GROUPES D'ISOMÉTRIES

Exercice 1 - On considère le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne standard. Soient les applications suivantes :

$$f_1(x,y) = (x+3y+1, -3x+y), \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y+1, 2x+y-1),$$
$$f_3(x,y) = \frac{1}{5}(3x+4y-1, 4x-3y+2), \qquad f_4(x,y) = (x+3, y),$$
$$f_5(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y+\sqrt{2}, -x-y-2+\sqrt{2}), \qquad f_6(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, x+y),$$
$$f_7(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-y+1+\sqrt{2}, x+y-3+2\sqrt{2}\right), \quad f_8(x,y) = \frac{1}{5}\left(-3x+4y+6, 4x+3y+22\right).$$

(1) Lesquelles de ces applications sont des isométries ?

(2) Lesquelles des isométries sont directes ?

(3) Pour chacune des isométries déterminer sa nature et ses paramètres.

(4) Décomposer ces isométries en produit de réflexions.

Exercice 2 - Soit E un plan affine euclidien. Soit r une rotation de E différente de Id_E. Son centre est noté Ω. Soit D une droite affine de E. On note s la symétrie affine orthogonale de E par rapport à D.

(1) Justifier que $s \circ r$ est un anti-déplacement de E.

(2) On suppose que $\Omega \in D$. Démontrer que $s \circ r$ est une symétrie affine orthogonale de E par rapport à une droite affine contenant Ω.

(3) On suppose que $\Omega \notin D$. Démontrer que $s \circ r$ est un glissement de E de vecteur non nul.

On pourra montrer que si A est point fixe de $s \circ r$ (i.e. $s(A) = r(A)$), alors Ω doit être sur la médiatrice de $[A, s(A)]$.

Exercice 3 - Soit E un plan affine euclidien orienté. Soit σ un anti-déplacement de E. Décrire les droites affines de E globalement invariantes par σ, suivant que σ est une réflexion affine orthogonale ou un glissement de vecteur non nul.

Exercice 4 - On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure affine euclidienne usuelle. Reconnaître les isométries $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x',y',z')$ suivantes et préciser leurs éléments caractéristiques :

(1) $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x-2y+z+1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+y-2z+2) \\ z' = \frac{1}{3}(x-2y-2z+1). \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x' = -z+2 \\ y' = -x+1 \\ z' = y+1. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x' = -z-2 \\ y' = -x+1 \\ z' = y+1. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x' = \frac{1}{9}(x-8y-4z+2) \\ y' = \frac{1}{9}(-8x+y-4z+2) \\ z' = \frac{1}{0}(-4x-4y+7z+1). \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x' = -z+2 \\ y' = x+1 \\ z' = y+1. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x-2y-2z)+2 \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+y-2z)+1 \\ z' = \frac{1}{3}(-2x-2y+z). \end{cases}$

Exercice 5 - Soit E un espace affine euclidien orienté de dimension 3. Soit s une réflexion de E.

(1) Déterminer les droites affines de E stables par s.

(2) Déterminer les plans affines de E stables par s.

Exercice 6 - Soit E un espace affine euclidien orienté de dimension 3.

(1) Justifier qu'un vissage de E est une rotation si, et seulement si, il admet un point fixe.

(2) Soient t une translation et r une rotation de E. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les éléments caractéristiques de t et r pour que $t \circ r$ soit une rotation.

Exercice 7 - Soit E un espace affine euclidien orienté de dimension 3. Soient Π_1 et Π_2 deux plans de E tels que $\overrightarrow{\Pi_1}^{\perp} \subset \overrightarrow{\Pi}_2$. On note s_1 la réflexion par rapport à Π_1 et s_2 la réflexion par rapport à Π_2. Que vaut $s_2 \circ s_1$?

Exercice 8 - Soit E un espace affine euclidien orienté de dimension 3. Que peut-on dire de deux rotations affines de E qui commutent ?

Exercice 9 - Soient Δ_1, Δ_2 et Δ_3 trois droites d'un espace affine euclidien orienté E. On suppose qu'elles ne sont pas coplanaires deux à deux et qu'elles ne sont pas toutes parallèles à un même plan. Montrer qu'il existe des vissages f_1, f_2 et f_3 d'axes respectifs Δ_1, Δ_2 et Δ_3 tels que $f_1 \circ f_2 \circ f_3 = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 10 - Soit E un espace affine euclidien orienté. Montrer que $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Isom}(E)$. Calculer le quotient $\mathrm{Isom}(E)/\mathrm{Sim}(E)$. Le groupe $\mathrm{Sim}(E)$ est-il un produit semi-direct de $\mathrm{Isom}(E)$ par $\mathrm{Isom}(E)/\mathrm{Sim}(E)$?

Exercice 11 - Soit E un plan affine euclidien orienté. On rappelle que, lorsque S est une partie de E, on note $D(S)$ le sous-groupe de $\mathrm{Isom}(E)$ constitué des isométries qui stabilisent S globalement. Calculer $D(S)$ lorsque S est :

(1) un point.

(2) un segment.

(3) un triangle non isocèle.

(4) un triangle isocèle.

(5) un triangle équilatéral.

(6) un cercle.

Exercice 12 - Soient E un espace affine euclidien de dimension 3 et Π un plan affine dans E. Déterminer l'ensemble des déplacements de l'espace laissant Π globalement invariant.

Exercice 13 - *(Groupe des isométries du tétraèdre)* On se place dans un espace affine euclidien orienté E de dimension 3 et on travaille dans un repère orthonormé. On note a, b, c, d les points de coordonnées cartésiennes respectives $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ et $(-1,-1,1)$. On pose $\mathcal{T} = \{a,b,c,d\}$. Enfin on note G l'ensemble des isométries $f : E \to E$ tels que $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

(1) Montrer que G agit fidèlement sur $\mathcal{T}$. En déduire qu'il existe un morphisme injectif $\varphi : G \to \mathcal{S}_4$.

(2) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi)$ contient toutes les transpositions de $\mathcal{S}_4$.

(3) Conclure que $G \cong \mathcal{S}_4$.

(4) Soit H l'ensemble des déplacements $f : E \to E$ tels que $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$. Montrer que H est un sous-groupe de G et l'identifier.

Exercice 14 - *(Groupe des déplacements du cube)* On se place dans un espace affine euclidien orienté E de dimension 3 et on travaille dans un repère orthonormé. On note a, b, c, d les points de coordonnées cartésiennes respectives $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(-1,-1,1)$ et $(1,-1,1)$, on note e, f, g, h les points de coordonnées cartésiennes respectives $(1,1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,-1)$ et $(1,-1,-1)$, et on note d_1, d_2, d_3 et d_4 les droites affines (ag), (bh), (ce) et (df). On pose $\mathcal{C} = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Enfin on note G l'ensemble des déplacements $f : E \to E$ tels que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

(1) Expliquer pourquoi G est un sous-groupe du groupe des déplacements de E.

(2) Déterminer la distance maximale entre deux points de $\mathcal{C}$. Pour quels couples de points le maximum est-il atteint ?

(3) Soit $f \in G$. Démontrer que :

  (a) Montrer que G agit sur l'ensemble $\{d_1,d_2,d_3,d_4\}$ via $g \cdot d_i = g(d_i)$ pour $g \in G$ et $i \in \{1,2,3,4\}$.

  (b) Vérifier que l'action est fidèle et en déduire qu'il existe un morphisme injectif $\varphi : G \to \mathcal{S}_4$.

(4) On note i le milieu de $[ab]$ et j celui de $[gh]$. On note s la symétrie affine orthogonale par rapport à la droite (ij). Calculer $\varphi(s)$.

(5) Déduire de la question précédente que $G \cong \mathcal{S}_4$.

Exercice 15 - Soient Δ_1, Δ_2 et Δ_3 trois droites concourantes et deux à deux distinctes dans un plan affine euclidien E. Existe-t'il nécessairement un triangle dont ce sont les :

(1) médiatrices ?

(2) hauteurs ?

(3) médianes ?

(4) bissectrices ?

Exercice 16 - Soit ABC un triangle dans un plan affine euclidien orienté E.

(1) Soit I le symétrique orthogonal de l'orthocentre de ABC par rapport à la droite (AB). Montrer que I appartient au cercle circonscrit de ABC.

(2) Soit J le point d'intersection de la médiatrice de $[BC]$ avec la bissectrice de ABC issue de A. Montrer que J appartient au cercle circonscrit de ABC.

Exercice 17 - Soit E un plan affine euclidien orienté. Soient A,B,C trois points non alignés de E. Soient Δ_A la bissectrice de ABC issue de A, Δ_B celle issue de B et Δ_C celle issue de C. On note I le point de concourance de Δ_A, Δ_B et Δ_C.

(1) Montrer que les points de Δ_A sont équidistants de (AB) et (AC).

(2) Déduire qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ de centre I qui est tangent aux droites (AB), (AC) et (BC) simultanément.

On note maintenant Δ'_A la droite orthogonale à Δ_A en A, Δ'_B la droite orthogonale à Δ_B en B et Δ'_C la droite orthogonale à Δ_C en C.

(3) Montrer que l'ensemble des points de E équidistants de (AB) et (AC) est exactement $\Delta \cup \Delta'$.

(4) Montrer que les droites Δ_A, Δ'_B et Δ'_C sont concourantes.

(5) Conclure qu'il existe exactement 4 cercles de E qui sont simultanément tangents aux droites (AB), (AC) et (BC).

(6) Faire un dessin.

Exercice 18 - *(Quelques formules en géométrie du triangle)* Soit E un plan affine euclidien orienté. Soient A, B, C trois points non alignés de E. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $\beta = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ et $\gamma = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.

(1) Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que :
$$R = \frac{a}{2|\sin\alpha|}.$$

(2) Justifier que $ab|\sin\gamma| = ac|\sin\beta| = bc|\sin\alpha|$. Cette quantité est appelée *aire* de ABC et on la notera $\mathcal{A}$.

(3) Soit $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ le demi-périmètre de ABC. Montrer que :
$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}.$$

Exercice 19 - *(Puissance d'un point par rapport à un cercle et inversion)* Soit E un plan affine euclidien orienté. On fixe un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R > 0$.

(1) Soient $M \in E$ et $\mathcal{C}$ un cercle dans E. On considère une droite Δ passant par M et intersectant $\mathcal{C}$ en deux points A et B. Montrer que la quantité $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle$ est indépendante de la droite Δ. On l'appelle la *puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$*.

On définit maintenant une application $I : E\backslash\{O\} \to E\backslash\{O\}$ de la manière suivante : si $M \in E \setminus \{O\}$, alors $M' = I(M)$ est le point de E tel que $\overrightarrow{OM'} = \frac{R^2}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

(2) Montrer que I est une involution, c'est-à-dire que $I \circ I$ est l'identite de $E \setminus \{O\}$.

(3) Quel est l'ensemble des points fixes de I ?

(4) Soient M, N deux points de E, non alignés avec Ω. On pose $M' = I(M)$ et $N' = I(N)$. Montrer que M, N, M', N' sont cocycliques. On pourra utiliser la question 1.

(5) On identifie E au plan complexe, avec O le point d'affixe 0. Donner l'écriture complexe de I.

(6) Soient Δ une droite et $\mathcal{S}$ un cercle dans E. Montrer que :
   (a) si $O \in \Delta$, alors $I(\Delta \setminus \{O\}) = \Delta \setminus \{O\}$;
   (b) si $O \notin \Delta$, alors $I(\Delta) \cup \{O\}$ est un cercle ;
   (c) si $O \in \mathcal{S}$, alors $I(\mathcal{S} \setminus \{O\})$ est une droite ne passant pas par O ;
   (d) si $O \notin\in \mathcal{S}$, alors $I(\mathcal{S})$ est un cercle ne passant pas par O.

Exercice 20 - *(Droites de Simson et de Steiner)* On considère un triangle ABC d'un plan affine euclidien orienté E et un point M de E.

(1) On note P, Q et R les projetés orthogonaux de M respectivement sur (BC), (CA) et (AB). On veut montrer que P, Q et R sont alignés si, et seulement si, M est sur $\mathcal{C}$, le cercle circonscrit au triangle ABC (dans ce cas, la droite passant par P, Q et R s'appelle la *droite de Simson* associée au point M).
   (a) Montrer que les points P, R, M et B sont cocycliques.
   (b) En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}})$ $[\pi]$.
   (c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}})$ $[\pi]$.
   (d) Conclure.

(2) On note P', Q' et R' les symétriques orthogonaux de M respectivement par rapport à (BC), (CA) et (AB).

(a) Montrer que P', Q' et R' sont alignés si, et seulement si, M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Dans ce cas, la droite passant par P', Q' et R' s'appelle la *droite de Steiner* associée au point M.

(b) Montrer que les droites de Steiner et de Simson associées à un même point M de $\mathcal{C}$ sont parallèles.

(c) Soit M un point de $\mathcal{C}$ et P, P' ... les points définis précédemment. On veut montrer que la droite de Steiner associée à M contient H, l'orthocentre du triangle ABC.
On note S le second point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec (PM) et H_1 le symétrique de H par rapport à (BC).

(i) Montrer que la droite (AS) est parallèle à la droite de Steiner de M (on comparera les angles $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{SM}})$).

(ii) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{HP'}, \overrightarrow{PM}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{H_1M}})$ $[\pi]$.

(iii) En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{HP'}, \overrightarrow{PM}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{H_1A}})$ $[\pi]$ (on rappelle qu'on a vu à l'exercice 16 que H_1 est sur $\mathcal{C}$).

(iv) Conclure.

(3) Soient M_1 et M_2 deux points diamétralement opposés sur le cercle circonscrit à ABC. Montrer que les droites de Simson associées respectivement à M_1 et M_2 sont orthogonales.

Exercice 21 - *(Théorème de Ptolémée)* On se donne 4 points distincts A, B, C et D du plan complexe d'affixes a, b, c et d respectivement.

(1) Montrer que :

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

avec égalité si, et seulement si, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que :

$$(b-a)(d-c) = \lambda(d-a)(c-b).$$

(2) Déduire de la question précédente que le cas d'égalité est équivalent à :

$$\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) - \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) = \pm\pi.$$

(3) Montrer le théorème de Ptolémée : *Un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle si et seulement si le produit des longueurs de ses diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.*

Exercice 22 - On travaille dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure d'espace affine euclidien usuelle. On considère les transformations S_1 et S_2 du plan qui, au point (x, y), associent le point (x', y') défini respectivement par :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x + y - 2 \\ y' = -x + \sqrt{3}y + 4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x' = 5\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y - 3 \\ y' = 5\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y - 1 \end{cases}$$

Montrer que ce sont des similitudes et donner leurs écritures complexes.

Exercice 23 - On se donne un triangle non aplati ABC dans un plan affine euclidien E. Soit I le point d'intersection des bissectrices de ABC. On note E et F les projetés orthogonaux de I sur (AC) et sur (BC) respectivement. On note K l'intersection de (BI) et (EF).

(1) Montrer que les triangles BFK et BIC sont semblables.

(2) Montrer que les triangles FBI et KBC sont semblables.

(3) Conclure que $(CK) \perp (BK)$.

Exercice 24 - *(Théorème de Napoléon et point de Torricelli)* On considère un triangle direct ABC dans le plan complexe. On note a, b et c les affixes respectives de A, B et C. On construit les points M, N, P tels que les triangles APB, BMC et CNA sont des triangles équilatéraux directs. On note X, Y, Z les centres de leurs cercles circonscrits.

(1) Exprimer les affixes de M, N, P, X, Y, Z en fonction de a, b et c.

(2) Montrer que le triangle XYZ est équilatéral.

(3) Montrer que $AM = BN = CP$ et que les droites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes en un point T.

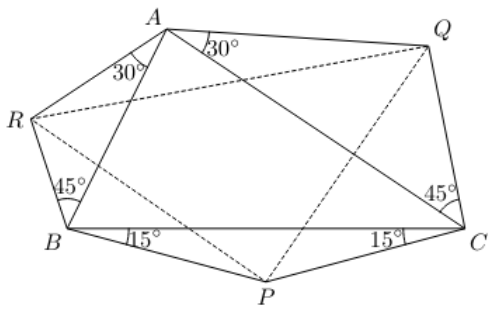
(4) Quels angles forment les droites (AM), (BN) et (CP) entre elles ?

(5) On suppose que les angles de ABC sont compris entre $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

(a) Calculer la somme $TA + TB + TC$ en fonction de a, b et c.

(b) Montrer que $TA + TB + TC = \min\{SA + SB + SC : S \in E\}$.

Exercice 25 - Dans un plan affine euclidien, on considère la figure suivante :



(1) Justifier pourquoi il existe une unique similitude directe s_1 de centre C envoyant Q sur A. De même, justifier pourquoi il existe une unique similitude directe s_2 de centre B envoyant A sur R.

(2) Quel est l'angle de $s_2 \circ s_1$?

(3) Quel est le centre de $s_2 \circ s_1$?

(4) Conclure que le triangle PQR est rectangle isocèle de P.