BARYCENTRES

Exercice 1 – Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, calculer le barycentre de

$$\big(((1,1,1),1),\ ((-1,0,1),2),\ ((2,1,0),-2)\big).$$

Exercice 2 – Soit E un espace affine réel. Soient $A, B, C \in E$ non alignés. Pour chaque $i \in \{1,2,3\}$ soit $(a_i, b_i, c_i) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a_i + b_i + c_i \neq 0$. On note M_i le barycentre de la famille $\big((A,a_i),(B,b_i),(C,c_i)\big)$. Démontrer que M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 3 – Soit E un espace affine réel. Soit F un sous-ensemble non vide de E. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes,

(i) F est un sous-espace affine de E,

(ii) pour tout $(A,B) \in F^2$ tel que $A \neq B$, $(AB) \subseteq F$.

Exercice 4 – Soient E un espace affine réel de dimension n et $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de E. On fixe $k \in \{1, \dots, n\}$ et on considère le sous-espace affine $F = \langle A_0, \dots, A_k \rangle$ de E et le sous-espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ de $\overrightarrow{E}$.

(1) Justifier que $(A_0, \dots, A_k)$ est un repère affine de F.

(2) Soient π (resp. s) la projection affine de E sur F parallèlement à V (resp. la symétrie affine de E par rapport à F parallèlement à V). Exprimer π et et s en coordonnées barycentriques par rapport aux bases affines $(A_0, \dots, A_n)$ et $(A_0, \dots, A_k)$.

Exercice 5 – Soit E un espace affine réel de dimension 3. Soit A, B, C, D quatre points de E. Soient I, J, K, L les points de E définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \qquad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \qquad \overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

(1) Exprimer I, J, K, L comme des barycentres de A, B, C, D.

(2) Définir un point $G \in E$ tel que G est à la fois barycentre de I et de J (avec des poids à déterminer) et de K et L (avec des poids à déterminer).

(3) En déduire que les quatre points I, J, K, L sont coplanaires.

Exercice 6 – Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles dans un plan affine réel E. Montrer que A, B, C et A', B', C' ont même isobarycentre si, et seulement si :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0.$$

Exercice 7 – Soit E un espace affine réel. Soit G un sous-groupe fini de E. Montrer qu'il existe un point $A \in E$ tel que $f(A) = A$ pour tout $f \in G$.

Exercice 8 – Soient A_0, A_1, et A_2 trois points dans $\mathbb{R}^2$. On considère la suite (A_k) de points vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \geq 3, \quad A_k = \mathrm{Bar}\left((A_{k-1},1),(A_{k-2},1),(A_{k-3},2)\right).$$

Étudier la convergence de cette suite.

Exercice 9 – On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Soit $P = A_1A_2...A_n$ un polygone à n sommets. On lui associe le polygone $P' = A_1^{'}A_2^{'}...A_n^{'}$ où A_i' est le milieu de A_i et A_{i+1} avec la convention que $A_{n+1} = A_1$.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers l'isobarycentre de $A_1, \ldots, A_n$ lorsque k tend vers l'infini.

Exercice 10 – (Théorème de Pappus, seconde version) Soit E un plan affine réel. Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites affines de E, dont on suppose qu'elles n'ont qu'un seul point d'intersection noté O. Soient $A, B, C \in \mathcal{D}\backslash\{O\}$ trois points deux-à-deux distincts, et soient $A', B', C' \in \mathcal{D}'\backslash\{O\}$ trois points deux-à-deux distincts. On suppose que (AB') et $(A'B)$ s'intersectent en un point R, que (AC') et $(A'C)$ s'intersectent en un point R et que (BC') et $(B'C)$ s'intersectent en un point P.

(1) Justifier que (O, A, B) est un repère affine de E.

(2) Calculer les coordonnées barycentriques de P, Q et R dans ce repère affine.

(3) Montrer que P, Q et R sont alignés.

Exercice 11 – (Théorème de Ceva, seconde version) Soient A, B et C trois points non alignés dans un plan affine réel. Soient $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ et $F \in (AB)$. On suppose que les droites (AD) et (BE) sont sécantes. En utilisant les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C), montrer que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes si, et seulement si :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1.$$

Remarque : Le Théorème de Ceva rappelle fortement le Théorème de Menelaüs. Cela n'est pas un hasard : ce sont deux énoncés duaux l'un de l'autre. En géométrie projective, on peut passer du Théorème de Ceva au Théorème de Menelaüs en remplaçant les points par des droites et les droites par des points.

Exercice 12 – (Théorème de Desargues) Soit E un plan affine réel. Soient (AA'), (BB') et (CC') trois droites distinctes concourantes en un point O. On suppose que (AB) et $(A'B')$ (resp. (AC) et $(A'C')$, resp. (BC) et $(B'C')$) se rencontrent en un point R (resp. Q, resp. P). Exprimer les points P, Q et R comme barycentres de A, B et C et montrer qu'ils sont alignés.

Exercice 13 – Soit E un espace affine réel. Soient X et X' deux parties convexes de E. Montrer que l'ensemble des milieux des segments $[MM']$, avec $M \in X$ et $M' \in X'$, est convexe.

Exercice 14 – Soit E un espace affine réel de dimension finie n.

(1) Soit H un hyperplan affine de E. On considère la relation $\sim$ sur E définie par : $A \sim B$ si, et seulement, $[AB] \cap H = \emptyset$. Montrer que c'est une relation d'équivalence et que le quotient $E/\sim$ a deux éléments. Les classes d'équivalence pour $\sim$ sont appelées demi-espaces de E.

(2) Montrer qu'un demi-espace de E est convexe.

Exercice 15 – Soit E un espace affine réel. Soient X une partie convexe de E et A un point de X. On dit que A est un point extrémal de X si $A \in [BC]$ avec $B, C \in X$ implique $A = B$ ou $A = C$.

(1) Montrer qu'un point A de X est extrémal si, et seulement si, l'ensemble $X \setminus \{A\}$ est convexe.

(2) Soit A un point de X. On suppose que, pour tous $B, C \in X$ tels que A est le milieu du segment $[BC]$, on a $A = B$ ou $A = C$. Montrer que A est un point extrémal de X.

(3) Soit Y une partie de E telle que $X = \mathrm{Conv}(Y)$. Montrer que tout point extrémal de X appartient à Y.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une matrice réelle de taille $n \times n$ est bistochastique si ses coefficients $(a_{i,j})$ sont positifs ou nuls et si l'on a $\sum_j a_{i,j} = 1$ pour tout i et $\sum_i a_{i,j} = 1$ pour tout j. On note $\mathcal{B}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

(4) Montrer que $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est convexe.

(5) Montrer que les matrices de permutation sont les points extrémaux de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

On admet le Théorème de Krein-Milman, qui affirme qu'un convexe compact de $\mathbb{R}^m$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Il implique dont que toute matrice bistochastique est barycentre à coefficients positifs de matrices de permutation.

(6) Justifier que toute matrice de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est barycentre à coefficients positifs de $(n-1)^2 + 1$ matrices de permutation.

Exercice 16 – (Théorèmes de Radon et de Helly). Soit E un espace affine réel de dimension finie n. Soit $S = \{A_1, \ldots, A_{n+2}\}$ un ensemble de $n+2$ points de E.

(1) Fixons un point $O \in E$. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2} \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 0.$$

(2) En déduire qu'il existe une partition $S = S_1 \sqcup S_2$ de S telle que $\mathrm{Conv}(S_1) \cap \mathrm{Conv}(S_2) \neq \emptyset$.

(3) On se donne maintenant $n+2$ parties convexes $X_1, \ldots, X_{n+2}$ de E. On suppose que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n+2\}$, l'intersection $\bigcap_{j \neq i} C_j$ est non vide. Montrer que l'intersection $\bigcap_{j=1}^{n+2} C_j$ est non vide.