ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

Exercice 1 - Soit E un plan affine euclidien. Soient $A, B \in E$ distincts et $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble $\{M \in E \mid MA^2 + MB^2 = k\}$ selon les valeurs de k.

Exercice 2 - Soit E un espace affine euclidien. Soient $A, B \in E$ distincts et $k \in \mathbb{R}$. On note I le milieu de (A, B).

(1) Trouver un vecteur $u \in \overrightarrow{E}$ tel que $MA^2 - MB^2 = \langle \overrightarrow{MI}, u \rangle$ pour tout $M \in E$.

(2) En déduire une description de l'ensemble $\{M \in E \mid MA^2 - MB^2 = k\}$.

(3) Déterminer explicitement cet ensemble lorsque E est l'espace affine $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, $A = (1, 2)$, $B = (-1, 4)$, et $k = 4$.

Exercice 3 - Soit E un espace affine euclidien. On se donne des points pondérés (A_i, λ_i) dans E avec $1 \leq i \leq n$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{R} \\ M &\mapsto \sum_i \lambda_i M A_i^2. \end{aligned}$$

(1) On suppose que $\sum_i \lambda_i \neq 0$ et on introduit le barycentre G des points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

(a) Montrer que :

$$f(M) = \left(\sum_i \alpha_i \right) MG^2 + f(G).$$

(b) Soit $k \in \mathbb{R}$. Selon la valeur de k, déterminer le lieu des points $M \in E$ tels que $f(M) = k$.

(2) On suppose que $\sum_i \lambda_i \neq 0$.

(a) Montrer que f est une forme affine.

(b) Que dire des lignes de niveau de f ?

(3) On suppose maintenant que $\dim E = 2$. On se donne un triangle ABC non aplati. Montrer qu'il existe un point $P \in E$ tel que la quantité

$$AP^2 + BP^2 + CP^2$$

est minimale. Identifier ce point.

Exercice 4 -

(1) Soient E un plan affine euclidien et D une droite affine de E. Étant donnés $O \in E$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$, montrer que

$$\mathrm{Card}(\mathcal{C}(O, r) \cap D) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < d(O, D) \\ 1 & \text{si } r = d(O, D) \\ 2 & \text{si } r > d(O, D). \end{cases}$$

Vérifier que $\mathcal{C}(O, r)$ et D s'intersectent en un seul point si, et seulement si, D est tangente à $\mathcal{C}(O, r)$.

(2) Plus généralement, soient E un plan affine euclidien et F un sous-espace affine de E. Étant donnés $O \in E$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$, montrer que $\mathcal{S}(O,r) \cap D$ est une sphère dans F dont on précisera le rayon si $r > d(O,F)$, un point si $r = d(O,F)$ et vide si $r < d(O,F)$.

Exercice 5 - Soient E un plan affine euclidien et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres O et O' et de rayons r et r' respectivement. On suppose que $O \neq O'$.

(1) Montrer que :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}') = \begin{cases} 0 & \text{si } OO' > r + r' \text{ ou } OO' < |r' - r| \\ 1 & \text{si } OO' = r + r' \text{ ou } OO' = |r' - r| \\ 2 & \text{si } |r' - r| < OO' < r + r'. \end{cases}$$

(2) Si $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ contient deux points distincts A et B, montrer que $(AB) \perp (OO')$.

(3) Si $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ contient exactement un point A, montrer que $A \in (OO')$.

Exercice 6 - Soient E un plan affine euclidien, $\mathcal{C}$ un cercle et $M \in E$ un point. Combien de droites tangentes à $\mathcal{C}$ passent par M ?

Exercice 7 - Soient E un plan affine euclidien et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres O et O' et de rayons r et r' respectivement. On suppose que $O \neq O'$. Soit n le nombre de droites qui sont simultanément tangentes à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$. Montrer que :

$$n = \begin{cases} 0 & \text{si } OO' < |r' - r| \\ 1 & \text{si } OO' = |r' - r| \\ 2 & \text{si } |r' - r| < OO' < r + r' \\ 3 & \text{si } OO' = r + r' \\ 4 & \text{si } OO' > r + r'. \end{cases}$$

On suppose que $OO' > |r - r'|$.

Exercice 8 - Soit E une espace affine euclidien.

(1) On suppose que $\dim E = 2$ et on se donne un repère orthonormal (O, u, v) de E. Soit D une droite affine de E, d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans ce repère. Soit enfin $A(x_0, y_0)$ un point de E. Montrer que la distance de A à D vaut :

$$d(A,D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(2) On suppose que $\dim E = 3$ et on se donne un repère orthonormal (O, u, v, w) de E.

(a) Soit P un plan affine de E, d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ dans ce repère. Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de E. Montrer que la distance de A à P vaut :

$$d(A,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(b) Calculer la distance du point $A(1, 0, -2)$ au plan P d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -1 + \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda + 3\mu. \end{cases}$$

Exercice 9 - Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ avec sa structure euclidienne usuelle, calculer la distance du point $A(2,-1,1)$ à la droite D d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2. \end{cases}$$

Exercice 10 - Soient D_1 et D_2 deux droites non coplanaires d'un espace affine euclidien E de dimension 3.

(1) Montrer qu'il existe un unique point A_1 de D_1 et un unique point A_2 de D_2 tels que la droite (A_1A_2) est orthogonale à D_1 et D_2.

(2) Montrer que la distance entre D_1 et D_2 est égale à la longueur A_1A_2.

(3) Calculer la distance entre les deux droites D_1 et D_2 ayant les représentations paramétriques suivantes :

$$D_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda, \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \mu \\ z = \mu. \end{cases}$$

Exercice 11 - On se donne les points $A(2,5)$, $B(-1,2)$ et $C(-3,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure d'espace affine euclidien usuel. Soit r un nombre réel.

(1) Selon la valeur de r, décrire le lieu des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\|3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}\| = r.$$

(2) Selon la valeur de r, décrire le lieu des points $N \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\|3\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AB}\| = r.$$

Exercice 12 - Soit ABC un triangle dans le plan affine. Considérons le carré direct $ACFG$ et le carré indirect $ABDE$. Soit M le milieu de $[B,C]$. Démontrer que $(AM) \perp (EG)$.

Exercice 13 - Soit E un espace affine euclidien et soit $f : E \to E$ une isométrie, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in E$, on a $d(f(A), f(B)) = d(A,B)$. Démontrer qu'alors f est une application affine.

Exercice 14 - (Sphère circonscrite à un tétraèdre) Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires d'un espace affine euclidien de dimension 3. Montrer qu'il existe une unique sphère qui passe par A, B, C et D.

Exercice 15 - (Théorème de Sylvester-Gallai)

(1) On se donne un nombre fini S de points dans un plan affine euclidien E. On suppose qu'ils ne sont pas tous alignés. Montrer qu'il existe une droite qui contient exactement deux points de S.

Indication : on pourra considérer un couple (P,D), où D est une droite contenant au moins deux points de S et P est un point de S, avec $d(P,D)$ minimale.

(2) Est-ce que la question précédente reste vraie si les points sont dans un espace de dimension quelconque ?

(3) Est-ce que la première question reste vraie pour un nombre infini de points ?

Exercice 16 - (Droite d'Euler) On considère un triangle non aplati ABC dans un plan affine euclidien E. On note G son centre de gravité, H son orthocentre et O le centre de son cercle circonscrit.

(1) On considère le point $X \in E$ tel que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

(a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AX}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$.
(b) Déduire que $X = H$.

(2) En utilisant la question précédente, montrer que G, H et O sont alignés et exprimer la longueur OH en fonction de la longueur OG.

Exercice 17 - Soient X un convexe fermé non vide d'un espace affine euclidien E et $P \in E \setminus X$ un point.

(1) Montrer qu'il existe un unique point $Q \in X$ tel que $d(P, Q) = d(P, X)$. On dit que Q est la projection de Q sur X.

(2) Soit R un point du segment $[PQ]$ différent de P et de Q. Soit H l'hyperplan affine passant par R et orthogonal à (PQ). Montrer que X est contenu dans l'un des deux demi-espaces affines définis par H.

(3) Montrer que tout convexe fermé peut s'écrire comme l'intersection de demi-espaces affines.