Autour de la conjecture de Milnor

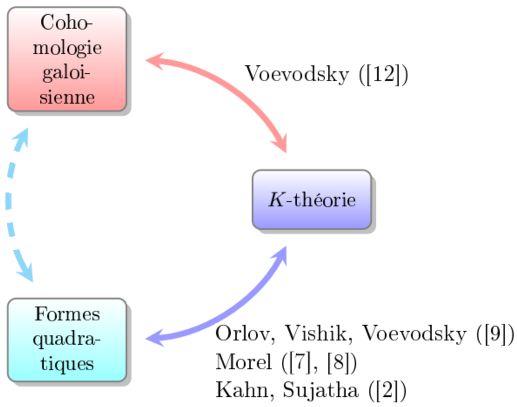
Diego Izquierdo

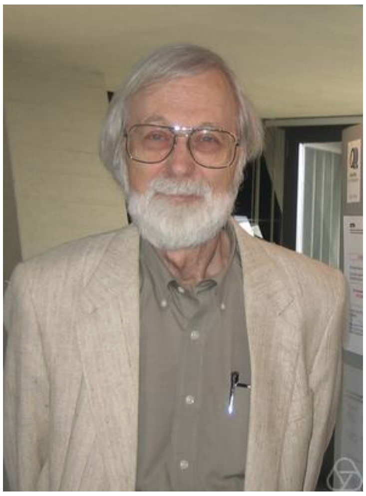
Étant donné un corps K (que l'on supposera de caractéristique différente de 2), peut-on classifier les formes quadratiques sur K à isométrie près ? C'est en 1970, dans un important article paru à Inventiones ([7]), que Milnor émet des conjectures censées donner une réponse complète à cette question. Ces conjectures prédisent des liens profonds entre les formes quadratiques et deux autres objets algébriques de natures a priori très différentes : la K-théorie et la cohomologie galoisienne.

Entre 1996 et 2003, après des avancées de Merkurjev, Rost et Suslin entre autres ([5], [6], [11]), Voevodsky publie une preuve essentiellement complète des liens conjecturés par Milnor entre la K-théorie et la cohomologie galoisienne ([12]). Celle-ci utilise de manière cruciale des résultats antérieurs de Joukhovitski et de Rost ([1]) visant à construire certaines variétés algébriques appelées « variétés de normes », et elle requiert de la part de Voevodsky un développement important de la théorie de l'homotopie motivique, dont le but est d'utiliser des idées de la topologie algébrique en géométrie algébrique. Ce travail vaut la médaille Fields à Voevodsky en 2002.

Si les résultats de Voevodsky portent sur la K-théorie et la cohomologie galoisienne, ils ne disent malheureusement rien sur les formes quadratiques. Ce n'est que quelques années plus tard que plusieurs auteurs arrivent à relier les formes quadratiques à la K-théorie, achevant ainsi la preuve des conjectures de Milnor : Orlov, Vishik et Voevodsky ([10]), Morel ([8], [9]), Kahn et Sujatha ([2]).

Ce texte est une introduction élémentaire aux conjectures de Milnor et ne se veut pas exhaustif. On supposera seulement une certaine familiarité avec les notions de base concernant les formes quadratiques et les structures algébriques usuelles. *Le texte peut tout à fait être lu en sautant les preuves.*





John Milnor [1]

Vladimir Voevodsky [2]

1. Quelques rappels sur les espaces quadratiques

Dans tout cet article, on se donne un corps K que l'on suppose de caractéristique différente de 2. On rappelle alors qu'un *espace quadratique* sur K est un K-espace vectoriel de dimension finie V muni d'une *forme quadratique*, c'est-à-dire d'une application $q : V \to K$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) pour tous $v \in V$ et $\lambda \in K$, on a $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$;

(ii) l'application :

$$\begin{aligned} b_q : V \times V &\to K \\ (v, w) &\mapsto \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right) \end{aligned}$$

est bilinéaire.

La forme quadratique q peut alors être retrouvée grâce à la forme bilinéaire b_q via la formule $q(v) = b(v,v)$ pour $v \in V$. Si l'on choisit une base $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ du K-espace vectoriel V, la matrice $A_q^{\mathbf{e}} := (b_q(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ associée à la forme bilinéaire b_q est symétrique et la forme quadratique q s'identifie à un polynôme à n variables de degré 2 :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in K^n, \;\; q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = (x_1 \; x_2 \; ... \; x_n)\, A_q^{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} b_q(e_i, e_j) x_i x_j.$$

On dit que deux espaces quadratiques (V, q) et (V', q') sont *isométriques* s'il existe un K-isomorphisme $\varphi : V \to V'$ tel que $q = q' \circ \varphi$. Matriciellement, si $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ sont des bases de V et V' respectivement, cela signifie qu'il existe une matrice inversible P telle que $A_q^{\mathbf{e}} = {}^tPA_{q'}^{\mathbf{e}'}P$. On note alors $(V, q) \cong (V', q')$ (ou de manière plus abusive $q \cong q'$).

1. Image prise lors de la célébration du 90ème anniversaire de B. Eckmann à Zürich. Source : Oberwolfach Photo Collection, `https://opc.mfo.de/detail?photo_id=9831&would_like_to_publish=1#request`.

2. Image prise par Andrea Kane, disponible sur le site de l'IAS : `https://www.ias.edu/news/2017/vladimir-voevodsky-obituary`.

Tout espace quadratique (V, q) admet une *base orthogonale*, c'est-à-dire une base $\mathbf{e}$ dans laquelle la matrice associée $A_q^{\mathbf{e}}$ est diagonale. Autrement dit, il existe toujours un n-uplet $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_n)$ d'éléments dans K tel que (V, q) est isométrique à l'espace quadratique $\langle d_1, ..., d_n \rangle$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est K^n et qui est défini par la forme quadratique :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in K^n, \;\; q_{\mathbf{d}}(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2.$$

On remarquera que les espaces quadratiques $\langle d_1, ..., d_n \rangle$ et $\langle d'_1, ..., d'_n \rangle$ sont isométriques dès que le n-uplet $(d'_1, ..., d'_n)$ peut être obtenu par permutation de $(d_1, ..., d_n)$, ou encore dès qu'il existe $x_1, ..., x_n \in K^\times$ vérifiant $d_i = d'_i x_i^2$ pour chaque i.

Lorsque (V_1, q_1) et (V_2, q_2) sont deux espaces quadratiques sur K, on définit leur *somme orthogonale* (V_3, q_3) par $V_3 = V_1 \oplus V_2$ et $q_3(v_1, v_2) = q_1(v_1) + q_2(v_2)$ pour $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$. Elle sera notée $(V_1, q_1) \perp (V_2, q_2)$, ou encore $V_1 \perp V_2$ ou $q_1 \perp q_2$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. On a ainsi par exemple $\langle d_1, ..., d_n \rangle \cong \langle d_1 \rangle \perp ... \perp \langle d_n \rangle$.

2. Comment classifier les espaces quadratiques ?

Le problème soulevé par la conjecture de Milnor porte sur la classification des espaces quadratiques à isométrie près. Autrement dit, on voudrait comprendre l'ensemble $Q(K)$ des espaces quadratiques à isométrie près sur le corps K. Deux approches sont alors naturelles :

– **Méthode 1.** Une première méthode consiste à introduire des invariants associés aux classes d'isométrie d'espaces quadratiques, c'est-à-dire des applications allant de $Q(K)$ vers d'autres espaces que l'on comprend mieux. Un exemple simple de tel invariant est donné par l'application dimension :

$$\begin{aligned} \dim : Q(K) &\to \mathbb{N} \\ (V, q) &\mapsto \dim V. \end{aligned}$$

Cet invariant est surjectif, mais, en général, il n'est pas injectif : par exemple, sur le corps des nombres réels, les formes quadratiques $\langle 1, 1 \rangle$, $\langle -1, 1 \rangle$ et $\langle -1, -1 \rangle$ ont même dimension mais ne sont pas isométriques. Pour avoir une bonne compréhension de $Q(K)$, il faudrait alors introduire d'autres invariants permettant de distinguer des formes quadratiques non isométriques de même dimension. La difficulté consiste donc à construire un système *complet* d'invariants, c'est-à-dire un ensemble d'invariants tel que deux espaces quadratiques ayant les mêmes invariants soient automatiquement isométriques. Nous verrons à la fin de l'article que les conjectures de Milnor permettent effectivement de faire cela.

– **Méthode 2.** Une deuxième approche consiste à donner une présentation de $Q(K)$ comme quotient d'un espace E que l'on comprend bien. Par exemple, si l'on note $Q_n(K)$ l'ensemble des classes d'isométrie d'espaces quadratiques de dimension n, tout élément de $Q_n(K)$ est de la forme $\langle d_1, ..., d_n \rangle$ pour un certain n-uplet $(d_1, ..., d_n)$. L'application :

$$\begin{aligned} \pi : K^n &\to Q_n(K) \\ (d_1, ..., d_n) &\to \langle d_1, ..., d_n \rangle \end{aligned}$$

est donc surjective et $Q_n(K)$ peut être vu comme un quotient de K^n. Par contre, l'application π n'est pas du tout injective (par exemple, $\langle 1\rangle \cong \langle 4\rangle$, $\langle 1,2\rangle \cong \langle 2,1\rangle$ et $\langle 2,-2\rangle \cong \langle -1,1\rangle$). La difficulté consiste alors à décrire les fibres de π : explicitement, il s'agit de comprendre quand deux n-uplets $(d_1,...,d_n)$ et $(d'_1,...,d'_n)$ vérifient $\langle d_1,...,d_n\rangle \cong \langle d'_1,...,d'_n\rangle$. Comme nous le verrons à la fin de l'article, les conjectures de Milnor permettront bien de donner une présentation de $Q(K)$. Cette dernière ne sera par contre pas induite par l'application π introduite ci-dessus, et donc les conjectures ne permettront pas de dire directement quand des espaces quadratiques de la forme $\langle d_1,...,d_n\rangle$ et $\langle d'_1,...,d'_n\rangle$ sont isométriques.

3. Réduction à l'étude des espaces anisotropes via les théorèmes de Witt

Afin d'analyser la situation d'un peu plus près, donnons-nous un espace quadratique quelconque (V,q) sur K et étudions-le. Pour ce faire, commençons par considérer l'orthogonal $V^\perp$ de V tout entier. Par définition, $V^\perp$ est constitué des vecteurs $v\in V$ tels que $b_q(v,v')=0$ pour tout $v'\in V$. Ainsi, la restriction de q à $V^\perp$ est nulle et, si l'on choisit un supplémentaire quelconque W de $V^\perp$ dans V, on a la décomposition :

$$(V,q)\cong (V^\perp,0)\perp (W,q_W), \tag{1}$$

où q_W est la restriction de q à W. L'espace (W,q_W) est alors *non dégénéré*, c'est-à-dire que, pour tout $w\in W$ non nul, il existe $w'\in W$ tel que $b_{q_W}(w,w')\neq 0$. Cela revient à dire que la matrice $A^{\mathbf{e}}_{q_W}$ de q_W dans une base quelconque $\mathbf{e}$ de W est inversible.

Supposons maintenant que l'espace (W,q_W) soit *isotrope*, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur non nul $w\in W$ tel que $q_W(w)=0$. Par non dégénérescence, on peut trouver $w'\in W$ tel que $b_q(w,w')\neq 0$. Dans la base (w,w'), la matrice de la restriction q_P de q au plan P engendré par w et w' est alors :

$$A^{(w,w')}_{q_P}=\begin{pmatrix}0 & b_q(w,w')\\ b_q(w,w') & q(w')\end{pmatrix}.$$

Son déterminant étant non nul, on déduit que le plan P muni de la forme quadratique q_P est non dégénéré et isotrope. Or il existe un unique tel plan à isométrie près, à savoir le *plan hyperbolique* $\mathbb{H}:=\langle -1,1\rangle$. Par conséquent, $(P,q_P)\cong\mathbb{H}$.

Si maintenant W_1 désigne l'orthogonal de P dans W, on a la décomposition :

$$(W,q_W)\cong (P,q_P)\perp (W_1,q_{W_1})\cong \mathbb{H}\perp (W_1,q_{W_1}) \tag{2}$$

où q_{W_1} est la restriction de q à W_1. Si (W_1,q_{W_1}) est à son tour isotrope, on peut répéter le raisonnement précédent et aboutir ainsi à une décomposition :

$$(W_1,q_{W_1})\cong \mathbb{H}\perp (W_2,q_{W_2}). \tag{3}$$

Puis on peut encore recommencer avec (W_2,q_{W_2}) si c'est un espace isotrope. En itérant cette procédure tant que c'est possible, on obtient des décompositions successives :

$$(W_2,q_{W_2})\cong \mathbb{H}\perp (W_3,q_{W_3}), \tag{4}$$
$$(W_3,q_{W_3})\cong \mathbb{H}\perp (W_4,q_{W_4}),... \tag{5}$$

La procédure s'arrête nécessairement puisque l'espace de départ (V, q) était de dimension finie. On aboutit donc à une dernière décomposition :

$$(W_{m-1}, q_{W_{m-1}}) \cong \mathbb{H} \perp (W_m, q_{W_m}) \tag{6}$$

où l'espace (W_m, q_{W_m}) n'est pas isotrope. En rassemblant toutes les décompositions (1), (2), (3), (4), (5) et (6), on obtient :

$$(V, q) \cong (V^{\perp}, 0) \perp \mathbb{H}^{\perp m} \perp (W_m, q_{W_m}),$$

ce qui prouve la première partie du :

Théorème 3.1 (Théorème de décomposition de Witt)**.** *Tout espace quadratique (V, q) peut être décomposé sous la forme :*

$$(V, q) \cong (V_{ti}, q_{ti}) \perp (V_h, q_h) \perp (V_{an}, q_{an})$$

où :

(i) (V_{ti}, q_{ti}) est totalement isotrope, *c'est-à-dire $q_{ti} = 0$;*

(ii) (V_h, q_h) est hyperbolique, *c'est-à-dire $(V_h, q_h) \cong \mathbb{H}^m$ pour un certain $m \geq 0$;*

(iii) (V_{an}, q_{an}) est anisotrope, *c'est-à-dire que $q_{an}(v) \neq 0$ pour tout $v \in V_{an} \setminus \{0\}$.*

*Les espaces quadratiques (V_{ti}, q_{ti}), (V_h, q_h) et (V_{an}, q_{an}) sont alors uniquement déterminés à isométrie près. L'entier $m = \frac{\dim V_h}{2}$ s'appelle l'*indice de Witt *de (V, q) et sera noté $w(V, q)$ ou $w(q)$ dans la suite. L'espace quadratique (V_{an}, q_{an}) s'appelle la* partie anisotrope *de (V, q).*

Si nous avons pu démontrer aisément l'énoncé d'existence tout à l'heure, l'énoncé d'unicité est plus difficile à établir. Il repose notamment sur le *théorème de simplification de Witt*, qui affirme que, si q, q_1, q_2 sont trois formes quadratiques telles que $q \perp q_1 \cong q \perp q_2$, alors $q_1 \cong q_2$.

En tous cas, le théorème de décomposition de Witt permet de ramener l'étude des espaces quadratiques généraux à l'étude des espaces quadratiques anisotropes. On pourra donc dans la suite étudier l'ensemble $W(K)$ des espaces quadratiques anisotropes sur K à isométrie près au lieu de l'ensemble $Q(K)$.

4. Quelques exemples élémentaires

a) Corps algébriquement clos. Supposons que le corps K soit algébriquement clos (par exemple $K = \mathbb{C}$). Dans ce cas, tout espace quadratique (V, q) sur K est de la forme $\langle 0 \rangle^{\perp n} \perp \langle 1 \rangle^{\perp m}$ pour $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. De plus, le couple (n, m) est entièrement déterminé par la classe d'isométrie de (V, q), puisque $n = \dim V_{ti}$ et $m = \dim V - \dim V_{ti}$. Du coup, l'invariant :

$$\begin{aligned} Q(K) &\to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (V, q) &\mapsto (n, m), \end{aligned}$$

est bijectif.

Par ailleurs, pour chaque $m \geq 2$, la forme quadratique $q_m := \langle 1 \rangle^{\perp m}$ est isotrope puisque $q_m(i, 1, 0, ..., 0) = 0$. Par conséquent, les formes quadratiques anisotropes sur K

sont celles qui correspondent aux couples $(n,m) = (0,0)$ et $(n,m) = (0,1)$, c'est-à-dire l'espace quadratique de dimension 0 et l'espace quadratique $\langle 1\rangle$. L'invariant :

$$\begin{aligned} \dim^0 : W(K) &\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (V,q) &\mapsto \dim V \mod 2 \end{aligned}$$

est donc bijectif.

b) Corps des nombres réels. Supposons maintenant que $K = \mathbb{R}$. Comme tout réel strictement positif est un carré, on a :

$$\langle a\rangle \cong \begin{cases} \langle 1\rangle & \text{pour } a > 0 \\ \langle 0\rangle & \text{pour } a = 0 \\ \langle -1\rangle & \text{pour } a < 0, \end{cases}$$

et donc tout espace quadratique réel (V,q) est de la forme $\langle 0\rangle^{\perp n} \perp \langle 1\rangle^{\perp m_+} \perp \langle -1\rangle^{\perp m_-}$ pour $(n, m_+, m_-) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. La célèbre loi d'inertie de Sylvester affirme de plus que le triplet (n, m_+, m_-) est entièrement déterminé par la classe d'isométrie de (V,q). Par conséquent, l'invariant :

$$\begin{aligned} \mathrm{inv}_{\mathbb{R}} : Q(\mathbb{R}) &\to \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ (V,q) &\mapsto (n, m_+, m_-) \end{aligned}$$

est bijectif.

Par ailleurs, les formes quadratiques anisotropes sur $\mathbb{R}$ sont celles qui correspondent aux triplets $(0, m_+, m_-)$ avec $m_+ = 0$ ou $m_- = 0$, c'est-à-dire les formes quadratiques $\langle 1\rangle^{m_+}$ et $\langle -1\rangle^{m_-}$. Du coup, l'invariant :

$$\begin{aligned} \mathrm{inv}^0_{\mathbb{R}} : W(\mathbb{R}) &\to \mathbb{Z} \\ \langle 1\rangle^{m_+} &\mapsto m_+ \\ \langle -1\rangle^{m_-} &\mapsto -m_- \end{aligned}$$

est bijectif.

c) Corps finis. Supposons finalement que K soit un corps fini de caractéristique différente de 2 et fixons un élément α de $K^\times$ qui n'est pas un carré. Tout élément non nul de K est alors soit un carré, soit le produit de α par un carré. On en déduit que tout espace quadratique (V,q) sur K est isométrique à $\langle 0\rangle^{\perp n} \perp \langle 1\rangle^{\perp m} \perp \langle \alpha\rangle^{\perp m'}$ pour un certain triplet $(n, m, m') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Malheureusement, cette observation ne suffit pas à classifier les formes quadratiques sur K, car le triplet (n, m, m') n'est pas uniquement déterminé par la classe d'isométrie de (V,q). En fait, on a une isométrie $\langle \alpha, \alpha\rangle \cong \langle 1, 1\rangle$, ce qui montre que notre espace (V,q) est isométrique à $\langle 0\rangle^{\perp n} \perp \langle 1\rangle^{\perp (m+m'-\epsilon)} \perp \langle \alpha\rangle^{\perp \epsilon}$ avec $\epsilon = 0$ si m' est pair et $\epsilon = 1$ sinon. C'est alors un exercice classique que de démontrer que le triplet $(n, m+m'-\epsilon, \epsilon)$ est entièrement déterminé par la classe d'isométrie de (V,q), et donc l'invariant :

$$\begin{aligned} \mathrm{inv}_K : Q(K) &\to \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\{0,1\} \\ (V,q) &\mapsto (n, m+m'-\epsilon, \epsilon) \end{aligned}$$

est bijectif.

Par ailleurs, il y a exactement quatre espaces quadratiques anisotropes sur K : l'espace quadratique de dimension nulle, $\langle 1\rangle$, $\langle \alpha\rangle$ et $\langle 1,-\alpha\rangle$. Via l'invariant inv_K, les trois premiers correspondent aux triplets $(0,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Le quatrième, quant à lui, correspond au triplet $(0,1,1)$ si -1 est un carré dans K et au triplet $(0,2,0)$ sinon.

5. L'anneau de Witt

Comme nous l'avons déjà expliqué, nous voulons comprendre l'ensemble $W(K)$ constitué des K-espaces quadratiques anisotropes à isométrie près. C'est en 1937 que Witt a compris qu'on pouvait munir cet ensemble d'une structure d'anneau ([13]). Cette structure, que nous allons introduire maintenant, jouera un rôle essentiel dans la suite.

Addition. Si (V_1,q_1) et (V_2,q_2) sont deux espaces quadratiques anisotropes, il semble naturel de décréter que leur somme dans $W(K)$ soit leur somme orthogonale $(V_1,q_1)\perp(V_2,q_2)$. Malheureusement, cette dernière n'est pas nécessairement anisotrope. Il convient donc de remplacer $(V_1,q_1)\perp(V_2,q_2)$ par sa partie anisotrope et de poser :

$$(V_1,q_1)+(V_2,q_2) := ((V_1\perp V_2)_{an},(q_1,\perp q_2)_{an})\,.$$

Cela définit une loi sur $W(K)$ qui est associative et commutative, et qui admet l'espace quadratique de dimension nulle pour élément neutre. De plus, pour tout $a\in K^\times$, le plan $\langle -a,a\rangle$ est isotrope et donc isométrique au plan hyperbolique $\mathbb{H}$. On en déduit que, pour tous $a_1,...,a_n\in K^\times$:

$$\langle a_1,...,a_n\rangle\perp\langle -a_1,...,-a_n\rangle\cong\mathbb{H}^n,$$

de sorte que, si (V,q) est un espace quadratique anisotrope, alors $(V,-q)$ et (V,q) sont opposés pour la loi $+$ sur $W(K)$. On en déduit que $(W(K),+)$ est un groupe abélien.

Multiplication. Si (V_1,q_1) et (V_2,q_2) sont deux espaces quadratiques, on peut munir le produit tensoriel $V_1\otimes_K V_2$ de la forme quadratique $q_1\otimes q_2$ associée à la forme bilinéaire définie par :

$$b_{q_1\otimes q_2}(v_1\otimes v_2,v_1'\otimes v_2') := b_{q_1}(v_1,v_1')b_{q_2}(v_2,v_2')$$

pour $v_1,v_1'\in V_1$ et $v_2,v_2'\in V_2$. Matriciellement, si $\mathbf{e}=(e_1,...,e_m)$ et $\mathbf{f}=(f_1,...,f_n)$ sont des bases respectives de V_1 et V_2 et si $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le m}:=A^{\mathbf{e}}_{q_1}$ et $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}:=A^{\mathbf{f}}_{q_2}$ sont les matrices de q_1 et q_2 dans ces bases, alors la matrice de $q_1\otimes q_2$ dans la base :

$$\mathbf{e}\otimes\mathbf{f} := (e_i\otimes f_j)_{1\le i\le m,1\le j\le n} = (e_1\otimes f_1,e_1\otimes f_2,...,e_1\otimes f_n;...;e_m\otimes f_1,e_m\otimes f_2,...,e_m\otimes f_n)$$

de $V_1\otimes V_2$ est donnée par le *produit de Kronecker* des matrices A et B :

$$A\otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & ... & a_{1m}B\\ a_{21}B & a_{22}B & ... & a_{2m}B\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}B & a_{m2}B & ... & a_{mm}B\end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour $a_1,...,a_m,b_1,...,b_n\in K$, on a :

$$\langle a_1,...,a_m\rangle\otimes\langle b_1,...,b_n\rangle\cong\langle a_1b_1,...,a_ib_j,...,a_mb_n\rangle.$$

On peut alors définir une multiplication sur $W(K)$ en posant :

$$(V_1, q_1) \cdot (V_2, q_2) := ((V_1 \otimes V_2)_{an}, (q_1 \otimes q_2)_{an}) .$$

Cela munit $W(K)$ d'une loi qui est associative, commutative et distributive sur l'addition, et qui admet $\langle 1 \rangle$ pour élément neutre. L'ensemble $W(K)$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ est donc un anneau commutatif, que l'on appelle l'*anneau de Witt* de K.

Exemple 5.1. Reprenons les exemples de la section 4.

(a) Lorsque K est algébriquement clos, on a vu que $W(K)$ a deux éléments, l'espace quadratique de dimension nulle et $\langle 1 \rangle$. L'invariant $\dim^0$ est donc un isomorphisme d'anneaux entre $W(K)$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) Lorsque $K = \mathbb{R}$, on a vu que :

$$W(\mathbb{R}) = \{n\langle 1 \rangle | n \geq 0\} \cup \{n\langle -1 \rangle | n > 0\}.$$

Comme $\langle 1 \rangle \perp \langle -1 \rangle = \mathbb{H}$, on a $\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle = 0$ dans $W(\mathbb{R})$, de sorte que :

$$\langle -1 \rangle = -\langle 1 \rangle.$$

L'invariant $\mathrm{inv}^0_{\mathbb{R}}$ est donc un isomorphisme d'anneaux entre $W(\mathbb{R})$ et $\mathbb{Z}$.

(c) Lorsque K est fini, on a vu que, si on se donne un élément $\alpha \in K$ qui n'est pas un carré, alors :

$$W(K) = \{0, \langle 1 \rangle, \langle \alpha \rangle, \langle 1, -\alpha \rangle\}.$$

On peut alors vérifier à la main que :

- si -1 n'est pas un carré dans K, alors on a un isomorphisme entre $W(K)$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ qui envoie :

$$0 \mapsto 0, \qquad \langle 1 \rangle \mapsto 1, \qquad \langle 1, -\alpha \rangle \mapsto 2, \qquad \langle \alpha \rangle \mapsto 3.$$

- si -1 est un carré dans K, alors on a un isomorphisme entre $W(K)$ et l'anneau :

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right\}$$

qui envoie :

$$0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 1 \rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \langle 1, -\alpha \rangle \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \alpha \rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Premiers invariants : la dimension et le discriminant

Nous allons maintenant commencer à construire des invariants sur l'anneau de Witt $W(K)$. Afin de pouvoir exploiter la structure d'anneau (ou au moins la structure de groupe additif) de $W(K)$ par la suite, on souhaite que ces invariants soient des morphismes d'anneaux, ou au moins des morphismes de groupes.

L'invariant dimension. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \dim : W(K) &\to \mathbb{Z} \\ (V, q) &\mapsto \dim V. \end{aligned}$$

Cette application est bien sûr bien définie, mais, malheureusement, ce n'est pas un morphisme de groupes. En effet, par exemple, on a $\dim\langle 1\rangle = \dim\langle -1\rangle = 1$, mais comme $\langle 1\rangle \perp \langle -1\rangle = \mathbb{H}$, on a $\langle 1\rangle + \langle -1\rangle = 0$ dans $W(K)$, de sorte que $\dim(\langle 1\rangle + \langle -1\rangle) = 0$. En fait, si (V_1, q_1) et (V_2, q_2) sont deux espaces quadratiques anisotropes, on a :

$$q_1 \perp q_2 \cong \mathbb{H}^{w(q_1 \perp q_2)} \perp (q_1 + q_2)\,,$$

de sorte que :

$$\dim\,(q_1 + q_2) = \dim q_1 + \dim q_2 - 2w\,(q_1 \perp q_2)\,.$$

En particulier :

$$\dim\,(q_1 + q_2) \equiv \dim q_1 + \dim q_2 \mod 2,$$

et donc :

$$\begin{aligned} \dim{}^0 : W(K) &\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (V, q) &\mapsto \dim V \mod 2 \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes. C'est même un morphisme d'anneaux puisque, si (V_1, q_1) et (V_2, q_2) sont des espaces quadratiques anisotropes, alors :

$$\dim\,(q_1 \cdot q_2) = \dim\,(V_1 \otimes V_2) - 2w(q_1 \otimes q_2) \equiv \dim V_1 \cdot \dim V_2 \mod 2.$$

Le morphisme $\dim{}^0$ est appelé *l'invariant dimension*. Son noyau est un idéal de $W(K)$ que l'on appelle *l'idéal fondamental* et qui est habituellement noté $I(K)$. Le morphisme $\dim{}^0$ induit par passage au quotient un isomorphisme :

$$\overline{\dim}^0 : W(K)/I(K) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Dans la suite, il sera utile de comprendre un peu plus l'idéal fondamental $I(K)$. Par définition, ses éléments sont les formes quadratiques anisotropes de dimension paire (à isométrie près). Si on se donne une telle forme quadratique q, alors on peut écrire q sous la forme $\langle a_1, ..., a_{2n}\rangle$ pour certains $a_1, ..., a_{2n} \in K^\times$. On a donc dans $W(K)$:

$$q = \sum_{i=1}^{n} \langle a_{2i-1}, a_{2i}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle a_{2i-1}\rangle}_{\in W(K)} \cdot \underbrace{\langle 1, -b_i\rangle}_{\in I(K)},$$

où $b_i := -a_{2i}a_{2i-1}^{-1}$. Par conséquent, l'idéal $I(K)$ est engendré par les espaces quadratiques anisotropes de la forme $\langle 1, -a\rangle$ pour $a \in K^\times$. Rappelons que, pour chaque $n \geq 1$, la puissance n-ième $I(K)^n$ de $I(K)$ est par définition l'idéal de $W(K)$ engendré par les produits de n éléments de $I(K)$. Du coup, $I(K)^n$ est engendré par les parties anisotropes des formes quadratiques $\langle\langle a_1, ..., a_n\rangle\rangle := \langle 1, -a_1\rangle \otimes ... \otimes \langle 1, -a_n\rangle$ pour $a_1, ..., a_n \in K^\times$. Les formes quadratiques $\langle\langle a_1, ..., a_n\rangle\rangle$ seront appelées dans la suite des *n-formes de Pfister*.

L'invariant discriminant. Soit (V, q) un espace quadratique sur K de dimension n. Si $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ sont deux K-bases de V, les matrices de q dans ces bases sont liées par une relation de la forme :

$$A_q^{\mathbf{e}} = {}^tPA_q^{\mathbf{f}}P$$

avec $P \in GL_n(K)$. En prenant le déterminant, on a alors :

$$\det A_q^{\mathbf{e}} = \det A_q^{\mathbf{f}} \cdot \underbrace{(\det P)^2}_{\text{carré}},$$

et donc le déterminant $\det A_q^{\mathbf{e}}$ ne dépend que de la classe d'isométrie de (V, q) à multiplication par un carré près. En termes plus algébriques, si $K^{\times 2}$ désigne le sous-groupe de $K^{\times}$ constitué des éléments qui sont des carrés, la classe de $\det A_q^{\mathbf{e}}$ dans le quotient $K^{\times}/K^{\times 2}$ ne dépend que de la classe d'isométrie de (V, q). On peut donc définir une application :

$$\begin{aligned} d : W(K) &\to K^{\times}/K^{\times 2} \\ (V, q) &\mapsto \det(A_q^{\mathbf{e}}) \cdot K^{\times 2} \end{aligned}$$

où $\mathbf{e}$ désigne une base quelconque de V. On l'appelle l'*invariant discriminant*.

Si maintenant q_1 et q_2 sont deux formes quadratiques anisotropes sur K, l'isométrie $(q_1 + q_2) \perp \mathbb{H}^{w(q_1 \perp q_2)} \cong q_1 \perp q_2$ permet d'obtenir l'égalité :

$$d(q_1 + q_2) \cdot (-1)^{w(q_1 \perp q_2)} = d(q_1 \perp q_2) = d(q_1)d(q_2). \tag{7}$$

L'application d n'est donc pas un morphisme de groupes. Afin de corriger ce défaut, on introduit le *discriminant signé* :

$$\begin{aligned} d_{\pm} : I(K) &\to K^{\times}/K^{\times 2} \\ q &\mapsto (-1)^{\frac{\dim q}{2}} d(q). \end{aligned}$$

Via l'égalité (7), il est aisé de voir que $d_{\pm}$ est bien un morphisme de groupes surjectif sur $I(K)$. De plus, un calcul similaire permet de vérifier que, quels que soient $a, b \in K^{\times}$, la forme quadratique $\langle\langle a, b\rangle\rangle_{an}$ appartient au noyau de $d_{\pm}$. L'idéal $I(K)^2$ étant engendré par les parties anisotropes des 2-formes de Pfister, le noyau de $d_{\pm}$ contient tout $I(K)^2$. En particulier, il induit un morphisme de groupes surjectif :

$$d_{\pm} : I(K)/I(K)^2 \to K^{\times}/K^{\times 2}.$$

Introduisons maintenant l'application :

$$\begin{aligned} f : K^{\times}/K^{\times 2} &\to I(K)/I(K)^2 \\ a &\mapsto \langle 1, -a\rangle_{an}. \end{aligned}$$

Pour $a \in K^{\times}$ tel que $\langle 1, -a\rangle$ est anisotrope, on a $f \circ d_{\pm}(\langle 1, -a\rangle) = f(a) = \langle 1, -a\rangle$. L'idéal $I(K)$ étant engendré par les espaces quadratiques anisotropes de la forme $\langle 1, -a\rangle$, on déduit que $f \circ d_{\pm} = \mathrm{Id}_{I(K)/I(K)^2}$, et donc que $d_{\pm}$ est injectif. Le discriminant signé est alors un isomorphisme :

$$d_{\pm} : I(K)/I(K)^2 \xrightarrow{\sim} K^{\times}/K^{\times 2}.$$

7. Algèbres de quaternions et formes quadratiques

Les invariants dimension et discriminant nous ont permis de comprendre les quotients $W(K)/I(K)$ et $I(K)/I(K)^2$. Nous voulons maintenant comprendre l'idéal $I(K)^2$, qui est engendré par les parties anisotropes des 2-formes de Pfister $\langle\langle a, b\rangle\rangle = \langle 1, -a, -b, ab\rangle$ avec $a, b \in K^{\times}$. Il convient donc de commencer par comprendre ces dernières.

Pour ce faire, nous introduisons l'*algèbre de quaternions* $H_{a,b}$. Il s'agit de la K-algèbre (non commutative) de dimension 4 ayant pour base $(1, i, j, k)$ et dont la multiplication est définie par les relations :

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad k = ij = -ji.$$

Par exemple, $H_{1,1}$ n'est autre que l'algèbre de matrices $\mathcal{M}_2(K)$ et, lorsque $K = \mathbb{R}$, l'algèbre $H_{-1,-1}$ coïncide avec l'algèbre des quaternions de Hamilton.

L'algèbre $H_{a,b}$ est munie d'une involution :

$$\begin{gathered} H_{a,b} \to H_{a,b} \\ \alpha = x + yi + zj + tk \mapsto \overline{\alpha} = x - yi - zj - tk, \end{gathered}$$

ainsi que d'une "norme" (souvent appelée *norme réduite*) :

$$\begin{gathered} N_{a,b} : H_{a,b} \to K \\ \alpha = x + yi + zj + tk \mapsto \alpha\overline{\alpha} = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2. \end{gathered}$$

La norme $N_{a,b}$ s'identifie donc à la forme quadratique qui nous intéresse $\langle\langle a, b\rangle\rangle$.

Théorème 7.1. *Soient a, b, a', b' quatre éléments de $K^\times$. Les algèbres $H_{a,b}$ et $H_{a',b'}$ sont K-isomorphes si, et seulement si, les espaces quadratiques $(H_{a,b}, N_{a,b})$ et $(H_{a',b'}, N_{a',b'})$ sont isométriques.*

Esquisse. Un calcul élémentaire permet de montrer que tout K-isomorphisme d'algèbres entre $H_{a,b}$ et $H_{a',b'}$ est en fait une isométrie. Réciproquement, si les espaces quadratiques $(H_{a,b}, N_{a,b})$ et $(H_{a',b'}, N_{a',b'})$ sont isométriques et si $(1, i, j, k)$ et $(1, i', j', k')$ désignent les bases naturelles de $H_{a,b}$ et $H_{a',b'}$, on peut écrire

$$(H_{a,b}, N_{a,b}) \cong \langle 1\rangle \perp H^0_{a,b} \quad \text{et} \quad (H_{a',b'}, N_{a',b'}) \cong \langle 1\rangle \perp H^0_{a',b'},$$

avec $H^0_{a,b} = Ki \oplus Kj \oplus Kk$ et $H_{a',b'} = Ki' \oplus Kj' \oplus Kk'$. Le théorème de simplification de Witt fournit donc une isométrie $\psi : H^0_{a,b} \to H^0_{a',b'}$. Un calcul élémentaire montre alors que $(1, \psi(i), \psi(j), \psi(k))$ est une K-base de $H_{a',b'}$ telle que $\psi(i)^2 = a$, $\psi(j)^2 = b$ et $\psi(i)\psi(j) = -\psi(j)\psi(i)$. Les algèbres $H_{a,b}$ et $H_{a',b'}$ sont donc bien isomorphes. $\square$

Ainsi, pour $a, b \in K^\times$, la classe d'isométrie de la forme quadratique $\langle\langle a, b\rangle\rangle_{an}$ est entièrement caractérisée par la classe d'isomorphisme de l'algèbre de quaternions $H_{a,b}$ et réciproquement. Il est donc naturel de chercher à construire un invariant c allant de $I(K)^2$ vers l'ensemble $\mathrm{Quat}(K)$ des K-algèbres de quaternions à isomorphisme près et envoyant $\langle\langle a, b\rangle\rangle_{an}$ sur $H_{a,b}$ quels que soient $a, b \in K^\times$.

Pour ce faire, fixons une forme quadratique $q \in I(K)^2$. Bien sûr, q n'est pas nécessairement de la forme $\langle\langle a, b\rangle\rangle_{an}$, mais l'idéal $I(K)^2$ étant engendré par les 2-formes de Pfister, on peut écrire :

$$q = n_1\langle\langle a_1, b_1\rangle\rangle_{an} + ... + n_r\langle\langle a_r, b_r\rangle\rangle_{an},$$

pour certains $n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}$. On voudrait donc définir l'invariant c en envoyant q sur :

$$n_1 H_{a_1,b_1} + ... + n_r H_{a_r,b_r}.$$

Pour donner un sens à cette somme, il faudrait munir Quat(K) d'une loi de groupe abélien. Une approche naturelle consisterait alors à décréter que la somme de deux algèbres de quaternions H et H' dans Quat(K) est la K-algèbre $H \otimes_K H'$. Malheureusement, cette algèbre étant de dimension 16, ce n'est pas une algèbre de quaternions. Nous sommes donc amenés à sortir de l'ensemble des algèbres de quaternions et à considérer une classe de K-algèbres plus grosse que Quat(K) qui soit stable par produit tensoriel.

8. Algèbres simples centrales et invariant de Clifford

Motivés par les observations faites à la fin de la section précédente, nous introduisons la notion d'algèbre simple centrale :

Définition 8.1. *Une* algèbre simple centrale *sur K est une K-algèbre A de dimension finie, pas nécessairement commutative, n'ayant pour idéaux bilatères que l'idéal nul et A tout entier, et dont le centre $Z(A) := \{a \in A | \forall b \in A, ab = ba\}$ est réduit au corps K.*

Par exemple, le corps K lui-même, les algèbres de matrices $\mathcal{M}_2(K)$, $\mathcal{M}_3(K)$, ..., et les K-algèbres de quaternions sont des algèbres simples centrales sur K. Il se trouve que cette classe de K-algèbres est stable par produit tensoriel, et c'est donc un très bon candidat pour remplacer les algèbres de quaternions. On va par conséquent considérer dans la suite l'ensemble $ASC(K)$ des K-algèbres simples centrales à isomorphisme près, muni de l'opération :

$$A + B := A \otimes_K B.$$

Cette opération est commutative et associative, et elle admet la K-algèbre K pour élément neutre.

En suivant la stratégie décrite à la fin de la section 7, on voudrait construire un invariant $c : I(K)^2 \to ASC(K)$ tel que :

$$c\left(n_1\langle\langle a_1, b_1\rangle\rangle_{an} + ... + n_r\langle\langle a_r, b_r\rangle\rangle_{an}\right) = n_1 H_{a_1,b_1} + ... + n_r H_{a_r,b_r} \tag{8}$$

pour $n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}$. En particulier, on voudrait que c envoie la forme quadratique $\langle\langle 1, 1\rangle\rangle_{an}$ sur $H_{1,1}$, qui n'est autre que l'algèbre de matrices $\mathcal{M}_2(K)$. Mais dans l'anneau de Witt $W(K)$, on a les égalités :

$$\langle\langle 1, 1\rangle\rangle_{an} = \langle 1, -1, -1, 1\rangle_{an} = (\mathbb{H}^2)_{an} = 0,$$

et donc c devrait aussi envoyer $\langle\langle 1, 1\rangle\rangle_{an}$ sur l'élément neutre de $ASC(K)$ pour la loi $+$, à savoir la K-algèbre K. Ainsi, on devrait avoir :

$$c\left(\langle\langle 1, 1\rangle\rangle_{an}\right) = K = \mathcal{M}_2(K)$$

dans $ASC(K)$, ce qui est évidemment faux. Il n'est donc pas possible de définir un invariant $c : I(K)^2 \to ASC(K)$ vérifiant (8).

Afin de pallier ce problème, l'idée consiste à identifier formellement K et $\mathcal{M}_2(K)$ dans $ASC(K)$. Autrement dit, on va remplacer $ASC(K)$ par un quotient qui identifie K et $\mathcal{M}_2(K)$:

Proposition 8.2. *Étant données deux algèbres simples centrales $A, B \in ASC(K)$, on note $A \sim B$ s'il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$A \otimes_K \mathcal{M}_m(K) \cong B \otimes_K \mathcal{M}_n(K).$$

On munit ainsi l'ensemble $ASC(K)$ d'une relation d'équivalence et l'opération $+$ sur $ASC(K)$ induit une loi de groupe abélien sur le quotient $ASC(K)/\sim$, dont l'élément neutre est représenté par toutes les algèbres de matrices $\mathcal{M}_n(K)$ avec $n \geq 1$.

Le groupe $ASC(K)/\sim$ s'appelle le *groupe de Brauer* de K, et on le note $\mathrm{Br}(K)$. Sans vouloir rentrer dans les détails de la preuve de la proposition précédente, voici juste quelques règles très utiles qui permettent de faire des calculs dans ce groupe :

Règles de calcul 8.3. *Les algèbres de quaternions vérifient les trois règles de calcul fondamentales suivantes dans le groupe de Brauer :*

(RC1) *L'application :*

$$\begin{aligned} K^\times \times K^\times &\to \mathrm{Br}(K) \\ (a,b) &\mapsto H_{a,b} \end{aligned}$$

est bilinéaire. Autrement dit, pour tous $a,b,c \in K^\times$:

$$\begin{aligned} H_{a,bc} &= H_{a,b} + H_{a,c} \in \mathrm{Br}(K), \\ H_{ab,c} &= H_{a,c} + H_{b,c} \in \mathrm{Br}(K). \end{aligned}$$

(RC2) *Pour tout $a \in K \setminus \{0,1\}$:*

$$H_{a,1-a} = 0 \in \mathrm{Br}(K).$$

(RC3) *Pour tous $a,b \in K^\times$:*

$$2H_{a,b} = 0 \in \mathrm{Br}(K).$$

Remarque 8.4. Les trois règles **(RC1)**, **(RC2)** et **(RC3)** sont les "règles de base" qui permettent de faire des calculs avec les algèbres de quaternions dans $\mathrm{Br}(K)$. Bien sûr, il est possible d'établir d'autres règles de calcul, qui dans certains cas peuvent s'avérer très pratiques, mais qui ne sont pas essentielles puisqu'elles découlent formellement de **(RC1)**, **(RC2)** et **(RC3)**. Par exemple, pour $a,b,c,d \in K^\times$, on a les égalités $H_{ac^2,bd^2} = H_{a,b}$ et $H_{a,-a} = 0$ dans $\mathrm{Br}(K)$.

Démonstration des règles de calcul (RC1), (RC2) et (RC3).

(RC1) Même si le calcul est un peu fastidieux, on peut établir à la main que :

$$H_{a,b} \otimes H_{a,c} \cong H_{a,bc} \otimes \mathcal{M}_2(K).$$

On a donc $H_{a,bc} = H_{a,b} + H_{a,c}$, et l'autre égalité s'obtient par symétrie.

(RC2) Soit $a \in K \setminus \{0,1\}$. La forme quadratique $\langle 1, -a, a-1 \rangle$ est isotrope puisque $1 - a + (a-1) = 0$. On peut donc écrire $\langle 1, -a, a-1 \rangle \cong \mathbb{H} \perp \langle b \rangle$ pour un certain $b \in K^\times$. En comparant les discriminants, on obtient que $b \in -a(1-a){K^\times}^2$, et donc $\langle 1, -a, a-1 \rangle \cong \mathbb{H} \perp \langle -a(1-a) \rangle$. Par suite :

$$\langle\langle a, 1-a \rangle\rangle = \langle 1, -a, a-1, a(1-a) \rangle \cong \mathbb{H} \perp \langle -a(1-a), a(1-a) \rangle \cong \mathbb{H}^2.$$

Le théorème 7.1 implique donc que :

$$H_{a,1-a} \cong H_{1,1} \cong \mathcal{M}_2(K),$$

ce qui montre que $H_{a,1-a} = 0 \in \mathrm{Br}(K)$.

(RC3) On a :

$$\langle\langle a, b^2\rangle\rangle = \langle 1, -a, -b^2, ab^2\rangle \cong \langle \underbrace{1, -1}_{\mathbb{H}}, \underbrace{a, -a}_{\mathbb{H}}\rangle \cong \mathbb{H}^2.$$

D'après le théorème 7.1, on déduit que $H_{a,b^2} \cong \mathcal{M}_2(K)$, et donc que :

$$2H_{a,b} \underset{\textbf{(RC1)}}{=} H_{a,b^2} = 0 \in \mathrm{Br}(K).$$

$\square$

Le reste de cette section est consacré à la construction d'un invariant $c : I(K)^2 \to \mathrm{Br}(K)$ vérifiant (8). Pour ce faire, il faut commencer par écrire un élément quelconque de $I(K)^2$ comme combinaison linéaire de 2-formes de Pfister. Fixons donc un entier $n \geq 0$ et des éléments $a_1, ..., a_n$ de $K^\times$ tels que $\langle a_1, ..., a_n\rangle \in I(K)^2$. Afin d'écrire $\langle a_1, ..., a_n\rangle$ comme somme de 2-formes de Pfister dans l'anneau $W(K)$, on commence par faire apparaître artificiellement le terme $\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle a_1, ..., a_n\rangle &= \langle a_1, a_2\rangle & &+ \langle a_3, ..., a_n\rangle \\
&= \langle \underbrace{\mathbf{1}, \mathbf{-1}}_{\mathbb{H}}, \underbrace{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}}_{\langle a_1,a_2\rangle}, \underbrace{\boldsymbol{-a_1a_2}, \boldsymbol{a_1a_2}}_{\mathbb{H}}\rangle_{an} & &+ \langle a_3, ..., a_n\rangle \\
&= \boldsymbol{\langle -1, a_1, a_2, -a_1a_2\rangle_{an}} + \boldsymbol{\langle 1\rangle} + \boldsymbol{\langle a_1a_2\rangle} & &+ \langle a_3, ..., a_n\rangle \\
&= \boldsymbol{-\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle_{an}} + \boldsymbol{\langle 1\rangle} & &+ \langle \boldsymbol{a_1a_2}, a_3, ..., a_n\rangle_{an}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Maintenant qu'on a fait apparaître le terme $\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle_{an}$, on peut recommencer les calculs avec la forme quadratique $(n-1)$-dimensionnelle $\langle a_1a_2, a_3, ..., a_n\rangle_{an}$ et faire apparaître artificiellement le terme $\langle\langle a_1a_2, a_3\rangle\rangle$:

$$\langle a_1a_2, a_3..., a_n\rangle_{an} = \boldsymbol{-\langle\langle a_1a_2, a_3\rangle\rangle_{an}} + \boldsymbol{\langle 1\rangle} + \langle \boldsymbol{a_1a_2a_3}, a_4, ..., a_n\rangle_{an}. \qquad (10)$$

En combinant les formules (9) et (10), on obtient :

$$\langle a_1, ..., a_n\rangle = \boldsymbol{-\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle_{an}} \boldsymbol{-\langle\langle a_1a_2, a_3\rangle\rangle_{an}} \boldsymbol{+2\langle 1\rangle} + \langle \boldsymbol{a_1a_2a_3}, a_4, ..., a_n\rangle_{an}.$$

On peut alors recommencer les calculs avec $\langle \boldsymbol{a_1a_2a_3}, a_4, ..., a_n\rangle_{an}$, et en itérant cette procédure, on aboutit donc à l'égalité :

$$\begin{aligned}
\langle a_1, ..., a_n\rangle = \boldsymbol{-\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle_{an}} \boldsymbol{-\langle\langle a_1a_2, a_3\rangle\rangle_{an}} \boldsymbol{-...-\langle\langle a_1...a_{n-1}, a_n\rangle\rangle_{an}} \\
+ \boldsymbol{(n-1)\langle 1\rangle} + \boldsymbol{\langle a_1a_2...a_n\rangle}.
\end{aligned}$$

Mais comme $\langle a_1, ..., a_n\rangle$ est dans $I(K)^2 = \mathrm{Ker}(d_\pm) \subseteq I(K) = \mathrm{Ker}(\dim^0)$, on a $n \in 2\mathbb{Z}$ et $(-1)^{n/2}a_1...a_n \in K^{\times 2}$. On peut donc écrire $n = 2m$ et $a_1...a_n = (-1)^m\delta^2$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\delta \in K^\times$, d'où :

$$\begin{aligned}
\langle a_1, ..., a_n\rangle = \boldsymbol{-\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle_{an}} \boldsymbol{-\langle\langle a_1a_2, a_3\rangle\rangle_{an}} \boldsymbol{-...-\langle\langle a_1...a_{2m-1}, a_{2m}\rangle\rangle_{an}} \\
+ \boldsymbol{(2m-1)\langle 1\rangle} + \boldsymbol{\langle (-1)^m\rangle}.
\end{aligned}$$

Finalement, comme $\langle\langle -1, -1\rangle\rangle = \langle 1, 1, 1, 1\rangle$, on a :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{(2m-1)\langle 1\rangle} + \boldsymbol{\langle (-1)^m\rangle} &= \begin{cases} \boldsymbol{(2m-1)\langle 1\rangle} + \boldsymbol{\langle 1\rangle} = 2m\langle 1\rangle = \frac{m}{2}\langle\langle -1, -1\rangle\rangle_{an} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \boldsymbol{2(m-1)\langle 1\rangle} + \langle \underbrace{\mathbf{1}, \mathbf{-1}}_{\mathbb{H}}\rangle_{an} = \frac{m-1}{2}\langle\langle -1, -1\rangle\rangle_{an} & \text{si } m \text{ est impair,} \end{cases} \\
&= \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \langle\langle -1, -1\rangle\rangle_{an},
\end{aligned}$$

d'où la proposition :

Proposition 8.5. *Quels que soient $a_1, ..., a_n \in K^\times$ tels que $\langle a_1, ..., a_n\rangle \in I(K)^2$, on a :*

$$\langle a_1, ..., a_n\rangle = -\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle_{an} - \langle\langle a_1a_2, a_3\rangle\rangle_{an} - \cdots - \langle\langle a_1...a_{n-1}, a_n\rangle\rangle_{an} + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \langle\langle -1, -1\rangle\rangle_{an}.$$

Par conséquent, s'il existe un invariant $c : I(K)^2 \to \mathrm{Br}(K)$ qui vérifie (8), alors on a nécessairement :

$$c(\langle a_1, ..., a_n\rangle) = -H_{a_1,a_2} - H_{a_1a_2,a_3} - ... - H_{a_1...a_{n-1},a_n} + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor H_{-1,-1} \qquad (11)$$

quels que soient $a_1, ..., a_n \in K^\times$ tels que $\langle a_1, ..., a_n\rangle \in I(K)^2$. Par la propriété de bilinéarité **(RC1)**, la formule précédente peut être récrite sous la forme :

$$c(\langle a_1, ..., a_n\rangle) = -\sum_{i<j} H_{a_i,a_j} + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor H_{-1,-1}. \qquad (12)$$

Théorème 8.6. *La formule (11) (ou de manière équivalente la formule (12)) définit une application :*

$$c : W(K) \to \mathrm{Br}(K)$$

telle que $c(\langle\langle a, b\rangle\rangle_{an}) = H_{a,b}$ quels que soient $a, b \in K^\times$. On l'appelle l'invariant de Clifford. *Sa restriction à $I(K)^2$ est un morphisme de groupes, dont le noyau contient $I(K)^3$.*

La démonstration de ce théorème étant trop longue et technique pour être incluse ici, le lecteur intéressé pourra aller voir le chapitre V de [4] ou le complément [3]. Pour la suite, on retiendra juste que, comme cela est expliqué dans [3], *il est possible de faire cette preuve en n'utilisant aucune propriété du groupe de Brauer autre que les règles de calcul **(RC1)** à **(RC3)**.*

C'est en 1982 que Merkurjev parvient à démontrer l'important et difficile théorème suivant concernant l'invariant de Clifford :

Théorème 8.7 (Merkurjev [5])**.** *Soit* $\mathrm{Br}(K)[2]$ *le sous-groupe de 2-torsion de* $\mathrm{Br}(K)$*, c'est-à-dire le sous-groupe des éléments $A \in \mathrm{Br}(K)$ tels que $2A = 0$. L'invariant de Clifford induit un isomorphisme de groupes :*

$$c : I(K)^2/I(K)^3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(K)[2].$$

La démonstration de ce résultat dépasse très largement le cadre de ce texte de survol. Néanmoins, nous prouverons dans le paragraphe suivant une variante beaucoup plus simple du théorème de Merkurjev, dans laquelle on remplace le groupe de Brauer par un groupe de K-théorie.

9. K-théorie de Milnor

Comme cela a été expliqué dans le paragraphe précédent, les seules propriétés du groupe de Brauer qui sont utilisées dans la preuve du théorème 8.6 sont les règles de calcul **(RC1)**-**(RC3)**. Il est donc possible de remplacer dans ce théorème le groupe de Brauer par n'importe quel groupe abélien B contenant pour $a, b \in K^\times$ des symboles $\{a, b\}$ qui vérifient les mêmes relations fondamentales que les algèbres de quaternions :

(RC1') L'application :

$$\begin{aligned} K^\times \times K^\times &\to B \\ (a,b) &\mapsto \{a,b\} \end{aligned}$$

est bilinéaire.

(RC2') Pour tout $a \in K \setminus \{0,1\}$:

$$\{a, 1-a\} = 0.$$

(RC3') Pour tous $a, b \in K^\times$:

$$2\{a,b\} = 0.$$

En choisissant tout naturellement pour B le groupe abélien $k_2(K)$ défini par générateurs et relations comme suit :

- générateurs : symboles $\{a,b\}$ avec $a, b \in K^\times$,
- relations : **(RC1')**, **(RC2')** et **(RC3')**,

on obtient un invariant :

$$c' : I(K)^2/I(K)^3 \to k_2(K).$$

Le groupe $k_2(K)$ s'appelle le *deuxième groupe de K-théorie de Milnor de K modulo* 2.

Nous sommes maintenant en mesure de voir que l'analogue du théorème de Merkurjev (théorème 8.7) pour c' est vrai et est beaucoup plus facile à démontrer :

Théorème 9.1 (Milnor [7]). *L'invariant c' est un isomorphisme dont la réciproque $\pi : k_2(K) \to I(K)^2/I(K)^3$ est induite par l'application :*

$$\begin{aligned} b : K^\times \times K^\times &\to I(K)^2/I(K)^3 \\ (x,y) &\to \langle\langle x, y\rangle\rangle_{an} \mod I(K)^3. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour montrer que l'application b induit bien un morphisme de groupes $\pi : k_2(K) \to I(K)^2/I(K)^3$, il suffit de voir que b respecte les relations **(RC1')**, **(RC2')** et **(RC3')**, c'est-à-dire que :

$$b(x, yz) = b(x,y) + b(x,z), \tag{13}$$
$$b(xy, z) = b(x,z) + b(y,z), \tag{14}$$
$$b(t, 1-t) = 0, \tag{15}$$
$$2b(x,y) = 0 \tag{16}$$

pour $x, y, z \in K^\times$ et $t \in K \setminus \{0,1\}$. L'égalité (13) découle aisément des calculs suivants effectués dans $I(K)^2/I(K)^3$:

$$\begin{aligned} b(x,y) + b(x,z) &= \langle 1, -x, -y, xy, 1, -x, -z, xz\rangle_{an} \\ &= \langle 1, -x, -y, xy, 1, -x, -z, xz, \underbrace{yz, -yz}_{\mathbb{H}}, \underbrace{xyz, -xyz}_{\mathbb{H}}\rangle_{an} \\ &= \langle 1, -x, -yz, xyz\rangle_{an} + \langle yz, -xyz, -y, xy, 1, -x, -z, xz\rangle_{an} \\ &= \langle\langle x, yz\rangle\rangle_{an} + \underbrace{\langle\langle x, y, z\rangle\rangle_{an}}_{\in I(K)^3} \\ &= b(x, yz). \end{aligned}$$

L'égalité (14) se démontre exactement de la même manière. On prouve (15) en se rappelant que, d'après la preuve de **(RC2)**, on a $\langle\langle t, 1-t\rangle\rangle \cong \mathbb{H}^2$, de sorte que $b(t, 1-t) = \langle\langle t, 1-t\rangle\rangle_{an} = 0$. Et de même, on prouve (16) en se rappelant que, d'après la preuve de **(RC3)**, on a $\langle\langle x, y^2\rangle\rangle \cong \mathbb{H}^2$, de sorte que :

$$2b(x,y) \underset{(13)}{=} b(x,y^2) = \langle\langle x, y^2\rangle\rangle_{an} = 0.$$

On déduit de ces calculs que b induit un morphisme de groupes $\pi : k_2(K) \to I(K)^2/I(K)^3$ envoyant chaque symbole $\{x,y\}$ sur $\langle\langle x,y\rangle\rangle_{an} \mod I(K)^3$. En particulier, on a :

$$\pi \circ c'(\langle\langle x,y\rangle\rangle_{an}) = \langle\langle x,y\rangle\rangle_{an} \quad \text{et} \quad c' \circ \pi(\{x,y\}) = \{x,y\}$$

quels que soient $x, y \in K^\times$. Or $I(K)^2$ est engendré par les parties anisotropes des 2-formes de Pfister et $k_2(K)$ est engendré par les symboles $\{x,y\}$. On conclut que c' et π sont inverses l'un de l'autre. $\square$

Dans la section 2, nous avons décrit deux approches possibles afin de classifier les formes quadratiques : l'une consistait à construire des invariants sur $W(K)$ et l'autre à donner une présentation de $W(K)$. Le théorème précédent fournit une réponse satisfaisante à ces deux approches dans le cas des formes quadratiques qui sont dans $I(K)^2$:

- d'une part, c' est un invariant allant de $I(K)^2$ dans $k_2(K)$ et permettant de détecter les formes quadratiques qui sont dans $I(K)^3$;
- d'autre part, π fournit une présentation de $I(K)^2/I(K)^3$ par générateurs et relations : les générateurs sont donnés par les parties anisotropes des 2-formes de Pfister, et les relations sont induites par **(RC1')**, **(RC2')** et **(RC3')**.

En combinant ce théorème avec le théorème de Merkurjev (théorème 9.1), on obtient un triangle d'isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
 & k_2(K) \arrow[dl, bend left, "\pi"] \arrow[dd, "c\circ\pi"] \\
I(K)^2/I(K)^3 \arrow[ur, bend left, "c'"] \arrow[dr, "c"'] & \\
 & \mathrm{Br}(K)[2].
\end{tikzcd}$$

Ce triangle met en évidence des liens forts entre trois objets de natures a priori très différentes : les formes quadratiques sur K, la K-théorie de Milnor modulo 2 et les algèbres simples centrales. Le but des conjectures de Milnor est de généraliser ce triangle afin de décrire tous les quotients $I(K)^n/I(K)^{n+1}$.

10. Les conjectures de Milnor

Nous cherchons maintenant à construire des analogues des groupes $\mathrm{Br}(K)[2]$ et $k_2(K)$ qui permettent de décrire les quotients $I(K)^n/I(K)^{n+1}$ pour tout n.

10.1 Groupes de K-théorie supérieurs

Commençons par généraliser $k_2(K)$. Pour ce faire, rappelons que, quel que soit $n \geq 1$, le groupe $I(K)^n$ est engendré par les parties anisotropes des n-formes de Pfister $\langle\langle a_1, ..., a_n\rangle\rangle_{an}$ avec $a_1, ..., a_n \in K^\times$. Pour généraliser la construction de $k_2(K)$, nous devons donc comprendre quelles relations vérifient ces générateurs dans le quotient $I(K)^n/I(K)^{n+1}$. En suivant la même méthode que celle utilisée dans la preuve du théorème 9.1, on peut établir les relations suivantes :

(R1) L'application :

$$\begin{aligned} K^\times \times ... \times K^\times &\to I(K)^n/I(K)^{n+1} \\ (a_1, ..., a_n) &\mapsto \langle\langle a_1, ..., a_n\rangle\rangle_{an} \mod I(K)^{n+1} \end{aligned}$$

est n-linéaire.

(R2) Pour tout n-uplet $(a_1, ..., a_n)$ à valeurs dans $K^\times$ tel qu'il existe $i, j \in \{1, ..., n\}$ distincts vérifiant $a_i + a_j = 1$:

$$\langle\langle a_1, ..., a_n\rangle\rangle_{an} \equiv 0 \mod I(K)^{n+1}.$$

(R3) Pour tout n-uplet $(a_1, ..., a_n)$ à valeurs dans $K^\times$:

$$2\langle\langle a_1, ..., a_n\rangle\rangle_{an} \equiv 0 \mod I(K)^{n+1}.$$

On va donc naturellement modeler des groupes de K-théorie "supérieurs" via les générateurs et relations précédents :

Définition 10.1. *Pour $n \geq 1$, le* n-ième groupe de K-théorie de Milnor de K modulo 2 *est le groupe abélien $k_n(K)$ défini par générateurs et relations comme suit :*

- *générateurs : symboles $\{a_1, ..., a_n\}$ avec $a_1, ..., a_n \in K^\times$;*
- *relations :*

(R1') *L'application :*

$$\begin{aligned} K^\times \times ... \times K^\times &\to k_n(K) \\ (a_1, ..., a_n) &\mapsto \{a_1, ..., a_n\} \end{aligned}$$

est n-linéaire.

(R2') *Pour tout n-uplet $(a_1, ..., a_n)$ à valeurs dans $K^\times$ tel qu'il existe $i, j \in \{1, ..., n\}$ distincts vérifiant $a_i + a_j = 1$:*

$$\{a_1, ..., a_n\} = 0.$$

(R3') *Pour tout n-uplet $(a_1, ..., a_n)$ à valeurs dans $K^\times$:*

$$2\{a_1, ..., a_n\} = 0.$$

Les relations **(R1)**, **(R2)** et **(R3)** montrent alors que l'on définit bien un morphisme de groupes :

$$\pi_n : k_n(K) \to I(K)^n/I(K)^{n+1}$$

en envoyant $\{a_1, ..., a_n\}$ sur $\langle\langle a_1, ..., a_n\rangle\rangle_{an}$ pour tous $a_1, ..., a_n \in K^\times$. La conjecture qui suit généralise vastement le théorème 9.1 :

Conjecture 10.2 (Première partie de la conjecture de Milnor)**.** *Pour tout $n \geq 1$, le morphisme π_n est un isomorphisme.*

10.2 Cohomologie galoisienne

Il est plus difficile d'expliquer comment généraliser le groupe de Brauer et cela dépasse le cadre de cet article de survol. Nous allons donc rester très vagues dans ce paragraphe.

De manière générale, il est possible d'associer au corps K une théorie cohomologique que l'on appelle la *cohomologie galoisienne*. Si l'on note $\overline{K}$ la clôture séparable de K, celle-ci n'est autre que la cohomologie du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, à condition de voir ce dernier comme un groupe topologique et non comme un groupe abstrait.

Nous sommes ici intéressés par la cohomologie galoisienne de K à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Celle-ci peut être décrite explicitement en termes d'espaces de fonctions allant du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ vers le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Plus précisément, donnons-nous un entier naturel $n \geq 0$, et considérons le groupe abélien Z^n des fonctions continues :

$$f : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(g_2, ..., g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, ..., g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, ..., g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, ..., g_n) = 0$$

pour tous $g_1, ..., g_{n+1} \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Ce groupe, que l'on appelle le groupe des n-cocycles, contient comme sous-groupe l'ensemble B^n des fonctions :

$$h : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

de la forme :

$$h(g_1, ..., g_n) = h_0(g_2, ..., g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i h_0(g_1, ..., g_{i-1}, g_i g_{i+1}, ..., g_n) + (-1)^n h_0(g_1, ..., g_{n-1})$$

pour une certaine fonction continue $h_0 : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^{n-1} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les éléments de B^n sont appelés les n-cobords. Le n-ième groupe de cohomologie de K à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est alors le quotient des n-cocycles par les n-cobords :

$$H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) := Z^n/B^n.$$

Cette définition est technique et il n'est pas nécessaire de la retenir précisément dans la suite. On notera simplement que le groupe $H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est défini de manière très explicite et qu'il ne dépend que du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Un résultat élémentaire et classique concernant ces groupes de cohomologie permet d'identifier la 2-torsion du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(K)[2]$ avec le deuxième groupe de cohomologie $H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en envoyant une algèbre de quaternions $H_{a,b}$ sur le 2-cocycle :

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^2 &\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (g_1, g_2) &\mapsto \phi\left(\frac{g_1(\sqrt{a})}{\sqrt{a}}\right) \cdot \phi\left(\frac{g_2(\sqrt{b})}{\sqrt{b}}\right), \end{aligned}$$

où ϕ est l'unique isomorphisme entre $\{-1, 1\}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est alors naturel de chercher à remplacer le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(K)[2]$ par les groupes de cohomologie supérieurs $H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ afin de décrire les quotients $I(K)^n/I(K)^{n+1}$ pour $n \geq 3$. La première étape cruciale consiste donc à construire un morphisme reliant le groupe de cohomologie $H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ au quotient $I(K)^n/I(K)^{n+1}$. Si l'on croit à la conjecture 10.2, ce dernier quotient peut être remplacé par le groupe de K-théorie $k_n(K)$.

En s'inspirant des constructions précédentes et en faisant quelques calculs élémentaires, on peut vérifier que l'on définit bien un morphisme de groupes $r_n : k_n(K) \to H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en envoyant chaque symbole $\{a_1, ..., a_n\}$ sur le n-cocycle :

$$\begin{aligned} f_{a_1,...,a_n} : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^n &\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (g_1, ..., g_n) &\mapsto \phi\left(\frac{g_1(\sqrt{a_1})}{\sqrt{a_1}}\right) \cdots \phi\left(\frac{g_n(\sqrt{a_n})}{\sqrt{a_n}}\right). \end{aligned}$$

La conjecture qui suit généralise alors vastement le théorème de Merkurjev (théorème 8.7) :

Conjecture 10.3 (Deuxième partie de la conjecture de Milnor)**.** *Pour tout $n \geq 1$, le morphisme r_n est un isomorphisme.*

Cette conjecture présente, entre autres, deux intérêts majeurs :

- contrairement aux groupes $I(K)^n/I(K)^{n+1}$ et $k_n(K)$, la cohomologie est très flexible. Cela permet par exemple souvent d'insérer les groupes de cohomologie dans des suites exactes, ce qui les rend plus faciles à manipuler et à calculer.
- le groupe de cohomologie $H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ne dépend que du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. La conjecture donne donc une description du groupe $k_n(K)$ (et du groupe $I(K)^n/I(K)^{n+1}$ si l'on croit à la première partie de la conjecture de Milnor) en termes uniquement de ce groupe de Galois et non de l'arithmétique interne du corps K.

10.3 Résumé et conclusion

Les deux conjectures de Milnor prédisent donc des liens profonds entre trois objets de natures a priori très différentes : les formes quadratiques, la K-théorie et la cohomologie galoisienne. Ces liens peuvent être résumés via le triangle d'isomorphismes suivant :

$$\begin{tikzcd}
& & \{a_1, ..., a_n\} \arrow[lldd, mapsto] \arrow[dddd, bend left=60, mapsto] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] \\
& & k_n(K) \arrow[dl, "\pi_n"'] \arrow[dd, "r_n"] \\
\langle\langle a_1, ..., a_n \rangle\rangle_{an} \arrow[r, phantom, "\in"] \arrow[rrdd, mapsto] & I(K)^n/I(K)^{n+1} \arrow[dr, "e_n"] & \\
& & H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] \\
& & f_{a_1,...,a_n}.
\end{tikzcd} \tag{17}$$

où $e_n := r_n \circ \pi_n^{-1}$. Cela fournit une réponse complète et satisfaisante aux deux approches présentées dans la section 2 :

- le morphisme π_n permet de donner une présentation par générateurs et relations de $I(K)^n/I(K)^{n+1}$.
- la famille de morphismes $(e_n)_n$ constitue un système complet d'invariants dans le sens où il permet de décider si deux formes quadratiques sont isométriques ou non. En effet, donnons-nous deux formes quadratiques q_1 et q_2 dans $W(K)$. Afin de déterminer si q_1 et q_2 sont isométriques, on commence par comparer leurs premiers invariants, à savoir la dimension et le discriminant. S'ils ne sont pas les mêmes, alors q_1 et q_2 ne peuvent pas être isométriques. Par contre, si q_1 et q_2 ont même dimension et même discriminant, on déduit que $q_1 - q_2 \in I(K)^2$. On peut alors s'intéresser à l'invariant suivant, à savoir e_2, et donc calculer $e_2(q_1 - q_2)$. Si $e_2(q_1 - q_2) \neq 0$, alors q_1 et q_2 ne peuvent pas être isométriques. Par contre si $e_2(q_1 - q_2) = 0$, alors $q_1 - q_2 \in I(K)^3$ et on peut s'intéresser à l'invariant suivant e_3. En itérant cette procédure, deux cas se présentent :
  a) le processus s'arrête car on aboutit à un entier n tel que $e_n(q_1 - q_2) \neq 0$. Dans ce cas, q_1 et q_2 ne sont pas isométriques.
  b) le processus ne s'arrête jamais, de sorte que $e_n(q_1 - q_2) = 0$ pour tout n. On a alors $q_1 - q_2 \in \bigcap_{n\geq 2} I(K)^n$. Mais un théorème classique dû à Arason (c.f. Hauptsatz X.5.1 dans [4]) affirme qu'une forme quadratique anisotrope de $I(K)^n$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est non nul est de dimension au moins 2^n. Du coup, on a $\bigcap_{n\geq 2} I(K)^n = \{0\}$, et donc $q_1 = q_2 \in W(K)$. Cela prouve que q_1 et q_2 sont bien isométriques.

Comme cela a été expliqué dans l'introduction de ce texte, la deuxième partie de la conjecture de Milnor (ainsi qu'une vaste généralisation qui avait été conjecturée auparavant par Bloch et Kato) a été établie en 2003 par Voevodsky en s'appuyant fortement sur des travaux antérieurs de Rost. En utilisant ce résultat, plusieurs auteurs ont ensuite montré la première conjecture de Milnor : Orlov, Vishik et Voevodsky dans [10], Morel dans [8] et [9], et Kahn et Sujatha dans [2]. Ainsi, on sait de nos jours que le triangle (17) est bien un triangle d'isomorphismes, et donc que chaque quotient $I(K)^n/I(K)^{n+1}$ s'identifie à un groupe de K-théorie et à un groupe de cohomologie galoisienne.

Remerciements. Je voudrais remercier Javier Fresán, David Harari et Yves Stalder pour leurs commentaires qui ont permis d'améliorer substantiellement ce texte.

Bibliographie

[1] S. Joukhovitski et A. Suslin : *Norm varieties*, Journal of Pure and Applied Algebra **206**, 245–276 (2006).

[2] B. Kahn et R. Sujatha : *Motivic cohomology and unramified cohomology of quadrics*, Journal of the European Mathematical Society **2**(2), 145–177 (2000).

[3] D. Izquierdo : *Complément à un article de la Gazette des Mathématiciens sur la conjecture de Milnor*, `https://perso.pages.math.cnrs.fr/users/diego.izquierdo/research/`, 2020.

[4] T. Y. Lam : *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics **67**, American Mathematical Society, Providence, RI (2005).

[5] A. S. Merkurjev : *On the norm residue symbol of degree 2* (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR **261**(3), 542–547 (1981). Traduction dans Soviet Math. Dokl. **24**(3), 546–551 (1981).

[6] A. S. Merkurjev et A. A. Suslin : *The norm residue homomorphism of degree three* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **54**(2), 339–356 (1990). Traduction dans Math. USSR-Izv. **36**(2), 349–367 (1991).

[7] J. Milnor : *Algebraic K-theory and quadratic forms*, Invent. Math. **9**, 318–344 (1969/70).

[8] F. Morel : *Milnor's conjecture on quadratic forms and mod 2 motivic complexes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **114**, 63–101 (2006).

[9] F. Morel : *Suite spectrale d'Adams et invariants cohomologiques des formes quadratiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328**(11), 963–968 (1999).

[10] D. Orlov, A. Vishik et V. Voevodsky : *An exact sequence for $K_\star^M/2$ with applications to quadratic forms*, Ann. of Math. (2) **165**(1), 1–13 (2007).

[11] M. Rost : *Hilbert's theorem 90 forKM3for degree-two extensions*, prépublication, Univ. Regensburg (1986).

[12] V. Voevodsky : *Motivic cohomology with Z/2-coefficients*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **98**, 59—104 (2003).

[13] E. Witt : *Theorie des quadratischen Formen in beliebigen Korpern*, J. Reine Angew. Math. **176**, 31–44 (1937).