# Principe local-global pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs I

Diego Izquierdo

École Normale Supérieure

45, Rue d'Ulm - 75005 Paris - France

diego.izquierdo@ens.fr

**Résumé.** Soit $K$ le corps des fonctions d'une courbe projective lisse $X$ sur un corps local supérieur $k$. On exhibe des exemples et des contre-exemples au principe local-global pour les algèbres simples centrales sur $K$, qui est une hypothèse importante pour disposer de suites exactes de Poitou-Tate pour les tores sur $K$.

**Abstract.** Let $K$ be the function field of a smooth projective curve $X$ over a higher-dimensional local field $k$. We give examples and counter-examples to the local-global principle for central simple algebras over $K$, which is an important hypothesis to have Poitou-Tate exact sequences for tori over $K$.

Ces dernières années, nous avons été témoins d'un important regain d'intérêt pour les questions de type principe local-global sur des corps autres que les corps de nombres ou les corps de fonctions de courbes sur des corps finis. Deux principales techniques ont été mises au point pour étudier ces problèmes : la méthode du patching développée par Harbater, Hartmann et Krashen et utilisée par Colliot-Thélène, Parimala et Suresh pour le cas des corps de fonctions de courbes sur un corps complet de valuation discrète ([HHK14]), et les méthodes cohomologiques développées par Harari, Scheiderer et Szamuely pour le cas des corps de fonctions de courbes sur un corps $p$-adique ([HSz13]). Cette dernière méthode a aussi permis à Colliot-Thélène et Harari d'étudier le cas des corps de fonctions de courbes sur $\mathbb{C}((t))$ ([CTH14]). Dans [Izq14a] les théorèmes de dualité arithmétique qui avaient été obtenus précédemment dans [HSz13] et [CTH14] ont été généralisés aux corps de fonctions de courbes sur des corps locaux supérieurs. De nouvelles difficultés, liées à la grande dimension cohomologique et à la non finitude de certains groupes de cohomologie, avaient alors été mises en évidence. Le but du présent article est de présenter certains aspects du principe local-global sur de tels corps. L'étude est poursuivie dans [Izq14b].

# 1. Énoncés des théorèmes principaux

Ce texte est la suite de l'article [Izq14a] où sont établis des théorèmes de dualité arithmétique pour les modules finis, les tores, les groupes de type multiplicatif et même les complexes à deux termes de tores sur le corps des fonctions d'une courbe sur un corps local supérieur.

Avant de présenter le contenu de cet article, on commence par rappeler le cadre de [Izq14a]. On se donne un entier $d \geq 0$ et un corps $d$-local $k$, c'est-à-dire un corps complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel est $(d-1)$-local, les corps 0-locaux étant par définition les corps finis et $\mathbb{C}((t))$. On suppose que le corps 1-local correspondant est de caractéristique 0. Soit $X$ une courbe projective lisse sur $k$. Soient $X^{(1)}$ l'ensemble de ses points fermés, $K$ son corps des fonctions et $T$ un $K$-tore. On note $\hat{T}$ le module des caractères de $T$, $\check{T}$ le module des cocaractères de $T$ et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d)$, où $\mathbb{Z}(d)$ est le $d$-ième complexe motivique. On note aussi $Ш^r(T)$ (resp. $Ш^r(\tilde{T})$) le sous-groupe de $H^r(K,T)$ (resp. $H^r(K,\tilde{T})$) constitué des éléments dont la restriction à $H^r(K_v,T)$ (resp. $H^r(K_v,\tilde{T})$) est nulle pour chaque $v \in X^{(1)}$.

En notant $\overline{A}$ le quotient de $A$ par son sous-groupe divisible maximal pour chaque groupe abélien $A$, le théorème 0.1 de [Izq14a] établit dans ce contexte des dualités parfaites de groupes finis entre $Ш^1(T)$ et $\overline{Ш^{d+2}(\tilde{T})}$ et entre $Ш^{d+1}(\tilde{T})$ et $\overline{Ш^2(T)}$, ainsi que des suites exactes de type Poitou-Tate sous l'hypothèse $Ш^2(L,\mathbb{G}_m) = 0$ pour une extension de finie $L$ de $K$ déployant $T$. Il est donc intéressant d'étudier la nullité de $Ш^2(\mathbb{G}_m)$. Le théorème suivant résume les résultats que nous obtenons :

**Théorème 1.1.** *(théorèmes 5.1 et 5.13 et exemples 5.15 et 5.17)*
*On garde les notations décrites ci-dessus. Pour $i \in \{0,1,...,d\}$, on note $k_i$ le corps $i$-local associé à $k$ et $\mathcal{O}_{k_i}$ son anneau des entiers.*

*(i) Si $X$ est la droite projective ou une conique dans $\mathbb{P}^2_k$, alors $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est nul.*

*(ii) Supposons que $k_1$ est un corps $p$-adique et que $X$ est une courbe sur $k$ de la forme Proj$(k[x,y,z]/(P(x,y,z)))$ où $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x,y,z]$ est un polynôme homogène. Supposons aussi que Proj$(k_0[x,y,z]/(\overline{P}(x,y,z)))$ est une courbe lisse et géométriquement intègre, où $\overline{P}(x,y,z) \in k_0[x,y,z]$ désigne la réduction de $P$. Alors $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.*

*(iii) Supposons que $k_0 = \mathbb{C}((t))$ et que $X$ est la courbe elliptique sur $k$ d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$ avec $A, B \in k_0$. Supposons de plus que la courbe elliptique sur $k_0$ d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$ admet une réduction modulo $t$ de type additif. Alors $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.*

*(iv) Soit $p$ un nombre premier impair. Si $k = \mathbb{Q}_p((t_1))...((t_{d-1}))$ avec $d > 1$ et $X$ est la courbe elliptique d'équation $y^2 = x(1-x)(x-p)$, alors $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$.*

*(v) Si $k = \mathbb{C}((t_1))...((t_{d+1}))$ avec $d \geq 0$ et $X$ est la courbe elliptique d'équation $y^2 = x(1-x)(x-t_1)$, alors $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$.*

**Remarque 1.2.** (a) Le théorème précédent fournit des exemples et des contre-exemples au principe local-global pour les algèbres simples centrales sur $K$.
(b) Les preuves des assertions (ii) et (iii) reposent notamment sur un théorème établi par Harbater, Hartmann et Krashen par la technique de patching (le théorème 3.3.6 de [HHK14]).
(c) Nous faisons l'hypothèse $\mathrm{Car}(k_1) = 0$ parce que le cas $\mathrm{Car}(k_1) > 0$ pose énormément de difficultés : même obtenir une dualité locale semble être un travail très délicat dans ce dernier cas (voir la section 0.5 de [Izq14a].

# 2. Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu David Harari pour son soutien et ses conseils, ainsi que pour sa lecture soigneuse de ce texte : sans lui, ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Je suis aussi très reconnaissant à Jean-Louis Colliot-Thélène, Tamás Szamuely et Bruno Kahn pour leurs commentaires et leurs remarques, et à Giancarlo Lucchini Arteche pour de nombreuses discussions. Je voudrais finalement remercier l'École Normale Supérieure et l'Université Paris-Sud pour leurs excellentes conditions de travail.

# 3. Notations

**Groupes abéliens.** Pour $A$ un groupe topologique abélien (éventuellement muni de la topologie discrète), $n > 0$ un entier et $l$ un nombre premier, on notera :
- $A_{tors}$ la partie de torsion de $A$.
- ${}_nA$ la partie de $n$-torsion de $A$.
- $A_\wedge$ la limite projective des $A/nA$.
- $A_{div}$ le sous-groupe divisible maximal de $A$. En général, il ne coïncide pas avec le sous-groupe constitué des éléments divisibles de $A$.
- $\overline{A}$ le quotient de $A$ par $A_{div}$.
- $A^D$ le groupe des morphismes continus $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

**Faisceaux.** Tous les faisceaux sont considérés pour le petit site étale.

**Corps locaux supérieurs.** Les corps 0-locaux sont par définition les corps finis et le corps $\mathbb{C}((t))$. Pour $d \geq 1$, un corps $d$-local est un corps complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel est $(d-1)$-local. On remarquera que cette définition est plus générale que la définition standard. Lorsque $k$ est un corps $d$-local, on notera $k_0$, $k_1$, ..., $k_d$ les corps tels que $k_0$ est fini ou $\mathbb{C}((t))$, $k_d = k$, et pour chaque $i$ le corps $k_i$ est le corps résiduel de $k_{i+1}$. On rappelle le théorème de dualité sur un corps $d$-local $k$ : pour tout $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-module fini $M$ d'ordre $n$ premier à $\mathrm{Car}(k_1)$, on a un accouplement parfait de groupes finis $H^r(k, M) \times H^{d+1-r}(k, \mathrm{Hom}(M, \mu_n^{\otimes d})) \to H^{d+1}(k, \mu_n^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ce théorème est énoncé et démontré dans [Mil06] (théorème 2.17) lorsque $k_0 \neq \mathbb{C}((t))$. Il se prouve exactement de la même manière dans ce dernier cas : en effet, il suffit de procéder par récurrence à l'aide du lemme 2.18 de [Mil06], l'initialisation étant réduite à la dualité évidente $H^r(k_{-1}, M) \times H^{-r}(k_{-1}, \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \to H^0(k_{-1}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour le corps "$-1$-local" $k_{-1} = \mathbb{C}$.

**Groupes de Tate-Shafarevich.** Lorsque $L$ est le corps des fonctions d'une variété projective lisse géométriquement intègre $Y$ sur un corps $l$ et $M$ est un objet de la catégorie dérivée des $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-modules discrets, le $r$-ième groupe de Tate-Shafarevich de $M$ est, par définition, le groupe $Ш^r(L, M) = \mathrm{Ker}(H^r(L, M) \to \prod_{v \in Y^{(1)}} H^r(L_v, M))$, où $Y^{(1)}$ désigne les points de codimension 1 de $Y$ et $L_v$ le complété de $L$ par rapport à la valuation discrète $v$ pour chaque $v \in X^{(1)}$.

**Groupe de Brauer.** Lorsque $Z$ est un schéma, on note $\mathrm{Br}(Z)$ le groupe de Brauer cohomologique $H^2(Z, \mathbb{G}_m)$. Si $Z$ est intègre régulier, c'est un sous-groupe du groupe de Brauer du corps des fonctions de $Z$.

**Cadre.** Dans toute la suite, $d$ désignera un entier naturel fixé (éventuellement nul), $k$ un corps $d$-local et $X$ une courbe projective lisse géométriquement intègre sur $k$. On notera $X^{(1)}$ l'ensemble de ses points de codimension 1 et $K$ son corps des fonctions. Lorsque $k_0$ est fini, on supposera que le corps $k_1$ est de caractéristique 0 : autrement dit, ou bien $k_0 = \mathbb{C}((t))$, ou bien $d \geq 1$ et $k_1$ est un corps $p$-adique. Pour chaque $v \in X^{(1)}$, on notera $K_v$ le complété de $K$ pour la valuation $v$ et $\mathcal{O}_v$ son anneau des entiers. Lorsque $M$ est un $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module discret, on notera $Ш^r(M)$ au lieu de $Ш^r(K, M)$ s'il n'y a pas d'ambigüité.

**Complexes de Bloch et cohomologie motivique.** Dans l'article [Blo86], Bloch associe à chaque schéma $Y$ séparé de type fini sur un corps $E$ et à chaque entier naturel $i$ un complexe noté $z^i(Y, \cdot)$. Lorsque $Y$ est lisse, on note $\mathbb{Z}(i)$ (resp. $\mathbb{Z}(i)_{\mathrm{Zar}}$) le complexe de faisceaux $z^i(-, \cdot)[-2i]$ sur le petit site étale (resp. sur le petit site de Zariski), et pour chaque groupe abélien $A$, on note $A(i)$ (resp. $A(i)_{\mathrm{Zar}}$) le complexe $A \otimes \mathbb{Z}(i)$ (resp. $A \otimes \mathbb{Z}(i)_{\mathrm{Zar}}$), qui coïncide avec le complexe $A \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(i)$ (resp. $A \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(i)_{\mathrm{Zar}}$) puisque chaque terme de $\mathbb{Z}(i)$ (resp. $\mathbb{Z}(i)_{\mathrm{Zar}}$) est un faisceau plat. On renvoie à la partie 0.5 de [Izq14a] pour des rappels sur les complexes de Bloch.

# 4. Quelques rappels de [Izq14]

Nous rappelons ici le théorème suivant de [Izq14a], qui constitue l'une des motivations du présent article :

**Théorème 4.1.** *(théorèmes 3.9, 3.18 et 3.20 de [Izq14a])*
*Soit $T$ un $K$-tore. On note $\hat{T}$ le module des caractères de $T$, $\check{T}$ le module des cocaractères de $T$ et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d)$.*

*(i) Les groupes* $Ш^{d+2}(\tilde{T})$ *et* $Ш^2(T)$ *sont de torsion de type cofini, et on a des accouplements parfaits de groupes finis :*

$$Ш^1(T) \times \overline{Ш^{d+2}(\tilde{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \textit{et} \quad Ш^{d+1}(\tilde{T}) \times \overline{Ш^2(T)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

*(ii) Soit* $L$ *une extension finie déployant* $T$*. Supposons que* $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ *est nul. On dispose alors d'une suite exacte à 7 termes :*

$$\begin{tikzcd}
Ш^{d+3}(\tilde{T})^D \arrow[d] & 0 \arrow[l] & \\
H^0(K,T)_\wedge \arrow[r] & \mathbb{P}^0(T)_\wedge \arrow[r] & H^{d+2}(K,\tilde{T})^D \arrow[d] \\
H^{d+1}(K,\tilde{T})^D & \mathbb{P}^1(T) \arrow[l] & H^1(K,T) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

*où* $\mathbb{P}^r(T)$ *désigne un produit restreint adélique des* $H^r(K_v,T)$ *pour* $v \in X^{(1)}$*, et une suite exacte à 8 termes :*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{P}^{d+1}(\tilde{T}) \arrow[r] & H^1(K,T)^D \arrow[d] \\
(H^0(K,T)_\wedge)^D \arrow[d] & \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} \arrow[l] & H^{d+2}(K,\tilde{T}) \arrow[l] \\
H^{d+3}(K,\tilde{T}) \arrow[r] & \mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T}) \arrow[r] & (\varprojlim_n {}_nT(K^s))^D \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

*où* $\mathbb{P}^r(\tilde{T})$ *désigne un produit restreint adélique des* $H^r(K_v,\tilde{T})$ *pour* $v \in X^{(1)}$*.*

Ce théorème fournit une double motivation pour étudier la nullité de $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ :

- en tenant compte de (i), il est naturel de se demander si les groupes $Ш^{d+2}(\tilde{T})$ et $Ш^2(T)$ sont finis de sorte que $\overline{Ш^{d+2}(\tilde{T})} = Ш^{d+2}(\tilde{T})$ et $\overline{Ш^2(T)} = Ш^2(T)$. Il se trouve que ces finitudes sont impliquées par la nullité de $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$. En effet, d'après le lemme 3.16 de [Izq14a], le groupe $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ est nul si, et seulement si, le groupe $Ш^{d+2}(L,\mathbb{Z}(d))$ l'est, et comme $Ш^{d+2}(\tilde{T})$ et $Ш^2(T)$ sont de torsion de type cofini, un argument de restriction-corestriction montre que les nullités de $Ш^{d+2}(L,\mathbb{Z}(d))$ et $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ impliquent les finitudes de $Ш^{d+2}(\tilde{T})$ et $Ш^2(T)$.
- les suites de Poitou-Tate de (ii) sont exactes sous l'hypothèse $Ш^2(L,\mathbb{G}_m) = 0$.

Pour terminer, rappelons une conséquence importante de la partie (i) du théorème précédent qui sera très utile dans la suite :

**Corollaire 4.2.** *Les groupes* $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ *et* $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ *sont divisibles.*

*Démonstration.* Cela découle immédiatement du théorème 4.1(i) et de la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum. □

# 5. Nullité de $Ш^2(\mathbb{G}_m)$

Dans cette section, nous allons établir dans certains cas la nullité du groupe $Ш^2(\mathbb{G}_m)$. Un premier résultat dans ce sens est exprimé dans le théorème suivant :

**Théorème 5.1.** *Notons $\overline{X} = X \times_k k^s$ et supposons que $\overline{X} \cong \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$ (c'est-à-dire que $X$ est la droite projective ou une conique dans $\mathbb{P}^2_k$). Alors $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est nul.*

La remarque suivante sera utile dans la preuve :

**Remarque 5.2.** Soit $x \in Ш^2(\mathbb{G}_m)$. On voit alors que le résidu de $x$ dans $H^1(k(v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (voir l'annexe du chapitre II de [Ser94]) est nul pour chaque $v \in X^{(1)}$. Par conséquent, $x \in \mathrm{Br}(X)$. Comme pour chaque $v \in X^{(1)}$ le groupe $\mathrm{Br}(\mathcal{O}_v)$ est isomorphe à $\mathrm{Br}(k(v))$ (voir proposition II.1.1 de [Mil06]) et s'injecte dans $\mathrm{Br}(K_v)$, on en déduit que $x$ est dans le noyau de $\mathrm{Br}(X) \to \prod_{v\in X^{(1)}} \mathrm{Br}(k(v))$. Réciproquement, on voit aisément que $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Br}(X) \to \prod_{v\in X^{(1)}} \mathrm{Br}(k(v))\right)$ est contenu dans $Ш^2(\mathbb{G}_m)$, d'où l'égalité :

$$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Br}(X) \to \prod_{v\in X^{(1)}} \mathrm{Br}(k(v))\right) = Ш^2(\mathbb{G}_m).$$

*Démonstration du théorème 5.1.* Considérons $(\mathrm{Pic}(X))^\perp$ le noyau du morphisme $\mathrm{Br}(X) \to \prod_{v\in X^{(1)}} \mathrm{Br}(k(v))$. On a un isomorphisme $(\mathrm{Pic}(X))^\perp \cong Ш^2(\mathbb{G}_m)$. Soit $x \in (\mathrm{Pic}(X))^\perp$. On sait que $(\mathrm{Pic}(X))^\perp$ est divisible. On en déduit que pour chaque entier $n > 0$ il existe $x_n \in (\mathrm{Pic}(X))^\perp$ tel que $x = nx_n$. Par ailleurs, remarquons que $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$, puisque $\mathrm{Br}(\overline{X})$ s'injecte dans $\mathrm{Br}(\overline{k}(X))$ et $\mathrm{Br}(\overline{k}(X)) = 0$ d'après le théorème de Tsen. On obtient donc une suite exacte :

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})).$$

Or, comme $\overline{X} \cong \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$, le groupe $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est nul. On en déduit que $x$ et $x_n$ pour chaque $n$ sont dans l'image de $\mathrm{Br}(k)$. Notons $\tilde{x}$ (resp. $\tilde{x_n}$) un élément de $\mathrm{Br}(k)$ d'image $x$ (resp. $x_n$) dans $\mathrm{Br}(X)$. Fixons maintenant $v_0 \in X^{(1)}$, et notons $n_0 = [k(v_0) : k]$. Comme $x_{n_0} \in (\mathrm{Pic}(X))^\perp$, on déduit que l'image de $\tilde{x_{n_0}}$ par la composée :

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k(v)) \to \mathrm{Br}(k)$$

est 0. Mais un argument de restriction-corestriction impose que cette image est aussi $n_0\tilde{x_{n_0}}$. On en déduit que $n_0\tilde{x_{n_0}} = 0$, et donc $x = n_0 x_{n_0} = 0$. Par conséquent, $(\mathrm{Pic}(X))^\perp$ est nul. □

**Remarque 5.3.** • En fait, dans la preuve précédente, on pourrait supposer que $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est d'exposant fini $e$ au lieu de $\overline{X} \cong \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$. En effet, dans ce cas, on prend pour $\tilde{x}$ (resp. $\tilde{x_n}$) un élément de $\mathrm{Br}(k)$ d'image $ex$ (resp. $ex_n$) dans $\mathrm{Br}(X)$, et on montre exactement de la même manière que $ex = n_0(ex_{n_0})$ est nul. On en déduit que le groupe divisible $(\mathrm{Pic}(X))^\perp$ est d'exposant $e$, donc nul.

- Supposons que $k$ est $p$-adique. En notant $J$ la jacobienne de $X$, le groupe $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est d'exposant fini si, et seulement si, $H^1(k, J)$ est d'exposant fini. Or $H^1(k, J)$ est isomorphe au dual de $J(k)$ d'après le théorème de dualité pour les variétés abéliennes sur un corps $p$-adique (corollaire 3.4 de [Mil06]), et $J(k)$ est trivial si, et seulement si, $J$ est triviale d'après le théorème de structure de Mattuck ([Mat55]). Par conséquent, $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est d'exposant fini si, et seulement si, il est nul. Je ne sais pas si cette équivalence reste vraie lorsque $k$ n'est pas $p$-adique.

Notons maintenant $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de $k$, $\pi$ une uniformisante de $\mathcal{O}_k$ et $\kappa$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_k$. Pour obtenir la nullité de $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ dans des situations plus générales (théorème 1.1(ii)(iii) ou corollaires 5.11 et 5.12), nous allons procéder par récurrence sur l'entier $d \geq 0$. Pour ce faire, nous allons commencer par établir la propriété d'hérédité. Dans le cas où $k_0$ est un corps fini, l'initialisation sera donnée par le cas où $d = 1$, c'est-à-dire le cas où $k$ est $p$-adique, et elle découlera aisément des articles [Kat86] et [HSz13]. Dans le cas où $k_0 = \mathbb{C}((t))$, l'initialisation sera donnée par le cas où $d = 0$, c'est-à-dire le cas où $k = \mathbb{C}((t))$, et elle découlera aisément de l'article [DT83]. Nous allons donc établir l'hérédité sous l'hypothèse suivante sur le corps $k$ :

**(H 5.4)** *$d > 1$ si $k_0$ est fini et $d > 0$ si $k_0 = \mathbb{C}((t))$, c'est-à-dire $k$ n'est ni un corps fini ni un corps $p$-adique ni $\mathbb{C}((t))$.*

Énonçons maintenant l'hypothèse de récurrence :

**(H 5.5)** *(i) il existe un schéma intègre, projectif, lisse $\mathcal{X}$ de dimension 2 sur Spec $\mathcal{O}_k$ dont la fibre générique est $X$ et dont la fibre spéciale, que nous notons $X_0$, est intègre de point générique $\eta_0$,*

*(ii) il existe un entier naturel non nul $e$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $w \in X_0^{(1)}$, il existe un ouvert affine $\mathcal{U}_w = \mathrm{Spec}\ \mathcal{A}_w$ de $\mathcal{X}$ contenant $w$ et un point fermé $v_w$ de $U_w = \mathcal{U}_w \times_{\mathcal{O}_k} k$ tels que l'adhérence $\overline{\{v_w\}}$ de $v_w$ dans $\mathcal{U}_w$, munie de sa structure réduite, est régulière, contient $w$ et $\pi$ est de valuation au plus $e$ dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\overline{\{v_w\}},w}$,*

*(iii) les groupes $Ш^2(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z})$ et $Ш^3(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}(1))$ sont nuls.*

Sous de telles hypothèses, on notera $U_{w,0}$ la fibre spéciale de $\mathcal{U}_w$ pour chaque $w \in X_0$.

**Lemme 5.6.** *On suppose (H 5.4) et (H 5.5). Soient $r \in \{0, 1\}$ et $n \geq 1$. On dispose d'un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} H^{r+1}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[r] \arrow[d] & H^{r+1}(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[d] \\ H^r(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \arrow[r, hook] & H^r(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)), \end{tikzcd}$$

*où le morphisme vertical de droite est le résidu en $\eta_0$.*

*Démonstration.* Le cas $r = 0$ est évident puisque

$$H^r(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \to H^r(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$$

est un isomorphisme.
Concernant le cas $r = 1$, on remarque qu'il suffit de montrer que l'image de la composée $H^2(X, \mu_n) \to H^2(K, \mu_n) \to H^1(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est contenue dans $H^1(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Soit donc $x \in H^2(X, \mu_n)$. Écrivons le complexe de Bloch-Ogus (proposition 1.7 de [Kat86]) :

$$H^2(K, \mu_n) \to \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^1(k(v), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \oplus H^1(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{w \in X_0^{(1)}} H^0(\kappa(w), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)).$$

Comme $x \in H^2(X, \mu_n)$, l'image de $x$ dans $\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^1(k(v), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est nulle. On en déduit que l'image de $x$ dans $H^1(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est contenue dans :

$$\mathrm{Ker}\left( H^1(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{w \in X_0^{(1)}} H^0(\kappa(w), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) \right) = H^1(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

□

**Remarque 5.7.** On suppose (H 5.4) et (H 5.5). Sous de telles hypothèses, on rappelle que $U_{w,0}$ désigne la fibre spéciale $\mathcal{U}_w \times_{\mathcal{O}_k} \kappa$ de $\mathcal{U}_w$. On remarque alors qu'une preuve tout à fait identique à celle qui précède fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^{r+1}(U_w, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[r, hook] \arrow[d] & H^{r+1}(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[d] \\ H^r(U_{w,0}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \arrow[r, hook] & H^r(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)). \end{tikzcd}$$

**Lemme 5.8.** *On suppose (H 5.4) et (H 5.5). Soient $r \in \{0,1\}$ et $n \geq 1$. Soient $w \in X_0^{(1)}$ et $e_w$ la valuation de $\pi$ dans $\mathcal{O}_{\overline{\{v_w\}},w}$. Le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} H^{r+1}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[r, "Res_{k(v_w)}"] \arrow[d, "\delta_{\eta_0}"] & H^{r+1}(k(v_w), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[d, "\delta_w"] \\ H^r(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \arrow[r, "e_w \cdot Res_{\kappa(w)}"] & H^r(\kappa(w), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)), \end{tikzcd}$$

*dont les morphismes verticaux sont des résidus, est commutatif.*

*Démonstration.* Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^{r+1}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[r] \arrow[d] & H^{r+1}(U_w, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[d] \\ H^r(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \arrow[r] & H^r(U_{w,0}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \end{tikzcd}$$

est évidemment commutatif. Il suffit donc de montrer la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^{r+1}(U_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[r, "\mathrm{Res}_{k(v_w)}"] \arrow[d, "\delta_{\eta_0}"] & H^{r+1}(k(v_w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[d, "\delta_w"] \\ H^r(U_{w,0},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \arrow[r, "e_w\cdot\mathrm{Res}_{\kappa(w)}"] & H^r(\kappa(w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)). \end{tikzcd}$$

Notons $\hat{\mathcal{A}}_w$ le complété de $\mathcal{A}_w$ pour la topologie $\pi$-adique. On remarque que, comme $\mathcal{O}_{\overline{\{v\}},w}$ est complet pour la topologie $\pi$-adique, le morphisme Spec $\mathcal{O}_{\overline{\{v\}},w} \to \mathcal{U}_w$ s'étend en un morphisme Spec $\mathcal{O}_{\overline{\{v\}},w} \to$ Spec $\hat{\mathcal{A}}_w$. En tenant compte de la compatibilité des résidus avec la complétion et en remplaçant $v$ et $w$ par leurs images à travers le morphisme Spec $\mathcal{O}_{\overline{\{v\}},w} \to$ Spec $\hat{\mathcal{A}}_w$, on peut supposer que $\mathcal{A}_w$ est complet pour la topologie $\pi$-adique, et donc que le morphisme $H^r(\mathcal{U}_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \to H^r(U_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$ est surjectif.
Soit $x \in H^{r+1}(U_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. Notons $y_0 = \delta_{\eta_0}(x) \in H^r(U_{w,0},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$. D'après ce qui précède, $y_0$ se relève en un élément $y \in H^r(\mathcal{U}_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$. En voyant $y$ dans $H^r(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$ et $\pi$ dans $H^1(K,\mu_n) = K^\times/K^{\times n}$, on pose $z = y \cup \pi \in H^{r+1}(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. Pour $v \in U_w^{(1)}$, on remarque que $\delta_v(z) = v(\pi)\mathrm{Res}_{k(v)}(y) = 0$ et donc $z \in H^{r+1}(U_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. De plus, comme $\pi$ est une uniformisante de $\mathcal{O}_{\eta_0}$, on a $\delta_{\eta_0}(z) = y_0$ et donc, d'après le théorème de pureté cohomologique absolue de Gabber (théorème 3.1.1 de l'exposé XVI de [ILO14]), $x-z$ provient de $H^{r+1}(\mathcal{U}_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. Comme le morphisme $H^{r+1}(\mathcal{U}_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \to H^{r+1}(k(v_w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ se factorise par $H^{r+1}(\overline{\{v_w\}},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$, on déduit la relation $\delta_w(\mathrm{Res}_{k(v_w)}(x-z)) = e_w\mathrm{Res}_{\kappa(w)}(\delta_{\eta_0}(x-z)) = 0$. Il reste donc à montrer que $\delta_w(\mathrm{Res}_{k(v_w)}(z)) = e_w\mathrm{Res}_{\kappa(w)}(\delta_{\eta_0}(z))$, ce qui découle immédiatement des calculs :

$$\delta_w(\mathrm{Res}_{k(v_w)}(z)) = \delta_w(\mathrm{Res}_{k(v_w)}(y)\cup\mathrm{Res}_{k(v_w)}(\pi)) = e_w\mathrm{Res}_{\kappa(w)}(y) = e_w\mathrm{Res}_{\kappa(w)}(\delta_{\eta_0}(x)).$$

□

**Proposition 5.9.** *On suppose (H 5.4) et (H 5.5). Soit $r \in \{0,1\}$. On a $e! \cdot Ш^{r+2}(\mathbb{Z}(r)) \subseteq H^{r+2}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(r))$.*

*Démonstration.* Soit $x \in Ш^{r+2}(\mathbb{Z}(r))$. Soit $n > 0$ tel que $x$ est de $n$-torsion. Alors $x \in Ш^{r+1}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. Pour $v \in X^{(1)}$, comme l'image de $x$ dans $H^{r+1}(K_v,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ est nulle, l'image de $x$ dans $H^r(k(v),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$ l'est aussi, ce qui prouve que $x$ provient de $\tilde{x} \in H^{r+1}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. Étant donné que $H^{r+1}(\mathcal{O}_v,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ s'injecte dans $H^{r+1}(K_v,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ (voir l'annexe du chapitre II de [Ser94]) et que $H^{r+1}(\mathcal{O}_v,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \to H^{r+1}(k(v),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ est un isomorphisme, on déduit que

$$\tilde{x} \in \mathrm{Ker}\left(H^{r+1}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^{r+1}(k(v),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))\right).$$

Notons $y$ l'image de $\tilde{x}$ dans $H^r(X_0,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$. À l'aide du lemme précédent et de l'hypothèse (H 5.5)(ii), on déduit que $e!y \in \mathrm{Ker}(H^r(X_0,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \to \prod_{w\in X_0^{(1)}} H^r(\kappa(w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)))$. Montrons que $e!y = 0$ :

- Si $r = 0$, alors $H^0(X_0,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) \to \prod_{w\in X_0^{(1)}} H^0(\kappa(w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1))$ est injectif et donc $e!y = 0$.

- Si $r = 1$, comme $H^1(\mathcal{O}_{X_0,w}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^1(\kappa(w), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est un isomorphisme et $H^1(\mathcal{O}_{X_0,w}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^1(\kappa(\eta_0)_w, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est injectif, on déduit que $e!y \in Ш^1(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Or $Ш^1(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = {}_nШ^2(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}) = 0$ d'après l'hypothèse (H 5.5)(iii), et donc $e!y = 0$.

Par conséquent, $e!\tilde{x} \in \mathrm{Ker}\,(H^{r+1}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \to H^r(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)))$. Le théorème de pureté cohomologique absolue de Gabber permet alors de conclure que $e!\tilde{x}$ provient de $H^{r+1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$, ce qui prouve que tout élément de $e! \cdot Ш^{r+2}(\mathbb{Z}(r))$ provient de $H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r))$. Reste donc à montrer l'injectivité du morphisme $H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(K, \mathbb{Z}(r))$ :

- Si $r = 0$, on remarque que le morphisme $H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \to H^2(K, \mathbb{Z})$ s'identifie au morphisme $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ce dernier est la composée de $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ suivie de $H^1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, et ces deux morphismes sont injectifs d'après le théorème 3.1.1 de l'exposé XVI de [ILO14]. On en déduit l'injectivité de $H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \to H^2(K, \mathbb{Z})$ .
- Si $r = 1$, c'est évident puisque $\mathcal{X}$ est intègre régulier et $\mathbb{G}_m \cong \mathbb{Z}(1)[1]$.

□

**Théorème 5.10.** *Supposons (H 5.4) et (H 5.5). En particulier, $k$ n'est ni un corps fini ni un corps $p$-adique ni $\mathbb{C}((t))$. Soit $r \in \{0, 1\}$. On a $Ш^{r+2}(\mathbb{Z}(r)) = 0$.*

*Démonstration.* Soit $x \in e! \cdot Ш^{r+2}(\mathbb{Z}(r))$. D'après le corollaire précédent, on a $x \in H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r))$. De plus, pour chaque $v \in X^{(1)}$, l'image de $x$ dans $H^{r+2}(k(v), \mathbb{Z}(r))$ est nulle.

Soit $w \in X_0^{(1)}$. D'après l'hypothèse (H 5.5)(ii), la restriction $H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(\kappa(w), \mathbb{Z}(r))$ se factorise sous la forme $H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(\overline{\{v_w\}}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(\kappa(w), \mathbb{Z}(r))$. L'image de $x$ dans $H^{r+2}(k(v_w), \mathbb{Z}(r))$ est nulle. Comme $\overline{\{v_w\}}$ est régulier, la flèche $H^{r+2}(\overline{\{v_w\}}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(k(v_w), \mathbb{Z}(r))$ est injective et donc l'image de $x$ dans $H^{r+2}(\overline{\{v_w\}}, \mathbb{Z}(r))$ est nulle. Par conséquent, l'image de $x$ dans $H^{r+2}(k(w), \mathbb{Z}(r))$ est nulle. Cela impose que l'image de $x$ dans $H^{r+2}(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}(r))$ est en fait dans $Ш^{r+2}(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}(r))$, qui est nul d'après l'hypothèse (H 5.5)(iii). On en déduit que

$$x \in \mathrm{Ker}\left(H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}(r))\right).$$

- Si $r = 0$, comme $H^2(X_0, \mathbb{Z}) \to H^2(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z})$ est injectif, $x$ est dans le noyau de $\mathrm{Ker}\,(H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \to H^2(X_0, \mathbb{Z}))$. Ce dernier morphisme est injectif par pureté cohomologique absolue et donc $x = 0$. Par conséquent, le groupe $Ш^2(\mathbb{Z})$ est de $e!$-torsion et divisible, donc nul.
- Si $r = 1$, comme on a un isomorphisme $\mathrm{Br}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\eta_0}) \cong \mathrm{Br}(\kappa(\eta_0))$ et une injection $\mathrm{Br}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\eta_0}) \to \mathrm{Br}(K_{\eta_0})$, on déduit que :

$$x \in \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Br}(K) \to \prod_{v \in X^{(1)}} \mathrm{Br}(K_v) \times \mathrm{Br}(K_{\eta_0})\right).$$

Soit $n \geq 1$ tel que $x$ est de $n$-torsion. Alors :

$$x \in \operatorname{Ker}\left(H^2(K,\mu_n) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^2(K_v,\mu_n) \times H^2(K_{\eta_0},\mu_n)\right).$$

D'après le théorème 3.3.6 de [HHK14], cela impose que $x=0$. On en déduit que le groupe $Ш^3(\mathbb{Z}(1))$ est de $e!$-torsion, donc nul.

□

Le théorème précédent nous permet à présent de passer à la récurrence :

**Corollaire 5.11.** ***(Cas où $k_1$ est $p$-adique)***
*Supposons que $d \geq 1$ et que le corps $k_1$ est $p$-adique. Pour $i \in \{1,2,3,...,d\}$, notons $\mathcal{O}_{k_i}$ l'anneau des entiers de $k_i$ et $\pi_i$ une uniformisante de $\mathcal{O}_{k_i}$. Supposons que, pour chaque $i \in \{1,2,3,...,d\}$, il existe un schéma intègre, projectif, lisse $\mathcal{X}_i$ de dimension 2 sur Spec $\mathcal{O}_{k_i}$ vérifiant les conditions suivantes :*
- *pour $1 \leq i \leq d$, la fibre générique $X_i$ et la fibre spéciale $X_{i,0}$ de $\mathcal{X}_i$ sont intègres.*
- *la fibre générique $X_d$ de $\mathcal{X}_d$ est isomorphe à $X$.*
- *pour $1 \leq i \leq d-1$, la fibre générique $X_i$ de $\mathcal{X}_i$ est isomorphe à la fibre spéciale $X_{i+1,0}$ de $\mathcal{X}_{i+1}$.*
- *la fibre spéciale $X_{1,0}$ de $\mathcal{X}_1$ est géométriquement intègre.*
- *il existe un entier naturel $e$ vérifiant la propriété suivante : pour $1 \leq i \leq d$, pour $w \in X_{i,0}^{(1)}$, il existe un ouvert affine $\mathcal{U}_w$ de $\mathcal{X}_i$ contenant $w$ et un point fermé $v_w$ de $U_w = \mathcal{U}_w \times_{\mathcal{O}_{k_i}} k_i$ tels que l'adhérence $\overline{\{v_w\}}$ de $v_w$ dans $\mathcal{U}_w$, munie de sa structure réduite, est régulière, contient $w$ et $\pi_i$ est de valuation au plus $e$ dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\overline{\{v_w\}},w}$.*

*Alors* $Ш^2(\mathbb{Z}) = Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.

*Démonstration.* Par récurrence, il suffit de montrer que, si $K_1$ est le corps des fonctions de $\mathcal{X}_1$, alors $Ш^2(K_1,\mathbb{G}_m) = Ш^2(K_1,\mathbb{Z}) = 0$. La nullité de $Ш^2(K_1,\mathbb{G}_m)$ est prouvée dans la proposition 3.4 de [HSz13]. Il reste donc à vérifier que $Ш^2(K_1,\mathbb{Z})$ est nul, ou, ce qui revient au même, vérifier que $Ш^1(K_1,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est nul pour tout $n > 0$. Par dualité (théorème 2.5 de [Izq14a]), cela équivaut à montrer que $Ш^3(K_1,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$ est nul pour tout $n > 0$, ou, ce qui revient au même, montrer que $Ш^3(K_1,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul. Mais la fibre spéciale de $\mathcal{X}_1$ étant géométriquement intègre, si l'on note $K_0$ son corps des fonctions, la proposition 5.2 de [Kat86] impose que le groupe $Ш^3(K_1,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est isomorphe au groupe $Ш^2(K_0,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$, qui est nul d'après le théorème de Brauer-Hasse-Noether car $X_{1,0}$ est lisse. Cela achève la preuve. □

**Corollaire 5.12.** ***(Cas où $k_0$ est $\mathbb{C}((t))$)***
*Supposons que $d \geq 0$ et que $k_0 = \mathbb{C}((t))$. Pour $i \in \{1,2,3,...,d\}$, notons $\mathcal{O}_{k_i}$ l'anneau des entiers de $k_i$ et $\pi_i$ une uniformisante de $\mathcal{O}_{k_i}$. Supposons que, pour chaque $i \in \{1,2,...,d\}$, il existe un schéma intègre, projectif, lisse $\mathcal{X}_i$ de dimension 2 sur Spec $\mathcal{O}_{k_i}$ vérifiant les conditions suivantes :*
- *pour $1 \leq i \leq d$, la fibre générique $X_i$ et la fibre spéciale $X_{i,0}$ de $\mathcal{X}_i$ sont intègres.*

- *la fibre générique $X_d$ de $\mathcal{X}_d$ est isomorphe à $X$.*
- *pour $1 \leq i \leq d-1$, la fibre générique $X_i$ de $\mathcal{X}_i$ est isomorphe à la fibre spéciale $X_{i+1,0}$ de $\mathcal{X}_{i+1}$.*
- *la jacobienne de la fibre spéciale $X_{1,0}$ a très mauvaise réduction.*
- *il existe un entier naturel e vérifiant la propriété suivante : pour $1 \leq i \leq d$, pour $w \in X_{i,0}^{(1)}$, il existe un ouvert affine $\mathcal{U}_w$ de $\mathcal{X}_i$ contenant $w$ et un point fermé $v_w$ de $U_w = \mathcal{U}_w \times_{\mathcal{O}_{k_i}} k_i$ tels que l'adhérence $\overline{\{v_w\}}$ de $v_w$ dans $\mathcal{U}_w$, munie de sa structure réduite, est régulière, contient $w$ et $\pi_i$ est de valuation au plus e dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\overline{\{v_w\}},w}$.*

*Alors* $Ш^2(\mathbb{Z}) = Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.

*Démonstration.* Par récurrence, il suffit de montrer que, si $K_0$ est le corps des fonctions de $X_{1,0}$, alors $Ш^2(K_0, \mathbb{G}_m) = Ш^2(K_0, \mathbb{Z}) = 0$. La nullité de $Ш^2(K_0, \mathbb{G}_m)$ provient de l'article [DT83] (on remarquera que ce résultat reste vrai même si l'errata [DT85] montre que le théorème 1 de [DT83] est faux). D'après le lemme 3.16 de [Izq14a], cela entraîne aussi que $Ш^2(K_0, \mathbb{Z})$ est nul, ce qui achève la preuve. □

Je ne sais pas à quel point la dernière hypothèse des corollaires précédents est contraignante, mais elle permet au moins de traiter les exemples qui suivent.

**Théorème 5.13.** ***(Courbes constantes)***
*(i) Supposons que $d \geq 1$, que $k_1$ est un corps p-adique et que $X$ est une courbe de la forme $Proj(k[x,y,z]/(P(x,y,z)))$ où $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x,y,z]$ est un polynôme homogène. Supposons aussi que $Proj(k_0[x,y,z]/(\overline{P}(x,y,z)))$ est une courbe lisse et géométriquement intègre. Alors $Ш^2(\mathbb{Z}) = Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.*
*(ii) Supposons que $d \geq 0$, que $k_0 = \mathbb{C}((t))$ et que $X$ est la courbe elliptique sur $k$ d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$ avec $A, B \in k_0$. Supposons de plus que la courbe elliptique sur $k_0$ d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$ admet une réduction modulo $t$ de type additif. Alors $Ш^2(\mathbb{Z}) = Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.*

*Démonstration.* (i) Pour $i \in \{1, 2, ..., d\}$, soit $\mathcal{X}_i = \mathrm{Proj}(\mathcal{O}_{k_i}[x,y,z]/(P(x,y,z)))$. Pour chaque $i$, le schéma $\mathcal{X}_i$ étant dominant sur $\mathcal{O}_{k_i}$, il est plat. De plus, le critère jacobien permet de vérifier immédiatement que $X_{i,0}$ est lisse sur le corps résiduel de $k_i$. Par conséquent, pour chaque $i$, $\mathcal{X}_i$ est lisse sur $\mathcal{O}_{k_i}$.
Toutes les hypothèses du corollaire 5.11 sont évidemment vérifiées sauf peut-être la dernière. Fixons donc un certain $i \in \{1, 2, ..., d\}$ et soit $w$ un point fermé de la fibre spéciale $X_{i,0}$. Supposons sans perte de généralité que $w$ est dans l'ouvert $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k_i}[x,y]/(P(x,y,1)))$ de $\mathcal{X}_i$, et choisissons $\mathcal{U}_w = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k_i}[x,y]/(P(x,y,1)))$. Le point $w$ est alors le noyau d'un morphisme $\mathrm{ev}_w : k_{i-1}[x,y]/(P(x,y,1)) \to k_{i-1}^s$. Notons $b$ et $c$ les images respectives de $x$ et $y$ dans $k_{i-1}^s$. Soient $\lambda$ une extension finie de $k_{i-1}$ contenant $b$ et $c$ et $l = \lambda((\pi_i))$. Le noyau $v$ du morphisme $k_i[x,y]/(P(x,y,1)) \to k_i^s$ qui envoie $x$ et $y$ sur $b$ et $c$ respectivement est un point fermé de la fibre générique $U_w$ de $\mathcal{U}_w$ qui contient $w$ dans son adhérence. On vérifie aisément que l'idéal premier définissant $w$ dans $\mathcal{U}_w$ est l'idéal engendré par l'idéal premier définissant $v$ dans $\mathcal{U}_w$ et par $\pi_i$. Par conséquent, l'anneau des

fonctions de $\overline{\{v\}}$ est un anneau intègre ayant un unique idéal premier non nul, engendré par $\pi_i$ : c'est donc un anneau de valuation discrète d'uniformisante $\pi_i$, ce qui prouve la dernière hypothèse du corollaire 5.11 avec $e = 1$.

(ii) La démonstration est analogue à celle qui précède en remarquant qu'une courbe elliptique ayant réduction de type additif a très mauvaise réduction.

□

**Exemple 5.14.** La partie (ii) précédente s'applique par exemple à la courbe elliptique $y^2 = x^3 + t$ sur $k = \mathbb{C}((t))((\pi_1))...((\pi_d))$ pour $d \geq 0$.

Nous fournissons maintenant des contre-exemples à $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.

**Exemple 5.15.** Soit $p$ un nombre premier impair, de sorte que $1-p$ soit un carré dans $\mathbb{Q}_p$. Prenons $k = \mathbb{Q}_p((t))$ et considérons $X$ la courbe elliptique d'équation $y^2 = x(1-x)(x-p)$. Nous allons montrer que, dans ce contexte, $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$.

- D'après l'appendice de [CTPS12], dans $K_{\eta_0}$, $1-x$ est de valuation nulle mais n'est pas un carré.
- Soit $v \in X^{(1)}$. Soit $\pi$ une uniformisante de $\mathcal{O}_v$. Montrons que $1-x$ est un carré dans $K_v$. En suivant les idées de [CTPS12], plusieurs cas se présentent.
  (1) Supposons que $v(1-x) < 0$. Alors $v(x)$, $v(1-x)$ et $v(x-p)$ sont égaux et pairs. Écrivons $x = u/\pi^{2n}$ avec $u \in \mathcal{O}_v^\times$ et $n > 0$. L'équation de $X$ impose que $-u$ est un carré dans $\mathcal{O}_v$. Par conséquent, $1-x = \frac{\pi^{2n}-u}{\pi^{2n}}$ est un carré dans $K_v$.
  (2) Supposons que $v(1-x) > 0$. Alors $v(x) = v(x-p) = 0$ et $v(1-x)$ est pair. En écrivant $1-x = u\pi^{2n}$, on remarque que $x = 1-u\pi^{2n}$ et $x-p = 1-p-u\pi^{2n}$ sont des carrés dans $K_v$. Il en est donc de même pour $1-x$.
  (3) Supposons que $v(1-x) = 0$. Si $v(x) > 0$, alors $1-x$ est bien sûr un carré dans $K_v$. Si $v(x-p) > 0$, alors $1-x = 1-p-(x-p)$ est aussi un carré. Il reste donc à étudier le cas $v(x) = v(x-p) = 0$. Dans ce cas, les réductions de $x$ et $y$ modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_v$ donnent lieu à des éléments $b$ et $c$ dans $k(v)$ tels que $b^2 = c(1-c)(c-p) \neq 0$. Pour montrer que $1-x$ est un carré dans $K_v$, il suffit de montrer que $1-c$ est un carré dans $k(v)$. Notons $w$ la valuation de $k(v)$, $B$ son anneau des entiers, $k_B$ son corps résiduel et $\pi_B$ une uniformisante de $B$. Plusieurs cas se présentent alors.
    (a) Supposons que $w(1-c) < 0$. Alors $w(c)$, $w(1-c)$ et $w(c-p)$ sont égaux et pairs. Écrivons $c = u/\pi_B^{2n}$ avec $u \in B^\times$ et $n > 0$. L'équation vérifiée par $b$ et $c$ impose que $-u$ est un carré dans $B$. Par conséquent, $1-c = \frac{\pi_B^{2n}-u}{\pi_B^{2n}}$ est un carré dans $k(v)$.
    (b) Supposons que $w(1-c) > 0$. Alors $w(c) = w(c-p) = 0$ et $w(1-c)$ est pair. En écrivant $1-c = u\pi_B^{2n}$, on remarque que $c = 1-u\pi_B^{2n}$ et $c-p = 1-p-u\pi_B^{2n}$ sont des carrés dans $k(v)$. Il en est donc de même pour $1-c$.
    (c) Supposons que $w(1-c) = 0$. Si $w(c) > 0$, alors $1-c$ est bien sûr un carré dans $k(v)$. Si $w(c-p) > 0$, alors $1-c = 1-p-(c-p)$ est aussi un carré. Il reste donc à étudier le cas $w(c) = w(c-p) = 0$. Dans ce cas, les réductions de $b$ et $c$ modulo l'idéal maximal de $B$ donnent lieu à des éléments $\beta$ et $\gamma$ dans $k_B$ tels que $\beta^2 = \gamma(1-\gamma)(\gamma-p) \neq 0$. Pour montrer que $1-c$ est un

carré dans $k(v)$, il suffit de montrer que $1-\gamma$ est un carré dans le corps $p$-adique $k_B$. Mais cela est montré dans l'appendice de [CTPS12].

Par conséquent, $1-x \in Ш^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

- Soit $z = (1-x) \cup t \in H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Pour chaque $v \in X^{(1)}$, $1-x$ est un carré dans $K_v$ et donc $z \in Ш^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. De plus, le résidu de $z$ en $\eta_0$ est $\text{Res}(1-x) \in \kappa(\eta_0)^\times/\kappa(\eta_0)^{\times 2}$. Ce résidu ne peut pas être nul puisque $1-x$ n'est pas un carré dans $K_{\eta_0}$. Par conséquent, $z \neq 0$ et ${}_2Ш^2(\mathbb{G}_m) = Ш^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$.

Plus généralement, si $k = \mathbb{Q}_p((t_1))...((t_{d-1}))$ avec $d > 1$, la courbe elliptique $X$ d'équation $y^2 = x(1-x)(x-\lambda)$ où $\lambda \in \{p, t_1, ..., t_{d-2}\}$ vérifie $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$. Bien sûr, on peut remplacer $\mathbb{Q}_p$ par n'importe quel corps $p$-adique.

**Remarque 5.16.** Dans le cas où $k$ est un corps $p$-adique, on a $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$ quelle que soit la courbe $X$, même si elle a mauvaise réduction (voir la proposition 3.4 de [HSz13]).

**Exemple 5.17.**
- Pour $k = \mathbb{C}((t))$ et $X$ une courbe elliptique ayant bonne réduction (resp. mauvaise réduction de type multiplicatif), on a $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$ : en effet, d'après [DT83], si $J$ désigne la jacobienne de $X$, le groupe $Ш^2(\mathbb{G}_m) \cong H^1(k, \text{Pic}\,\overline{X})$ s'identifie au conoyau de $\mathbb{Z} \to H^1(k,J)$ et $H^1(k,J)$ est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ (resp. à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Ces résultats de [DT83] restent vrais malgré l'errata [DT85].
- Pour $k = \mathbb{C}((t_1))...((t_{d+1}))$ avec $d > 0$, un raisonnement analogue à l'exemple précédent montre que la courbe elliptique $X$ d'équation $y^2 = x(1-x)(x-\lambda)$ avec $\lambda \in \{t_1, ..., t_d\}$ vérifie $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$.

**Remarque 5.18.** Le groupe $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est-il une puissance de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ? Je ne sais pas répondre en toute généralité à cette question de Jean-Louis Colliot-Thélène, mais la réponse est affirmative lorsque $k$ est un corps $p$-adique ou $\mathbb{C}((t))$ :
- lorsque $k$ est un corps $p$-adique, on a toujours $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$ d'après [HSz13] ;
- lorsque $k$ est le corps $\mathbb{C}((t))$, les résultats de [DT83] montrent que $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est le conoyau de $\mathbb{Z} \to H^1(k,J)$ et que $H^1(k,J)$ est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^r$ pour un certain $r \in \{0, 1, ..., 2g\}$ où $g$ est le genre de $X$, ce qui impose que $Ш^2(\mathbb{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^r$.

# 6. Annexe : Finitude du $(d+3)$-ième groupe de Tate-Shafarevich du dual d'un tore

Soit $T$ un tore sur $K$, déployé par une extension finie $L$. Notons $\hat{T}$ (resp. $\check{T}$) son module des caractères (resp. cocaractères), et posons $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$.

En tenant compte du théorème 4.1(ii), il est aussi intéressant d'étudier le groupe $Ш^{d+3}(\tilde{T})$ : c'est le but de cette annexe.

**Proposition 6.1.** *Soit $Y$ une courbe projective lisse géométriquement intègre sur une extension finie $l$ de $k$ de corps de fonctions $L$.*

*(i) Le groupe* $Ш^{d+3}(\tilde{T})$ *est de torsion de type cofini.*
*(ii) On a un isomorphisme* $Ш^{d+3}(\tilde{T}) \cong (\varprojlim_n Ш^1({}_nT))^D$. *En particulier, on a* $Ш^{d+3}(\mathbb{Z}(d)) \cong (\varprojlim_n Ш^1(\mu_n))^D$, *et ce groupe est nul pour* $X = \mathbb{P}^1_k$.
*(iii) Supposons que* $k_1$ *soit un corps p-adique. Alors* $Ш^{d+3}(\tilde{T})$ *est divisible. Il est nul dès que* $\varprojlim_n Ш^1(L, \mu_n) = 0$ *ou dès que* $H^{d+1}(l, H^2(\bar{l}(Y), \mathbb{Z}(d))) = 0$. *Cette deuxième condition est automatiquement satisfaite lorque* $d = 1$.
*(iv) Supposons que* $k_0 = \mathbb{C}((t))$. *Alors* $Ш^{d+3}(\tilde{T})$ *est fini dès que* $Ш^2(L, \mathbb{Z}) = 0$ *ou dès que* $H^{d+1}(l, H^2(\bar{l}(Y), \mathbb{Z}(d))) = 0$. *Cette deuxième condition est automatiquement satisfaite lorque* $d = 1$.

*Démonstration.* (i) Cela découle immédiatement du corollaire 4.10, du lemme 4.11 et de la proposition 4.12 de [Izq14a].
(ii) D'après la preuve de la proposition 3.14 de [Izq14a], on a un isomorphisme $Ш^{d+3}(\tilde{T}) \cong \varinjlim_n Ш^{d+2}(\hat{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.5 de [Izq14a] pour établir $Ш^{d+3}(\tilde{T}) \cong (\varprojlim_n Ш^1({}_nT))^D$. Les autres affirmations en découlent aisément.
(iii) Le groupe $Ш^{d+3}(\tilde{T})$ est divisible d'après la remarque 4.18 de [Izq14a]. Il est donc nul dès que l'une des conditions suivantes est vérifiéé :
- $\varprojlim_n Ш^1(L, \mu_n) = 0$ (d'après (ii)).
- $Ш^{d+3}(L, \mathbb{Z}(d)) = 0$ (par restriction-corestriction).

La deuxième condition est bien sûr satisfaite dès que $H^{d+3}(L, \mathbb{Z}(d)) = 0$. Reste donc à montrer que $H^{d+1}(l, H^2(\bar{l}(Y), \mathbb{Z}(d))) \cong H^{d+3}(L, \mathbb{Z}(d))$.
Soit $U$ un ouvert affine de $Y$ et écrivons la suite spectrale :

$$H^r(l, H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))) \Rightarrow H^{r+s}(U, \mathbb{Z}(d)).$$

On remarque que :
- comme $\mathrm{scd}(l) = d + 1$, on a $H^r(l, H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))) = 0$ dès que $r \geq d + 2$.
- comme $\mathrm{cd}(\overline{U}) \leq 1$, le groupe $H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))$ est uniquement divisible pour $s > 2$, et donc $H^r(l, H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))) = 0$ dès que $s > 2$ et $r > 0$.
- pour $s \geq d + 2$, le groupe $H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))$ est uniquement divisible, et, comme $H^s(\overline{U}, \mathbb{Q}(d)) = 0$, on a une surjection $H^{s-1}(\overline{U}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \to H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))$ ; on en déduit que le groupe $H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))$ est de torsion, donc nul.

Par conséquent, la suite spectrale fournit un isomorphisme :

$$H^{d+1}(l, H^2(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))) \cong H^{d+3}(U, \mathbb{Z}(d)).$$

En prenant la limite inductive sur les ouverts affines $U$ de $X$, on obtient un isomorphisme :

$$H^{d+1}(l, H^2(\bar{l}(X), \mathbb{Z}(d))) \cong H^{d+3}(K, \mathbb{Z}(d)).$$

Lorsque $d = 1$, ces groupes sont nuls d'après me théorème de Hilbert 90.
(iv) Le cas où $H^{d+1}(l, H^2(\bar{l}(Y), \mathbb{Z}(d))) = 0$ se démontre de la même manière que dans (iii). On se place donc dans le cas où $Ш^2(L, \mathbb{Z}) = 0$. Comme $k_0 = \mathbb{C}((t))$, on a $\varprojlim_n Ш^1(L, \mu_n) \cong \varprojlim_n Ш^1(L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \varprojlim_n {}_nШ^2(L, \mathbb{Z}) = 0$. Un argument de restriction-corestriction permet alors de conclure.

□

**Remarque 6.2.** La nullité de $\text{Ш}^2(L, \mathbb{Z})$ a été étudiée au paragraphe 5.

# Références

[Blo86] Spencer Bloch. Algebraic cycles and higher $K$-theory. *Adv. in Math.*, 61(3) :267–304, 1986.

[CTH14] Jean-Louis Colliot-Thélène et David Harari. Dualité et principe local-global pour les tores sur une courbe au-dessus de $\mathbb{C}((t))$. 2014. Prépublication sur `http://www.math.u-psud.fr/~harari/`.

[CTPS12] Jean-Louis Colliot-Thélène, Raman Parimala, and Venapally Suresh. Patching and local-global principles for homogeneous spaces over function fields of $p$-adic curves. *Comment. Math. Helv.*, 87(4) :1011–1033, 2012.

[DT83] Jean-Claude Douai et Chedly Touibi. Courbes définies sur les corps de séries formelles et loi de réciprocité. *Acta Arith.*, 42(1) :101–106, 1982/83.

[DT85] Jean-Claude Douai et Chedly Touibi. Courbes définies sur les corps de séries formelles et loi de réciprocité, Errata. *Acta Arith.*, 46 :197, 1985.

[Har94] David Harari. Méthode des fibrations et obstruction de Manin. *Duke Math. J.*, 75 :221–260, 1994.

[HSz13] David Harari and Tamás Szamuely. Local-global principles for tori over $p$-adic function fields. 2013. A paraître dans *Journal of Algebraic Geometry*.

[HHK09] David Harbater, Julia Hartmann, and Daniel Krashen. Applications of patching to quadratic forms and central simple algebras. *Invent. Math.*, 178(2) :231–263, 2009.

[HHK14] David Harbater, Julia Hartmann, and Daniel Krashen. Local-global principles for Galois cohomology. *Comment. Math. Helv.*, 89(1) :215–253, 2014.

[ILO14] Luc Illusie, Yves Laszlo, et Fabrice Orgogozo. Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents. `http://www.math.polytechnique.fr/~orgogozo/travaux_de_Gabber/`, 2014. A paraître dans *Astérisque*.

[Izq14a] Diego Izquierdo. Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs. 2014. Prépublication sur `http://www.eleves.ens.fr/home/izquierd/`.

[Izq14b] Diego Izquierdo. Principe local-global pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs II. 2014. Prépublication sur `http://www.eleves.ens.fr/home/izquierd/`.

[Kat86] Kazuya Kato. A Hasse principle for two-dimensional global fields. *J. Reine Angew. Math.*, 366 :142–183, 1986. With an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène.

[Mat55] Arthur Mattuck. Abelian varieties over $p$-adic ground fields. *Ann. of Math. (2)*, 62 :92–119, 1955.

[Mil06] James S. Milne. *Arithmetic duality theorems*. BookSurge, LLC, Charleston, SC, second edition, 2006.

[Ser94] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*, fifth edition. Springer-Verlag, Berlin, 1994.