CONIQUES ET QUADRIQUES

Exercice 1 - Étudier les coniques définies par les équations suivantes.

(1) $x^2 + y^2 - y + 1 = 0$.
(2) $2x^2 + y^2 - 2x - 5y + 6 = 0$.
(3) $4x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 3y = 1$.
(4) $x^2 - y^2 + 4x - 1 = 0$.
(5) $2x^2 + 4xy + y^2 + x + y = 0$.
(6) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$.
(7) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 35x - 20y = 0$.
(8) $mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0$, avec $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 - Étudier les quadriques définies par les équations suivantes.

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$.
(2) $(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y) + (x-y) = 0$.
(3) $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 6xy - 12yz + 4zx + 4 = 0$.
(4) $x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xz - 4yz + 3 = 0$.
(5) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0$.
(6) $xy + xz + yz + 1 = 0$.
(7) $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xy - yz + xz = 0$.
(8) $xy + yz = 1$.
(9) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0$.

Exercice 3 - On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure d'espace affine euclidien orienté usuelle. Soit $\mathcal{C}_\lambda$ la conique d'équation :

$$\frac{x^2}{\lambda - 1} + \frac{y^2}{\lambda - 3} = 1,$$

avec $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 3$.

(1) Quelle est la nature de $\mathcal{C}_\lambda$? On déterminera les foyers.
(2) Soit A le point de coordonnées $(5/4, 3/4)$. Combien de courbes $\mathcal{C}_\lambda$ passent par A ? Sous quel angle se coupent-elles ?

Exercice 4 - On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure d'espace affine euclidien orienté usuelle. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré exactement 3. Soit $\mathcal{C}_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x) = P(y)\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{C}_P$ a au moins un axe de symétrie que l'on précisera.
(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que $\mathcal{C}_P$ soit réduit à une droite.
(3) Quand $\mathcal{C}_P$ n'est pas une droite, montrer que $\mathcal{C}_P$ est la réunion d'une droite est d'une ellipse dont l'excentricité, que l'on calculera, ne dépend pas de P.

Exercice 5 - Soit $\mathcal{P}$ une parabole dans un plan affine euclidien E. On note F son foyer et D sa directrice. Soit D' une droite orthogonale à D. On note H le point d'intersection de D et D'.

(1) Montrer que D' intersecte $\mathcal{P}$ en un unique point. On le note M.

(2) Soit Δ la droite passant par M et orthogonale à la tangente à $\mathcal{P}$ en M. Montrer que Δ est la bissectrice de l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{MF}$ au point M.

Exercice 6 - On se place dans un plan affine euclidien E. Soient D une droite de E et $F \in E \setminus D$.

(1) Montrer que pour tout point $M \in E \setminus D$, il passe exactement deux paraboles de foyer F et d'axe D.

(2) Montrer que les tangentes à ces paraboles en M sont orthogonales.

Exercice 7 - Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O dans un plan affine euclidien E. Soit D une droite.

(1) Montrer $D \cap \mathcal{E}$ contient 0, 1 ou 2 points.

(2) Vérifier que $D \cap \mathcal{E}$ contient 1 point exactement si, et seulement si, D est tangente à $\mathcal{E}$.

(3) Montrer qu'il existe exactement deux droites D_1 et D_2 parallèles à D et tangentes à $\mathcal{E}$. On note M_1 et M_2 les intersections de $\mathcal{E}$ avec D_1 et D_2 respectivement.

(4) Montrer que O est le milieu de $[M_1M_2]$.

(5) Soit Δ une droite parallèle à D. On suppose qu'elle intersecte $\mathcal{E}$ en deux points distincts N_1 et N_2. Montrer que le milieu de $[N_1N_2]$ appartient à la droite (M_1M_2).

Exercice 8 - Soit $\mathcal{E}$ une ellipse (qui n'est pas un cercle) dans un plan affine euclidien E. On note F l'un de ses foyers et D sa directrice associée. On fixe M un point de $\mathcal{E}$ différent des deux sommets du grand axe de $\mathcal{E}$.

(1) Montrer que la tangente à $\mathcal{E}$ en M et D s'intersectent. On note I le point d'intersection.

(2) Montrer que les droites (FM) et (MI) sont orthogonales.

Exercice 9 - Soit $\mathcal{E}$ une ellipse dans un plan affine euclidien E.

(1) Soit $M \in E$. Déterminer, en fonction de M, le nombre de droites qui sont tangentes à $\mathcal{E}$ et qui passent par M.

(2) Identifier le lieu des points $M \in E$ tels qu'il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{E}$ passant par M et tels que ces deux tangentes sont orthogonales.

(3) Reprendre les questions précédentes en remplaçant l'ellipse $\mathcal{E}$ par une parabole $\mathcal{P}$ et par une hyperbole $\mathcal{H}$.

Exercice 10 - Soient $\mathcal{H}$ une hyperbole dans un plan affine euclidien E et D_1 et D_2 ses deux asymptotes. On se donne un point $M \in \mathcal{H}$ et on note Δ la tangente à $\mathcal{H}$ en M.

(1) Montrer que Δ intersecte D_1 et D_2. On note M_1 et M_2 les points d'intersection respectifs.

(2) Montrer que M est le milieu de $[M_1M_2]$.

Exercice 11 - Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole dans un plan affine euclidien E. On dit que $\mathcal{H}$ est équilatère si ses deux asymptotes sont orthogonales.

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'excentricité e de $\mathcal{H}$ pour que $\mathcal{H}$ soit équilatère.

(2) Montrer que si $\mathcal{H}$ est équilatère et si A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{H}$, alors l'orthocentre du triangle ABC appartient à $\mathcal{H}$.

Exercice 12 - On se place dans un plan affine euclidien orienté E. Le but de l'exercice est d'étudier le groupe des isométries d'une conique.

(1) Quel est le groupe des isométries d'un cercle ?

(2) Soit $\mathcal{E}$ une ellipse qui n'est pas un cercle. On note O son centre.
   (a) Quelle est la distance maximale de O à un point de $\mathcal{E}$? Pour quels points est elle réalisée ?
   (b) Montrer que l'ellipse $\mathcal{E}$ n'a que deux axes de symétries et déterminer le groupe des isométries de $\mathcal{E}$.

(3) Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de centre E.
   (a) Quelle est la distance minimale de O à un point de $\mathcal{H}$?
   (b) Montrer que l'hyperbole $\mathcal{H}$ n'a que deux axes de symétrie et déterminer le groupe des isométries de $\mathcal{H}$.

(4) Soit $\mathcal{P}$ une parabole. Montrer que $\mathcal{P}$ a un seul axe de symétrie, et déterminer le groupe des isométries de $\mathcal{P}$.

Exercice 13 -

(1) On travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On se donne $a \leq b \leq c$ trois réels et on considère la forme quadratique $q : (x, y, z) \mapsto ax^2 + by^2 + cz^2$. Montrer qu'il existe une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est de la forme :
$$\begin{pmatrix} b & 0 & \star \\ 0 & b & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}.$$

(2) Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde de centre O dans un espace affine euclidien de dimension 3. Montrer qu'il existe un plan Π tel que $\mathcal{E} \cap \Pi$ est un cercle de centre O.

(3) Montrer que, pour tout plan Π' parallèle à Π, l'intersection $\mathcal{E} \cap \Pi'$ est vide, un point ou un cercle.

Exercice 14 - Soit E un espace affine euclidien de dimension 3. Soit Π un plan dans E. Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole contenue dans Π. On note O son centre et Δ la droite orthogonale à Π passant par O. On fixe $A \in \Delta$ différent de O. On introduit la réunion :
$$\mathcal{Q}' := \bigcup_{M \in \mathcal{H}} (AM).$$
Montrer qu'il existe deux droites D et D' s'intersectant en A telles qe $D \cup D' \cup \mathcal{Q}'$ est une quadrique. Identifier cette quadrique.

Exercice 15 - On travaille dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, avec sa structure euclidienne usuelle. On considère l'hyperboloïde à une nappe $\mathcal{H}_0$ défini par l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(1) Montrer que l'image de $t \mapsto (\cos u - t \sin u, \sin u + t \cos u, t)$ est une droite contenue dans $\mathcal{H}$.

(2) Montrer que $\mathcal{H}_0$ est une réunion de droites deux à deux disjointes.

(3) Déterminer une autre famille de droites dont la réunion est $\mathcal{H}_0$.

(4) Est-ce que tout hyperboloïde à une nappe est une réunion de droites ?

(5) Soit D une droite non coplanaire avec l'axe $\Delta : x = y = 0$. Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, on note r_θ la rotation d'angle θ autour de l'axe Δ. Montrer que $\bigcup_{\theta \in [0,2\pi[} r_\theta(D)$ est un hyperboloïde à une nappe.

Exercice 16 - On travaille dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, avec sa structure euclidienne usuelle. On considère un paraboloïde hyperbolique $\mathcal{P}$.

(1) Soit $M \in \mathcal{P}$. Déterminer combien de droites passant par M sont contenues dans $\mathcal{P}$.

(2) Montrer que $\mathcal{P}$ est réunion de droites deux à deux disjointes.

Exercice 17 - Soient D et D' deux droites non coplanaires dans un espace affine euclidien E de dimension 3. Soit $\mathcal{Q} = \{M \in E : d(M, D) = d(M, D')\}$. Montrer que $\mathcal{Q}$ est une quadrique que l'on reconnaîtra.

Exercice 18 - Soient F un point et D une droite ne contenant pas F dans un espace affine euclidien E de dimension 3. Soit $e > 0$. On pose $\mathcal{Q} = \{M \in E : MF = ed(M, D)\}$. Montrer que $\mathcal{Q}$ est une quadrique que l'on reconnaîtra selon les valeurs de e.

Exercice 19 - Soient F un point et P un plan ne contenant pas F dans un espace affine euclidien E de dimension 3. Soit $e > 0$. On pose $\mathcal{Q} = \{M \in E : MF = ed(M, P)\}$. Montrer que $\mathcal{Q}$ est une quadrique que l'on reconnaîtra selon les valeurs de e.

Exercice 20 - Soient D et P une droite et un plan sécants dans un espace affine euclidien E de dimension 3. Soit $a > 0$. Déterminer le lieu des points $M \in E$ tels que $d(M, D)^2 + d(M, P)^2 = a$.