Université Paris Cité (Diderot Paris 7)

Cours d'arithmétique (M1), janvier-avril 2026

Feuille TD5 : Théorie analytique des nombres

Applications du théorème des nombres premiers

Exercice 1. On admet le théorème des nombres premiers sous la forme $\pi(x) \sim x/\log x$ ou $\theta(x) \sim x$. En déduire les différents énoncés ci-dessous.

1. On note p_n le n-ième nombre premier (i.e. $p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \dots$). Montrer que le théorème des nombres premiers équivaut à $p_n \sim n \log n$.
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{N} p_n \sim \frac{N^2}{2} \log N$.
3. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \geq 2$ il existe un nombre premier $p \leq c \log n$ ne divisant pas n.
4. Donner une estimation de la taille de $A_n := \mathrm{ppcm}(1, 2, 3, \dots, n)$.
5. Il existe une constante $c > 0$ telle que si $x > c$, il existe un nombre premier p tel que $x < p < 2x$.

Exercice 2. Soit $Y > 1$ et N un entier, montrer qu'il existe un nombre premier p vérifiant
— L'ordre de N modulo p est supérieur ou égal à Y ;
— On a $p \leq cY^2 \log N$.
Indication : on pourra considérer le plus petit nombre premier ne divisant pas le produit $\prod_{1 \leq y \leq Y} (N^y - 1)$.

Séries de Dirichlet, fonction zêta, fonctions L.

Exercice 3. Soit f, g deux fonctions arithmétiques $\mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, on définit leur *produit de convolution* par la formule

$$(f * g)(n) = \sum_{d \,|\, n} f(d) g(n/d).$$

1. Vérifier que le produit est commutatif et associatif.
2. Montrer que si $F(s) = \sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s}$ et $G(s) = \sum_{n \geq 1} g(n) n^{-s}$ sont convergentes sur le demi-plan $\Re(s) > \sigma_0$, alors sur ce même demi-plan, on a

$$F(s)G(s) = \sum_{n \geq 1} (f * g)(n) n^{-s}$$

3. Montrer que, si $\Re(s) > 1$ on a

$$\zeta(s)^{-1} = \sum_{n \geq 1} \mu(n) n^{-s} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-s}$$

où

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1 \dots p_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Démontrer la formule de Moebius : si $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1, si δ désigne la fonction nulle pour tout $n \neq 1$ et telle que $\delta(1) = 1$ alors $\mu * \mathbf{1} = \delta$. En déduire l'équivalence :

$$g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) g(n/d).$$

Exercice 4. Une fonction arithmétique f est *multiplicative* si $f(nm) = f(n)f(m)$ lorsque pgcd $(m, n) = 1$; elle est *complètement multiplicative* si $f(nm) = f(n)f(m)$ pour tout m, n. On se place sur un demi-plan sur lequel la série $\sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s}$ converge absolument.

1. Montrer que si f est multiplicative on a

$$\sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s} = \prod_{p} \sum_{m\geq 0} f(p^m)p^{-ms}.$$

2. Montrer que si f est complètement multiplicative on a

$$\sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s} = \prod_{p} (1 - f(p)p^{-s})^{-1}.$$

Exercice 5. Montrer qu'il existe une unique suite $(B_k)_{k\geq 0}$ de nombres complexes telle que pour tout $z \in D(0, 2\pi)$,

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} z^k.$$

On les appelle les nombres de Bernoulli. Montrer qu'ils sont rationnels en donnant une formule permettant de les calculer par récurrence. En développant en série entière autour de 0 la fonction $z \mapsto \pi \cot(\pi z) - 1/z$ grâce à la formule $\sin z = z \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$ que l'on admettra, montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k))!}.$$

Calculer en particulier $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$.

Exercice 6. Soit H le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0\}$. On rappelle que, d'après le cours d'analyse complexe, la fonction Γ est une fonction holomorphe sur H définie par la formule $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ et qu'elle s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ne s'annulant pas, avec des pôles simples en chaque point de $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ et telle que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Dans cet exercice, on considère la fonction thêta :

$$\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s}$$

et la fonction ξ :

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s).$$

1. Vérifier que θ et ξ sont des fonctions holomorphes sur le demi-plan H.
2. Montrer que, pour s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a :

$$2\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \int_0^{+\infty} (\theta(u) - 1) u^{s/2} \frac{du}{u}.$$

3. On rappelle la formule sommatoire de Poisson (que vous pouvez redémontrer si vous êtes à l'aise avec l'analyse de Fourier) : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(x) = o(1/x^2)$ et $f'(x) = o(1/x^2)$ quand $|x| \to +\infty$, alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n),$$

où $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi nx} f(x)dx$. Montrer que, pour $s \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\theta(1/s) = s^{1/2}\theta(s).$$

4. En déduire que, pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, on a :

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

5. Montrer que la fonction ζ s'étend méromorphiquement à $\mathbb{C}$. Quels sont ses pôles ?

Exercice 7. Soit $\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. On rappelle que ξ est entière et qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\xi(1-s) = \xi(s).$$

1. Montrer qu'il existe une fonction entière f telle que $\xi(s+1/2) = f(s^2)$.

On rappelle que l'ordre d'une fonction entière g est défini par :

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln \max\{|\xi(s)| : |s| = r\}}{\ln r}.$$

2. Montrer que ξ est d'ordre au plus 1.
3. Montrer qu'une fonction entière dont l'ordre est fini non entier admet une infinité de zéros.
4. En déduire que la fonction ζ a une infinité de zéros dans la bande $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$.

Exercice 8. Soient $N \geq 1$ et χ un caractère modulo N. On cherche à montrer que la fonction $L(\cdot, \chi)$ ne s'annule pas sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$. Supposons que $L(1+it, \chi) = 0$ pour un certain $t \in \mathbb{R}^\times$ et introduisons la fonction :

$$F := L(\cdot, \chi_0)^3 \cdot L(\cdot + it, \chi)^4 \cdot L(\cdot + 2it, \chi^2),$$

où χ_0 est le caractère principal modulo N.

1. Montrer que la fonction F est holomorphe au voisinage de $s = 1$, et qu'elle s'annule en $s = 1$.
2. Montrer que, pour $\sigma > 1$:

$$\log|F(\sigma)| = 2 \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \nmid N}} \sum_{n \geq 1} \frac{p^{-n\sigma}}{n} \left(1 + \mathrm{Re}\left(\frac{\chi(p)^n}{p^{int}}\right)\right)^2.$$

3. Obtenir une contradiction et conclure que la fonction $L(\cdot, \chi)$ ne s'annule pas sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$.

Quelques fonctions arithmétiques.

Exercice 9. On étudie quelques propriétés de la fonction "nombre de diviseurs"

$$\tau(n) = \sum_{d \,|\, n} 1 = \mathrm{card}\left\{(d, e) \in \mathbb{N}^2 \mid de = n\right\}$$

1. Montrer que, si $\operatorname{pgcd}(m,n)=1$ alors $\tau(mn)=\tau(m)\tau(n)$, puis que, si $n=p_1^{m_1}\dots p_r^{m_r}$, alors $\tau(n)=(m_1+1)\dots(m_r+1)$.
2. Montrer la formule $\sum_{n\geq 1}\tau(n)n^{-s}=\zeta(s)^2$ pour $\operatorname{Re}(s)>1$.
3. En moyenne $\tau(n)$ vaut $\log n$ au sens suivant :
$$\sum_{n\leq x}\tau(n)=\sum_{d\leq x}\left[\frac{x}{d}\right]\sim x\log x.$$
4. Lorsque n est premier on a évidemment $\tau(n)=2$; la taille maximale est décrite par l'énoncé :
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\tau(n)\log\log n}{\log n}=\log 2. \tag{1}$$
Montrer que la limite supérieure est atteinte pour les nombres de la forme $n=\prod_{p\leq x}p$.
5. (Plus difficile) Montrer l'énoncé (1). Indication : choisir $M=M(n)$ (on peut choisir $M=\log n/(\log\log n)^2$), séparer $\tau(n)=T_1T_2$ avec T_1 correspondant aux facteurs premiers de n qui vérifient $p\leq M$ et T_2 correspondant aux facteurs premiers de n qui vérifient $p>M$; majorer T_1 par $\exp(cM\log\log n/\log M)$ et T_2 par $2^{\log n/\log M}$ et conclure.

Exercice 10. On étudie quelques proppriétés de la fonction d'Euler $\phi(n):=\operatorname{card}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$.

1. Rappeler pourquoi $\phi(n)=n\prod_{p\,|\,n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.
2. Pour tout $n\geq 2$ on a $\phi(n)\leq n-1$, avec égalité seulement si n est premier.
3. On pose $P(x)=\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)$; en comparant $\log P(x)$ et $\sum_{p\leq x}p^{-1}$, montrer qu'il existe $C_0>0$ telle que
$$P(x)\sim\frac{C_0}{\log x}.$$
4. Soit $N=\prod_{p\leq x}p$, montrer que, quand x tend vers l'infini :
$$\phi(N)\sim\frac{C_0N}{\log\log N}.$$