

# DUALITÉ POUR LES GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF SUR CERTAINS CORPS DE FONCTIONS

Diego Izquierdo

École Normale Supérieure

45, Rue d'Ulm - 75005 Paris - France

diego.izquierdo@ens.fr

**Résumé.** Soit  $K$  le corps des fonctions d'une courbe projective lisse  $X$  sur un corps local supérieur  $k$ . On définit les groupes de Tate-Shafarevich d'un schéma en groupes commutatif en considérant les classes de cohomologie qui deviennent triviales sur chaque complété de  $K$  provenant d'un point fermé de  $X$ . Dans cette note, on énonce et on esquisse la preuve d'un théorème de dualité arithmétique pour les groupes de Tate-Shafarevich des groupes de type multiplicatif sur  $K$  (ou encore de certains complexes à deux termes de tores sur  $K$ ).

**Abstract.** Let  $K$  be the function field of a smooth projective curve  $X$  over a higher-dimensional local field  $k$ . We define Tate-Shafarevich groups of a commutative group scheme via cohomology classes locally trivial at each completion of  $K$  coming from a closed point of  $X$ . In this note, we state and sketch the proof of an arithmetic duality theorem for Tate-Shafarevich groups of groups of multiplicative type over  $K$  (and more generally of some two-term complexes of tori over  $K$ ).

Le but de cette note est d'énoncer un théorème de dualité pour certains complexes à deux termes de tores sur le corps des fonctions d'une courbe définie sur un corps de la forme  $\mathbb{Q}_p((t_2))\dots((t_d))$  ou encore  $\mathbb{C}((t_0))\dots((t_d))$ . Il s'agit d'une généralisation du théorème 4.1 de [HSz16], des théorèmes 7.1 et 7.2 de [CTH15] et du théorème 3.10 de [Izq16a]. Comme cela est fait dans la section 2.2 de [Izq14], il est possible d'appliquer cette généralisation à l'étude des obstructions au principe local-global pour les torseurs sous un groupe linéaire connexe sur le corps des fonctions d'une  $\mathbb{C}((t))$ -courbe.

**Remerciements.** Je tiens à remercier David Harari pour son soutien et ses conseils. Je voudrais également remercier l'École Normale Supérieure pour les excellentes conditions de travail.

**Notations.** Pour chaque groupe abélien  $A$  et chaque nombre premier  $l$ , on notera  $\overline{A}$  le quotient de  $A$  par son sous-groupe divisible maximal,  $A\{l\}$  le sous-groupe de torsion  $l$ -primaire de  $A$  et  $A^{(l)}$  (resp.  $A^\wedge$ ) la limite projective pour  $n > 0$  des  $A/l^n A$  (resp.  $A/nA$ ).

**Cadre.** Dans cette note, les corps 0-locaux sont, par définition, les corps finis et  $\mathbb{C}((t))$ . Pour  $d \geq 1$ , un corps  $d$ -local est un corps de valuation discrète complet à corps résiduel  $(d-1)$ -local. On fixe pour la suite un entier naturel  $d$  et un corps  $d$ -local  $k$  de caractéristique nulle. On suppose que le corps 1-local  $k_1$  associé à  $k$  est aussi de caractéristique nulle : cela signifie que  $k$  est de la forme  $\mathbb{C}((t_0))\dots((t_d))$  ou  $k_1((t_2))\dots((t_d))$  avec  $k_1$  corps  $p$ -adique. Soient  $X$  une courbe projective lisse géométriquement intègre sur  $k$  et  $K$  son corps des fonctions. On note  $X^{(1)}$  l'ensemble des points de codimension 1 de  $X$ . Pour  $v \in X^{(1)}$ , soit  $K_v$  le complété de  $K$  par rapport à la valuation discrète  $v$ . Pour  $r$  un entier naturel et  $M$  un module galoisien sur  $K$  (ou encore un objet de la catégorie dérivée des modules galoisiens sur  $K$ ), on note  $H^r(K, M)$  le  $r$ -ième groupe de cohomologie galoisienne de  $M$  (ou le  $r$ -ième groupe d'hypercohomologie galoisienne si  $M$  est un complexe), et on pose :

$$\mathbb{H}^r(K, M) := \text{Ker} \left( H^r(K, M) \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} H^r(K_v, M) \right).$$

On se donne  $a \in \{0, 1, \dots, d+1\}$ , ainsi que  $\hat{T}_1$  et  $\hat{T}_2$  deux  $\text{Gal}(K^s/K)$ -modules qui, comme groupes abéliens, sont libres de type fini. On note  $\check{T}_1 = \text{Hom}(\hat{T}_1, \mathbb{Z})$  et  $\check{T}_2 = \text{Hom}(\hat{T}_2, \mathbb{Z})$ . On pose aussi  $T_1 = \check{T}_1 \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}(a)[1]$  et  $T_2 = \check{T}_2 \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}(a)[1]$ , où  $\mathbb{Z}(a)$  désigne le  $a$ -ième complexe motivique (cf paragraphe 0.6 de [Izq16a]). Dans le cas  $a = 1$ , les complexes  $T_1$  et  $T_2$  sont quasi-isomorphes à des tores. On introduit aussi  $\tilde{T}_1 = \hat{T}_1 \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)$  et  $\tilde{T}_2 = \hat{T}_2 \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)$ .

On considère maintenant un morphisme  $\hat{\rho} : \hat{T}_2 \rightarrow \hat{T}_1$ . Un tel morphisme induit des morphismes  $\rho : T_1 \rightarrow T_2$  et  $\check{\rho} : \check{T}_1 \rightarrow \check{T}_2$ . Soit  $G = [T_1 \rightarrow T_2]$  le cône de  $\rho$  (où  $T_1$  est placé en degré -1 et  $T_2$  en degré 0), de sorte que l'on a un triangle distingué  $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow G \rightarrow T_1[1]$ . Soit  $\tilde{G} = [\tilde{T}_2 \rightarrow \tilde{T}_1]$  le cône du morphisme  $\check{\rho}$ , de sorte que l'on a alors un triangle distingué  $\tilde{T}_2 \rightarrow \tilde{T}_1 \rightarrow \tilde{G} \rightarrow \tilde{T}_2[1]$ .

### Énoncé du théorème.

#### Théorème 1.

(i) Soit  $l$  un nombre premier. On fait l'une des deux hypothèses suivantes :

(H 1.1) le morphisme  $\hat{T}_2 \rightarrow \hat{T}_1$  est injectif,

(H 1.2) le groupe de  $K$ -théorie de Milnor  $K_a^M(L)\{l\}$  est d'exposant fini pour tout corps  $(d+1)$ -local  $L$  dont le corps résiduel est une extension finie de  $k$ .

On a alors un accouplement parfait de groupes finis :

$$\overline{\mathbb{H}^{a-1}(G)\{l\}} \times \overline{\mathbb{H}^{d+3-a}(\tilde{G})\{l\}} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Sous l'hypothèse (H 1.1), on a un accouplement parfait de groupes finis :

$$\overline{\text{III}^a(G)} \times \text{III}^{d+2-a}(\tilde{G}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

**Corollaire 2.**

(i) Soit  $l$  un nombre premier. On fait l'une des deux hypothèses suivantes :

(H 2.1) le morphisme  $\tilde{T}_1 \rightarrow \tilde{T}_2$  est injectif,

(H 2.2) le groupe  $K_{d+1-a}^M(L)\{l\}$  est d'exposant fini pour tout corps  $(d+1)$ -local  $L$  dont le corps résiduel est une extension finie de  $k$ .

On a alors un accouplement parfait :

$$\overline{\text{III}^{a+1}(G)\{l\}} \times \overline{\text{III}^{d+1-a}(\tilde{G})\{l\}} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Sous l'hypothèse (H 2.1), on a un accouplement parfait :

$$\text{III}^a(G) \times \overline{\text{III}^{d+2-a}(\tilde{G})} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* Notons  $H = [\tilde{T}_2 \rightarrow \tilde{T}_1][1]$  et  $\tilde{H} = [T_1 \rightarrow T_2][-1]$ . En appliquant le théorème précédent à  $H$  au lieu de  $G$ , on obtient :

- sous (H 2.1) ou (H 2.2), un accouplement parfait :

$$\overline{\text{III}^{d-a}(H)\{l\}} \times \overline{\text{III}^{a+2}(\tilde{H})\{l\}} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

- sous (H 2.1), un accouplement parfait :

$$\overline{\text{III}^{d+1-a}(H)} \times \text{III}^{a+1}(\tilde{H}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

d'où le résultat. □

**Remarque 3.** L'hypothèse (H 1.2) est toujours vérifiée lorsque  $a = 0$ , ainsi que lorsque  $k_1$  est un corps  $p$ -adique et  $l \neq p$ . En effet, dans ce deuxième cas, en notant  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(a)$  le complexe  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}(a)$  (qui est quasi-isomorphe à  $\varinjlim_n \mu_n^{\otimes a}$ ), le morphisme  $H^{a-1}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(a))\{l\} \rightarrow H^a(L, \mathbb{Z}(a))\{l\}$  est surjectif et, si  $k_1$  est  $p$ -adique et  $l \neq p$ , le groupe  $H^{a-1}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(a))\{l\}$  est fini d'après la proposition 1.10 de [Izq15]. Symétriquement, l'hypothèse (H 2.2) est toujours vérifiée lorsque  $a = d+1$ , ainsi que lorsque  $k_1$  est un corps  $p$ -adique et  $l \neq p$ .

**Remarque 4.** Si  $\Phi$  est un groupe de type multiplicatif sur  $K$ , il existe des tores  $Q_1$  et  $Q_2$  et un morphisme  $r : Q_1 \rightarrow Q_2$  surjectif tels que  $\Phi$  est isomorphe au noyau de  $r$ . On note  $\hat{Q}_1$  (resp.  $\hat{Q}_2$ ) le module des caractères de  $Q_1$  (resp.  $Q_2$ ). On note aussi  $\hat{r} : \hat{Q}_2 \rightarrow \hat{Q}_1$  le morphisme induit par  $r$ . Si l'on choisit  $a = 1$ ,  $\tilde{T}_1 = \hat{Q}_1$ ,  $\tilde{T}_2 = \hat{Q}_2$  et  $\hat{\rho} = \hat{r}$ , alors  $T_1$  et  $T_2$  sont quasi-isomorphes à  $Q_1$  et  $Q_2$  respectivement, et  $G[-1]$  est quasi-isomorphe à  $\Phi$ . Par conséquent, le théorème 1 et le corollaire 2 montrent que l'on a des accouplements parfaits :

$$\text{III}^1(\Phi) \times \overline{\text{III}^{d+2}(\tilde{G})} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \overline{\text{III}^2(\Phi)} \times \text{III}^{d+1}(\tilde{G}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et si l'hypothèse (H 1.2) est vérifiée pour  $a = d$  et un certain premier  $l$ , on a aussi un accouplement parfait :

$$\overline{\text{III}^3(\Phi)\{l\}} \times \overline{\text{III}^d(\tilde{G})\{l\}} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

### Grandes étapes de la preuve du théorème 1(i).

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $X$  sur lequel  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) s'étend en un tore  $\mathcal{T}_1$  (resp.  $\mathcal{T}_2$ ) et  $\rho$  s'étend en un morphisme  $\mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ , que l'on note toujours  $\rho$ . Soient  $\mathcal{G}$  le complexe  $[\mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2]$  et  $\tilde{\mathcal{G}}$  le complexe  $[\tilde{\mathcal{T}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_1]$ . Fixons  $l$  un nombre premier. On procède alors par étapes :

**A.** On montre que, pour chaque entier  $r$ , il y a un accouplement parfait naturel de groupes finis :

$$H^r(U, \mathcal{G})\{l\}^{(l)} \times H_c^{d+2-r}(U, \tilde{\mathcal{G}})^{(l)}\{l\} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (1)$$

Il s'agit d'un énoncé de dualité de type Artin-Verdier. Pour l'établir, on se ramène par dévissage à des modules galoisiens finis, pour lesquels on peut appliquer la proposition 2.1 de [Izq16a].

**B.** Soit  $v \in X^{(1)}$ . On montre que l'on a un accouplement naturel :

$$H^{a-1}(K_v, G) \times H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (2)$$

induisant un accouplement non dégénéré à gauche :

$$H^{a-1}(K_v, G)^\wedge \times H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (3)$$

Comme dans l'étape A, on prouve ce résultat en se ramenant par dévissage à des modules galoisiens finis, pour lesquels on peut appliquer le théorème I.2.17 de [Mil06]. De plus, sous les hypothèses (H 1.1) et (H 1.2), on peut montrer que le groupe  $H^{a-1}(K_v, G)$  est d'exposant fini, et donc que l'accouplement (2) est non dégénéré à gauche.

**C.** Introduisons maintenant les groupes :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}}) &= \text{Im} \left( H_c^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}}) \rightarrow H^{d+3-a}(K, \tilde{G}) \right), \\ D_{sh}^{a-1}(U, \mathcal{G}) &= \text{Ker} \left( H^{a-1}(U, \mathcal{G}) \rightarrow \prod_{v \in X^{(1)}} H^{a-1}(K_v, G) \right). \end{aligned}$$

On montre que  $\overline{\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})}$  s'insère dans une suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} \overline{H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G})\{l\}} \rightarrow \overline{H_c^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})\{l\}} \rightarrow \overline{\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})\{l\}} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Encore une fois, la preuve consiste à se ramener par dévissage à des modules galoisiens finis, pour lesquels on peut appliquer la proposition 2.3 de [Izq16a].

**D.** En combinant les dualités (1) et (2) et en utilisant la suite exacte (4), on montre que l'on a un accouplement naturel :

$$D_{sh}^{a-1}(U, \mathcal{G})\{l\} \times \overline{\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})\{l\}} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (5)$$

qui est non dégénéré à droite et dont le noyau à gauche est divisible.

**E.** On montre que si l'on rétrécit suffisamment l'ouvert  $U$ , on a :

$$\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})\{l\} = \mathbb{III}^{d+3}(K, \tilde{G})\{l\}.$$

L'argument est ici très similaire à celui utilisé dans un contexte plus simple dans la proposition 3.6 de [HSz16].

**F.** En tenant compte de l'étape E, un passage à la limite inductive sur  $U$  dans l'accouplement (5) permet d'obtenir le résultat souhaité.

### Remarques supplémentaires.

- La preuve du théorème 1(ii) est similaire. L'hypothèse (H 1.2) permet en plus de montrer que l'accouplement local (3) est aussi non dégénéré à droite, ainsi que de garantir la finitude du groupe  $\mathbb{III}^{d+2-a}(\tilde{G})$ .
- La preuve complète et détaillée du théorème 1 peut être trouvée dans le paragraphe 4 du chapitre 1 de [Izq16c].
- Dans le cas où le corps  $k$  serait un corps  $d$ -local avec  $k_1$  de caractéristique positive  $p > 0$ , il est possible d'établir des énoncés analogues au théorème 1 à condition de se restreindre aux parties  $l$ -primaires avec  $l$  différent de  $p$ .
- On peut montrer des variantes du théorème 1 dans le cas où  $K = \mathbb{C}((x, y))$  (ou encore  $K = \mathbb{C}((t))((x, y))$  ou  $K = \mathbb{Q}_p((x, y))$ ) : le lecteur intéressé pourra aller voir la section 2 de [Izq16b].

## Références

- [CTH15] Jean-Louis Colliot-Thélène and David Harari. Dualité et principe local-global pour les tores sur une courbe au-dessus de  $\mathbb{C}((t))$ . *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(6) :1475–1516, 2015.
- [HSz16] David Harari and Tamás Szamuely. Local-global principles for tori over  $p$ -adic function fields. *Journal of Algebraic Geometry*, 25 :571-605, 2016.
- [Izq14] Diego Izquierdo. Principe local-global pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs II. 2014. A paraître dans *Bulletin de la SMF*.
- [Izq15] Diego Izquierdo. Variétés abéliennes sur les corps de fonctions de courbes sur des corps locaux. 2015. Prépublication sur <http://www.math.ens.fr/~izquierd/>.
- [Izq16a] Diego Izquierdo. Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs. *Math. Z.*, 284(1-2) :615–642, 2016.
- [Izq16b] Diego Izquierdo. Dualité et principe local-global sur des corps locaux de dimension 2. 2016. Prépublication sur <http://www.math.ens.fr/~izquierd/>.
- [Izq16c] Diego Izquierdo. Dualité et principe local-global sur les corps de fonctions. 2016. Thèse sur <http://www.math.ens.fr/~izquierd/>.
- [Mil06] James S. Milne. *Arithmetic duality theorems*. BookSurge, LLC, Charleston, SC, second edition, 2006.