Complément à un article de la Gazette des Mathématiciens sur la conjecture de Milnor

Diego Izquierdo

Cette note est un complément à l'article [1]. Rappelons que, étant donné un corps K de caractéristique différente de 2, on dispose des règles de calcul suivantes dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(K)$ de K :

Règles de calcul 0.1.

(RC1) *L'application :*

$$\begin{aligned} K^\times \times K^\times &\to \mathrm{Br}(K) \\ (a,b) &\mapsto H_{a,b} \end{aligned}$$

est bilinéaire. Autrement dit, pour tous $a, b, c \in K^\times$:

$$H_{a,bc} = H_{a,b} + H_{a,c} \in \mathrm{Br}(K),$$
$$H_{ab,c} = H_{a,c} + H_{b,c} \in \mathrm{Br}(K).$$

(RC2) *Pour tout $a \in K \setminus \{0,1\}$:*

$$H_{a,1-a} = 0 \in \mathrm{Br}(K).$$

(RC3) *Pour tous $a, b \in K^\times$:*

$$2H_{a,b} = 0 \in \mathrm{Br}(K).$$

Le but de cette note est de démontrer, à l'aide de ces règles de calcul, le théorème suivant :

Théorème 0.2 (Th. 8.6 de [1]). *La formule :*

$$c(\langle a_1, ..., a_n\rangle) = -\sum_{i<j} H_{a_i,a_j} + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor H_{-1,-1}. \tag{1}$$

définit bien une application :

$$c : W(K) \to \mathrm{Br}(K).$$

Sa restriction à $I(K)^2$ est un morphisme de groupes, dont le noyau contient $I(K)^3$.

Il convient d'abord de déduire de **(RC1)**-**(RC3)** quelques règles de calcul supplémentaires :

Règles de calcul 0.3.

(RC4) *Pour tous $a, b, c, d \in K^\times$:*

$$H_{ac^2,bd^2} = H_{a,b} \in \mathrm{Br}(K).$$

(RC5) *Pour tout $a \in K^\times$:*

$$H_{a,-a} = 0 \in \mathrm{Br}(K).$$

Démonstration.

(RC4) On a :

$$\begin{aligned} H_{ac^2,bd^2} &= H_{a,b} + 2H_{a,d} + 2H_{c,b} + 4H_{c,d} && \text{d'après } \textbf{(RC1)} \\ &= H_{a,b} && \text{d'après } \textbf{(RC3)}. \end{aligned}$$

(RC5) On a :

$$\begin{aligned} H_{a,-a} &= H_{a,-a} + H_{a^{-1},1-a^{-1}} && \text{d'après } \textbf{(RC2)} \\ &= H_{a,1-a} && \text{d'après } \textbf{(RC1)} \\ &= 0 && \text{d'après } \textbf{(RC2)}. \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant passer à la preuv du théorème 1.2. Pour ce faire, nous allons d'abord montrer proprement que la formule (1) définit bien une application c allant de l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées $Q_a(K)$ vers le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(K)$. Nous esquisserons ensuite les calculs permettant de montrer que $c|_{I(K)^2}$ est un morphisme de groupes dont le noyau contient $I(K)^3$.

Étape 1. Montrons d'abord que c est bien définie sur l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées de dimension 2. On se donne donc $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K^\times$ tels que $\langle a_1, a_2\rangle \cong \langle b_1, b_2\rangle$ et on cherche à montrer que $H_{a_1,a_2} = H_{b_1,b_2} \in \mathrm{Br}(K)$. Comme les formes quadratiques $\langle a_1, a_2\rangle$ et $\langle b_1, b_2\rangle$ sont isométriques, elles ont même discriminant et a_1 appartient à l'image de $\langle b_1, b_2\rangle$. Autrement dit, il existe $\delta \in K^\times$ et $x_1, x_2 \in K$ tels que :

$$a_1a_2 = b_1b_2\delta^2, \tag{2}$$

$$b_1x_1^2 + b_2x_2^2 = a_1. \tag{3}$$

Quitte à interchanger b_1 et b_2, on peut supposer sans perte de généralité que $x_1 \neq 0$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} H_{a_1,a_2} &= H_{a_1,b_1b_2a_1^{-1}\delta^2} && \text{d'après (2)} \\ &= H_{a_1,b_1b_2a_1^{-1}} && \text{d'après } \textbf{(RC4)} \\ &= H_{a_1,-b_1b_2} - H_{a_1,-a_1} && \text{d'après } \textbf{(RC1)} \\ &= H_{a_1,-b_1b_2} && \text{d'après } \textbf{(RC5)} \\ &= H_{b_1x_1^2+b_2x_2^2,-b_1b_2} && \text{d'après (3)} \\ &= H_{b_1x_1^2,-b_1b_2} + H_{\left(1+b_2b_1^{-1}(x_2x_1^{-1})^2\right),-b_1b_2} && \text{d'après } \textbf{(RC1)} \\ &= H_{b_1,-b_1b_2} + H_{\left(1+b_2b_1^{-1}(x_2x_1^{-1})^2\right),-b_2b_1^{-1}(x_2x_1^{-1})^2} && \text{d'après } \textbf{(RC4)} \\ &= H_{b_1,-b_1} + H_{b_1,b_2} + H_{\left(1+b_2b_1^{-1}(x_2x_1^{-1})^2\right),-b_2b_1^{-1}(x_2x_1^{-1})^2} && \text{d'après } \textbf{(RC1)} \\ &= H_{b_1,b_2} && \text{d'après } \textbf{(RC2)} \text{ et } \textbf{(RC5)}. \end{aligned}$$

Étape 2. Montrons maintenant que c est bien définie sur $Q_a(K)$. On se donne donc des éléments $a_1, ...a_n, b_1, ..., b_n \in K^\times$ tels que $\langle a_1, ..., a_n\rangle \cong \langle b_1, ..., b_n\rangle$, et on cherche à établir que :

$$\sum_{i<j} H_{a_i,a_j} = \sum_{i<j} H_{b_i,b_j} \in \mathrm{Br}(K). \tag{4}$$

Supposons d'abord que $\langle a_1, a_2\rangle \cong \langle b_1, b_2\rangle$ et que $a_i = b_i$ pour $i \geq 3$. En comparant les discriminants de $\langle a_1, a_2\rangle$ et $\langle b_1, b_2\rangle$, on obtient :

$$a_1a_2 = b_1b_2\delta^2 \tag{5}$$

pour un certain $\delta \in K^\times$, et en utilisant l'étape 1, on voit que :

$$H_{a_1,a_2} = H_{b_1,b_2} \in \mathrm{Br}(K). \tag{6}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} H_{a_i,a_j} &= H_{a_1,a_2} + \sum_{i\geq 3} H_{a_1,a_i} + \sum_{i\geq 3} H_{a_2,a_i} + \sum_{3\leq i<j} H_{a_i,a_j} \\
&= H_{b_1,b_2} + H_{a_1,a_3...a_n} + H_{a_2,a_3...a_n} + \sum_{3\leq i<j} H_{b_i,b_j} && \text{d'après (6) et } \textbf{(RC1)} \\
&= H_{b_1,b_2} + H_{a_1a_2,a_3...a_n} + \sum_{3\leq i<j} H_{b_i,b_j} && \text{d'après } \textbf{(RC1)} \\
&= H_{b_1,b_2} + H_{b_1b_2\delta^2,b_3...b_n} + \sum_{3\leq i<j} H_{b_i,b_j} && \text{d'après (5)} \\
&= H_{b_1,b_2} + H_{b_1b_2,b_3...b_n} + \sum_{3\leq i<j} H_{b_i,b_j} && \text{d'après } \textbf{(RC4)} \\
&= \sum_{i<j} H_{b_i,b_j} && \text{d'après } \textbf{(RC1)}.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il faut maintenant ramener le cas général à la situation particulière que nous venons d'étudier. Pour ce faire, disons que deux n-uplets $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$ à valeurs dans $K^\times$ sont *élémentairement équivalents* s'il existe $i, j \in \{1, ..., n\}$ distincts tels que $\langle x_i, x_j\rangle \cong \langle y_i, y_j\rangle$ et $x_k = y_k$ pour tout k différent de i et j. Nous avons déjà établi la formule (4) lorsque les n-uplets $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ sont élémentairement équivalents. Pour conclure, il suffit donc d'utiliser le lemme suivant, qui est dû à Witt et qui repose sur des arguments élémentaires sur les formes quadratiques :

Lemme : Soient $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ et $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ deux n-uplets à valeurs dans $K^\times$ tels que $\langle a_1, ..., a_n\rangle \cong \langle b_1, ..., b_n\rangle$. Alors il existe des n-uplets $\mathbf{x}_0$, ..., $\mathbf{x}_m$ tels que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}_m = \mathbf{b}$, et pour tout $k \in \{0, ..., m-1\}$, les n-uplets $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_{k+1}$ sont élémentairement équivalents.

Étape 3. Esquissons maintenant comment montrer que $c|_{I(K)^2}$ est un morphisme de groupes. Étant données deux formes quadratiques non dégénérées $q = \langle a_1, ..., a_n\rangle$ et

$q' = \langle b_1, ..., b_m \rangle$, on commence par calculer $c(q \perp q')$:

$$\begin{aligned}
c\left(q \perp q'\right) &= c\left(\langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \rangle\right) \\
&= -\sum_{i<j} H_{a_i,a_j} - \sum_{k<l} H_{b_k,b_l} - \sum_{i,k} H_{a_i,b_k} + \left\lfloor \frac{n+m}{4} \right\rfloor H_{-1,-1} \\
&\underset{\textbf{(RC1)}}{=} c\left(\langle a_1, ..., a_n \rangle\right) + c\left(\langle b_1, ..., b_m \rangle\right) - H_{a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_m} \\
&\qquad\qquad + \left(\left\lfloor \frac{n+m}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor \right) H_{-1,-1} \\
&= c(q) + c(q') - H_{d(q),d(q')} + \left(\left\lfloor \frac{n+m}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor \right) H_{-1,-1}, \qquad (7)
\end{aligned}$$

où $d(q)$ et $d(q')$ sont les discriminants respectifs de q et q'.

Supposons maintenant que q et q' soient dans $I(K)^2$. Si l'on pose $w := w(q \perp q')$, on a une isométrie :

$$q \perp q' \cong (q + q') \perp \mathbb{H}^w$$

par définition de $q + q'$. En particulier, $c\left(q \perp q'\right) = c\left((q + q') \perp \mathbb{H}^w\right)$. Mais on peut calculer $c(q \perp q')$ en fonction de $c(q)$ et de $c(q')$ ainsi que $c\left((q + q') \perp \mathbb{H}^w\right)$ en fonction de $c(q+q')$ grâce à la formule (7). Cela permet donc d'aboutir à une expression de $c(q+q')$ en fonction de $c(q)$ et de $c(q')$ du type :

$$c(q + q') = c(q) + c(q') + \text{termes d'erreur.}$$

Les termes d'erreur font apparaître l'algèbre de quaternions $H_{-1,-1}$ ainsi des algèbres de quaternions dont les paramètres dépendent de $d(q)$ et $d(q')$. Mais $d(q)$ et $d(q')$ peuvent être calculés puisque q et q' appartiennent à $I(K)^2 = \mathrm{Ker}(d_\pm)$. Du coup, tous les termes d'erreur deviennent explicites et on vérifie aisément avec les règles de calcul **(RC1)**-**(RC5)** que leur somme est nulle. Par conséquent :

$$c(q + q') = c(q) + c(q')$$

Étape 4. On termine en esquissant la preuve de l'inclusion $I(K)^3 \subseteq \mathrm{Ker}(c)$. Comme $I(K)^3$ est engendré par les parties anisotropes des 3-formes de Pfister, il suffit de montrer que $c(\langle\langle x, y, z \rangle\rangle_{an}) = 0$ pour $x, y, z \in K^\times$. On commence par calculer $c\left(\langle\langle x, y, z \rangle\rangle\right)$:

$$\begin{aligned}
c\left(\langle\langle x, y, z \rangle\rangle\right) &= c\left(\langle\langle 1, -x, -y, -z, xy, xz, yz, -xyz \rangle\rangle\right) \\
&= H_{1,-x} + H_{-x,-y} + H_{xy,-z} + H_{-xyz,xy} \\
&\qquad + H_{-x^2y^2z,xy} + H_{-x^3y^2z^2,yz} && \text{par définition de } c \\
&\qquad\qquad + H_{-x^3y^3z^3,-xyz} \\
&= 14\left(H_{-x,-y} + H_{-y,-z} + H_{-x,-z}\right) \\
&\qquad + 6\left(H_{-x,-x} + H_{-y,-y} + H_{-z,-z}\right) && \text{d'après } \textbf{(RC1)} \\
&= 0. && \text{d'après } \textbf{(RC3)}
\end{aligned}$$

On peut ensuite conclure en écrivant $\langle\langle x, y, z \rangle\rangle \cong \langle\langle x, y, z \rangle\rangle_{an} \perp \mathbb{H}^w$ avec $w := w(\langle\langle x, y, z \rangle\rangle)$ puis en calculant $c(\langle\langle x, y, z \rangle\rangle_{an})$ grâce à la formule (7).

Bibliographie

[1] D. Izquierdo : *Autour de la conjecture de Milnor*, Gazette de la SMF **166**, (2020).