \rightarrow (\mathbb{H}_\omega^2(K, \hat{T}))^D \rightarrow (\mathbb{H}^2(K, \hat{T}))^D \rightarrow 0$  s'obtient en dualisant la suite exacte  $0 \rightarrow \mathbb{H}^2(K, \hat{T}) \rightarrow \mathbb{H}_\omega^2(K, \hat{T}) \rightarrow \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^2(K_v, \hat{T})$ .
5. De la suite exacte :

$$0 \rightarrow \overline{T(K)} \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \rightarrow (\mathbb{H}_\omega^2(K, \hat{T}))^D \rightarrow (\mathbb{H}^2(K, \hat{T}))^D \rightarrow 0$$

on déduit que  $T$  vérifie l'approximation faible si, et seulement si,  $\mathbb{H}^2(K, \hat{T}) = \mathbb{H}_\omega^2(K, \hat{T})$ , et qu'il vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si,  $\mathbb{H}^2(K, \hat{T})$  est d'indice fini dans  $\mathbb{H}_\omega^2(K, \hat{T})$ . En écrivant une résolution flasque de  $T$ , on peut vérifier que cette dernière condition est toujours satisfaite.  $\square$

**Remarque 4.10.** • La preuve de (ii) est similaire.

- Comme dans la remarque 3.9, on pourrait obtenir un résultat pour l'approximation faible dans le cas où  $d$  est quelconque en faisant intervenir les complexes de Bloch.

## A. Dualité, par Joël Riou

Dans cet appendice, on montre que le théorème 0.2 peut se déduire des résultats généraux de Gabber sur les complexes dualisants en cohomologie étale [Rio14]. L'énoncé suivant généralise le théorème 0.2 :

**Théorème A.1.** *Soit  $X$  un schéma local strictement hensélien excellent normal de dimension 2. On note  $x$  le point fermé de  $X$  et  $\dot{X} := X - \{x\}$ . Soit  $n$  un entier inversible sur  $X$ . Alors, il existe un isomorphisme canonique en cohomologie étale  $H^3(\dot{X}, \mu_n^{\otimes 2}) \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Notons  $\Lambda := \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  et  $D_c^b(X, \Lambda)$  la catégorie dérivée bornée constructible des faisceaux étales de  $\Lambda$ -modules sur  $X$ . Pour tout objet  $M \in D_c^b(X, \Lambda)$ , notons  $M' := \mathbf{RHom}(M, \mu_n^{\otimes 2}) \in D_c^b(X, \Lambda)$ . Alors, le  $\cup$ -produit induit une dualité parfaite entre groupes finis pour tout  $r \in \mathbf{Z}$  :*

$$H^r(\dot{X}, M) \times H^{3-r}(\dot{X}, M') \rightarrow H^3(\dot{X}, \mu_n^{\otimes 2}) \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

Ce résultat implique le théorème 0.2. En effet, si  $U$  est un ouvert de  $\dot{X}$  et  $F$  un schéma en groupes fini étale sur  $U$  tué par  $n$ , on peut noter  $\mathcal{F}$  le faisceau étale sur  $U$  représenté par  $F$  et  $k: U \rightarrow \dot{X}$  l'immersion ouverte : on obtient le théorème 0.2 en appliquant l'énoncé ci-dessus au faisceau  $M := k_! \mathcal{F}$ .

Pour tout schéma excellent  $X$  muni d'une fonction de dimension  $\delta: X \rightarrow \mathbf{Z}$  et sur lequel un entier  $n$  est inversible, Gabber a construit un « complexe dualisant potentiel »  $K_X \in D_c^b(X, \Lambda)$  qui est unique à isomorphisme unique près [Rio14, Théorème 5.1.1] et qui est un complexe dualisant au sens où le foncteur  $D_X := \mathbf{RHom}(-, K_X)$  réalise une antiéquivalence de catégorie de  $D_c^b(X, \Lambda)$  dans elle-même : la transformation naturelle  $M \rightarrow D_X^2 M$  est un isomorphisme pour tout  $M \in D_c^b(X, \Lambda)$  [Rio14, Théorème 6.1.1]. Parmi les propriétés de ces complexes dualisants potentiels, on retiendra en particulier :

- si  $X$  est régulier (et connexe), alors  $K_X \simeq \Lambda(n)[2n]$  où  $n = \delta(\eta)$ ,  $\eta$  étant le point générique de  $X$  [Rio14, Proposition 2.4.4.1] ;
- si  $f: Y \rightarrow X$  est de type fini, alors on a un isomorphisme canonique  $K_Y = f^! K_X$  où  $Y$  est muni d'une fonction de dimension appropriée déduite de  $f$  et  $\delta: X \rightarrow \mathbf{Z}$  [Rio14, Proposition 4.1.2].

**Lemme A.2.** *Soit  $X$  un schéma local. On note  $i: x \rightarrow X$  l'inclusion du point fermé et  $j: \dot{X} \rightarrow X$  l'inclusion de l'ouvert complémentaire  $\dot{X} = X - \{x\}$ . Soit  $D^+(\dot{X}, \Lambda)$  la catégorie dérivée bornée inférieurement des faisceaux étales de  $\Lambda$ -modules sur  $\dot{X}$ . Alors, pour tout  $M \in D^+(\dot{X}, \Lambda)$ , il existe un isomorphisme canonique  $i^*Rj_*M \simeq Ri^!j_!M[1]$  dans  $D^+(x, \Lambda)$ .*

*Si  $X$  est strictement hensélien, on peut identifier  $D^+(x, \Lambda)$  avec la catégorie dérivée des  $\Lambda$ -modules et alors les deux objets précédents s'identifient à  $R\Gamma(\dot{X}, M)$  dont les objets de cohomologie sont les groupes  $H^r(\dot{X}, M)$  pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ .*

Pour tout objet  $L \in D^+(X, \Lambda)$ , on dispose d'un triangle distingué canonique :

$$i_*Ri^!L \rightarrow L \rightarrow Rj_*j^*L \rightarrow i_*Ri^!L[1]$$

En faisant  $L := j_!M$  et en appliquant le foncteur  $i^*$  au triangle distingué obtenu, on obtient le triangle distingué suivant :

$$Ri^!j_!M \rightarrow i^*j_!M \rightarrow i^*Rj_*M \rightarrow Ri^!j_!M[1]$$

Comme  $i^*j_!M \simeq 0$ , on obtient l'isomorphisme voulu  $i^*Rj_*M \simeq Ri^!j_!M[1]$ , et bien sûr, si  $X$  est strictement hensélien, on a une identification  $i^*Rj_*M \simeq R\Gamma(\dot{X}, M)$ .

Pour démontrer le théorème A.1, nous allons établir la proposition suivante :

**Proposition A.3.** *Soit  $X$  un schéma local excellent normal de dimension 2. Soit  $n$  un entier inversible sur  $X$ . Pour tout  $M \in D_c^b(\dot{X}, \Lambda)$ , il existe dans  $D_c^b(x, \Lambda)$  un isomorphisme canonique  $\mathbf{RHom}(i^*Rj_*M, \Lambda) \simeq i^*Rj_*M'[3]$  où  $M' := \mathbf{RHom}(M, \mu_n^{\otimes 2})$ .*

Notons  $\delta: X \rightarrow \mathbf{Z}$  la fonction de dimension sur  $X$  telle que  $\delta(x) = 0$  où  $x$  est le point fermé de  $X$ . Si on note  $\eta$  le point générique de  $X$ , on a  $\delta(\eta) = 2$ . Notons  $K_X$  le complexe dualisant potentiel sur  $X$  associé à cette fonction de dimension  $\delta$ . Notons  $j: \dot{X} \rightarrow X$  l'inclusion de l'ouvert  $\dot{X} = X - \{x\}$ . Comme  $\dot{X}$  est normal de dimension 1, il est régulier. On en déduit que le complexe dualisant potentiel  $K_{\dot{X}} := j^*K_X \in D_c^b(\dot{X}, \Lambda)$  est canoniquement isomorphe à  $\Lambda(2)[4]$ . Comme  $\delta(x) = 0$ , on a aussi un isomorphisme canonique  $K_x := Ri^!K_X \simeq \Lambda$ . On note  $D_X$  le foncteur de dualité  $\mathbf{RHom}(-, K_X)$  sur  $D_c^b(X, \Lambda)$ . On note de même  $D_{\dot{X}}$  et  $D_x$  les foncteurs de dualité associés aux complexes dualisants potentiels  $K_{\dot{X}}$  et  $K_x$ .

Les propriétés formelles de la dualité et le lemme précédent donnent les isomorphismes canoniques suivants dans  $D_c^b(x, \Lambda)$ , pour tout  $M \in D_c^b(\dot{X}, \Lambda)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{RHom}(i^*Rj_*M, \Lambda) &= D_x i^*Rj_*M \\ &= Ri^!D_X Rj_*M \\ &= Ri^!j_!D_{\dot{X}}M \\ &= Ri^!j_! \mathbf{RHom}(M, \mu_n^{\otimes 2})[4] \\ &= Ri^!j_!M'[4] \\ &= i^*Rj_*M'[3]. \end{aligned}$$

Démontrons le théorème A.1. Comme  $X$  est strictement hensélien, la proposition et le lemme précédents impliquent que pour tout  $M \in D_c^b(\dot{X}, \Lambda)$  et tout  $r \in \mathbf{Z}$ , on a une dualité parfaite de groupes finis :

$$H^r(\dot{X}, M) \times H^{3-r}(\dot{X}, M') \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

En particulier, avec  $M = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , on obtient un isomorphisme canonique  $H^3(\dot{X}, \mu_n^{\otimes 2}) \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . En utilisant les idées de [Rio14, §12], on peut vérifier que la dualité parfaite obtenue ci-dessus est bien induite (au moins au signe près) par le  $\cup$ -produit et que l'isomorphisme  $H^3(\dot{X}, \mu_n^{\otimes 2}) \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  obtenu ici est le même que celui de [Rio14, Théorème 3.1.1].

## Références

- [Ber63] Claude Berge. *Théorie des graphes et ses applications*, deuxième édition. Dunod, Paris, 1963.
- [Bor98] Mikhail Borovoi. Abelian Galois cohomology of reductive groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 132(626) :viii+50, 1998.
- [BvH09] Mikhail Borovoi and Joost van Hamel. Extended Picard complexes and linear algebraic groups. *J. Reine Angew. Math.*, 627 :53–82, 2009.
- [Bou06] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 8 et 9*. Springer, Berlin, 2006 (reprint of the 1983 original).
- [CTGP04] Jean-Louis Colliot-Thélène, Philippe Gille, and Raman Parimala. Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields. *Duke Math. J.*, 121(2) :285–341, 2004.
- [CTH15] Jean-Louis Colliot-Thélène and David Harari. Dualité et principe local-global pour les tores sur une courbe au-dessus de  $\mathbb{C}((t))$ . *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(6) :1475–1516, 2015.
- [CTPS16] Jean-Louis Colliot-Thélène, Raman Parimala, and Venapally Suresh. Lois de réciprocité supérieures et points rationnels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(6) :4219–4255, 2016.
- [CTS77] Jean-Louis Colliot-Thélène and Jean-Jacques Sansuc. La  $R$ -équivalence sur les tores. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 10 :175–229, 1977.
- [GA12] Cristian D. González-Avilés. Quasi-abelian crossed modules and nonabelian cohomology. *J. Algebra*, 369 :235–255, 2012.
- [HHK14] David Harbater, Julia Hartmann, and Daniel Krashen. Local-global principles for Galois cohomology. *Comment. Math. Helv.*, 89(1) :215–253, 2014.
- [HSz13] David Harari and Tamás Szamuely. Local-global principles for tori over  $p$ -adic function fields. 2013. *J. Algebraic Geom.*, 25(3) :571–605, 2016.
- [HSSz15] David Harari, Claus Scheiderer and Tamás Szamuely. Weak approximation for tori over  $p$ -adic function fields. *Int. Math. Res. Not.*, 10 :2751–2783, 2015.
- [Hu14] Yong Hu. A cohomological Hasse principle over two-dimensional local rings. 2014. A paraître dans *Internat. Math. Res. Notices*.
- [Izq15] Diego Izquierdo. Principe local-global pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs I. *J. Number Theory*, 157 :250–270, 2015.
- [Izq16a] Diego Izquierdo. Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs. *Mathematische Zeitschrift*, 284(1-2) :615–642, 2016.
- [Izq16b] Diego Izquierdo. Dualité et principe local-global sur les corps de fonctions, thèse, disponible sur <http://www.math.ens.fr/~izquierd/>, 2016.
- [Izq17a] Diego Izquierdo. Dualité pour les groupes de type multiplicatif sur certains corps de fonctions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 355(3) :268–271, 2017.
- [Izq17b] Diego Izquierdo. Principe local-global pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs II. A paraître dans le tome 145, fascicule 2 du *Bull. de la SMF*, 2017.
- [Jaw01] Piotr Jaworski. On the strong Hasse principle for fields of quotients of power series rings in two variables. *Math. Z.*, 236(3) :531–566, 2001.
- [Kah92] Bruno Kahn. The decomposable part of motivic cohomology and bijectivity of the norm residue homomorphism. In *Algebraic K-theory, commutative algebra, and algebraic geometry (Santa Margherita Ligure, 1989)*, volume 126 of *Contemp. Math.*, pages 79–87. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

- 
- [Lip78] Joseph Lipman. Desingularization of two-dimensional schemes. *Ann. Math. (2)*, 107(1) :151–207, 1978.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [Mar79] Jean Marot. Limite inductive plate de  $P$ -anneaux. *Journal of Algebra*, 57(2) :484–496, 1979.
- [Mil06] James S. Milne. *Arithmetic duality theorems*. BookSurge, LLC, Charleston, SC, second edition, 2006.
- [Ono61] Takashi Ono. Arithmetic of algebraic tori. *Ann. of Math. (2)*, 74 :101–139, 1961.
- [Rio14] Joël Riou. Exposé XVII. Dualité. Travaux de Gabber sur l’uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents, *Astérisque*, 363-364 :351–453, 2014.
- [Sai86] Shuji Saito. Arithmetic on two-dimensional local rings. *Invent. Math.*, 85(2) :379–414, 1986.
- [Ser94] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*, fifth edition. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Shi07] Atsushi Shiho. On Logarithmic Hodge-Witt Cohomology of Regular Schemes. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 14 :567–635, 2007.