Fonctions zêta et fonctions L

Exercice 1 Soient $N \geqslant 1$ et χ un caractère modulo N. On cherche à montrer que la fonction $L(\cdot,\chi)$ ne s'annule pas sur la droite $\mathrm{Re}(s)=1$. Supposons que $L(1+it,\chi)=0$ pour un certain $t\in\mathbb{R}^\times$ et introduisons la fonction :

$$F := L(\cdot,\chi_0)^3 \cdot L(\cdot+it,\chi)^4 \cdot L(\cdot+2it,\chi^2),$$

où χ_0 est le caractère principal modulo N.

1) Montrer que la fonction F est holomorphe au voisinage de $s=1$, et qu'elle s'annule en $s=1$.
2) Montrer que, pour $\sigma>1$:

$$\log|F(\sigma)| = 2\sum_{\substack{p \text{ premier}\\ p\nmid N}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{p^{-n\sigma}}{n}\left(1+\mathrm{Re}\left(\frac{\chi(p)^n}{p^{int}}\right)\right)^2.$$

3) Obtenir une contradiction et conclure que la fonction $L(\cdot,\chi)$ ne s'annule pas sur la droite $\mathrm{Re}(s)=1$.

Exercice 2 Montrer qu'il existe une unique suite $(B_k)_{k\geqslant 0}$ de nombres complexes telle que pour tout $z\in D(0,2\pi)$,

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{B_k}{k!}z^k.$$

On les appelle les nombres de Bernoulli. Montrer qu'ils sont rationnels en donnant une formule permettant de les calculer par récurrence. En développant en série entière autour de 0 la fonction $z\mapsto \pi\cot(\pi z)-1/z$, montrer que pour tout $k\geqslant 1$,

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k))!}.$$

Calculer en particulier $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$.

Exercice 3 Soit H le demi-plan $\{s\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(s)>0\}$. On rappelle que, d'après le cours d'analyse complexe, la fonction Γ est une fonction holomorphe sur H définie par la formule $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt$ et qu'elle s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en chaque point de $\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ et telle que $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ pour $z\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$. Dans cet exercice, on considère la fonction thêta :

$$\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s}$$

et la fonction ξ :

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

1) Vérifier que θ et ξ sont des fonctions holomorphes sur le demi-plan H.
2) Montrer que, pour s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a :

$$2\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \int_0^{+\infty} (\theta(u) - 1) u^{s/2} \frac{du}{u}.$$

3) On rappelle la formule sommatoire de Poisson (que vous pouvez redémontrer si cous êtes à l'aise avec l'analyse de Fourier) : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(x) = o(1/x^2)$ et $f'(x) = o(1/x^2)$ quand $|x| \to +\infty$, alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n),$$

où $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi nx} f(x)\,dx$. Montrer que, pour $s \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\theta(1/s) = s^{1/2}\theta(s).$$

4) En déduire que, pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, on a :

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

5) Montrer que la fonction ζ s'étend méromorphiquement à $\mathbb{C}$. Quels sont ses pôles ?

Exercice 4 Soit $\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. On rappelle que ξ est entière et qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\xi(1-s) = \xi(s).$$

1) Montrer qu'il existe une fonction entière f telle que $\xi(s+1/2) = f(s^2)$.

On rappelle que l'ordre d'une fonction entière g est défini par :

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln \max\{|\xi(s)| : |s| = r\}}{\ln r}.$$

2) Montrer que ξ est d'ordre au plus 1.
3) Montrer qu'une fonction entière dont l'ordre est fini non entier admet une infinité de zéros.
4) En déduire que la fonction ζ a une infinité de zéros dans la bande $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$.

Exercice 5 Pour $x > 0$ on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\leqslant x$ et on introduit la fonction :

$$\theta(x) = \sum_{\substack{p premier \\ p \leqslant x}} \log p.$$

On cherche à montrer le **théorème des nombres premiers**, qui stipule que $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ quand $x \to +\infty$. Pour ce faire, on admettra le théorème taubérien :

Théorème taubérien : Soit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable bornée telle que :

$$g(s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > 0$ se prolongeant en une fonction holomorphe sur un voisinage de $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$. Alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $g(0)$.

1) Montrer que, pour montrer le théorème des nombres premiers, il suffit de prouver que $\theta(x) \sim x$ quand $x \to +\infty$.
2) Soient $x_0 > 0$ un nombre réel et $\lambda_0 := \frac{\theta(x_0)}{x_0}$.
   a) On suppose que $\lambda_0 > 1$. Montrer que $\int_{x_0}^{\lambda_0 x_0} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt \geqslant \int_1^{\lambda_0} \frac{\lambda_0 - u}{u^2}\,du > 0$.
   b) On suppose que $\lambda_0 < 1$. Montrer que $\int_{\lambda_0 x_0}^{x_0} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt \leqslant \int_{\lambda_0}^{1} \frac{\lambda_0 - u}{u^2}\,du < 0$.
   c) En déduire que, pour obtenir le théorème des nombres premiers, il suffit de montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\theta(t)-t}{t^2}\,dt$ converge. Vérifier que cela revient à montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, avec $f(t) = \theta(e^t)e^{-t} - 1$.
3) Dans cette question on montre que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\theta(2n) - \theta(n) \leqslant 2n\log 2$.
   b) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\theta(2x) - \theta(x) \leqslant 2x(2\log 2 + 1)$.
   c) Conclure que, pour $x > 1$, on a $\theta(x) \leqslant 2x(2\log 2 + 1)$, puis que la donction f est bornée.
4) Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on pose :
$$\Phi(s) = \sum_{p \text{ premier}} \frac{\log p}{p^s}.$$
   a) Montrer que la fonction $s \mapsto \Phi(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage du demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$.
   b) En utilisant l'exercice 1, déduire que la fonction $s \mapsto \frac{\Phi(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage du demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$.
   c) Vérifier que, pour $s > 0$, on a :
$$\frac{\Phi(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt.$$
   d) Conclure à l'aide du théorème taubérien.
5) Soient a et b deux entiers premiers entre eux avec $a \geqslant 2$. Pour $x > 0$ on note $\pi(a, b; x)$ le nombre de nombres premiers $\leqslant x$ qui sont congrus à b modulo a. En s'inspirant des questions précédentes et de la preuve du théorème de la progression arirhtmétique donnée en cours, montrer que $\pi(a, b; x) \sim \frac{1}{\varphi(a)} \cdot \frac{x}{\log x}$ quand $x \to +\infty$.