Université Paris Cité (Diderot Paris 7)

Cours d'arithmétique (M1), janvier-avril 2026

Feuille TD2 : Révisions d'algèbre

Quotients d'anneaux.

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif intègre, et I, J deux idéaux de A.

1. Rappeler la définition des idéaux $I+J$, IJ, $I\cap J$.
2. Montrer que $IJ\subset I\cap J$. A-t-on toujours égalité ?
3. On suppose $I+J=A$, montrer que $IJ=I\cap J$ et qu'on a un isomorphisme naturel $A/IJ\cong A/I\times A/J$.
4. Étendre l'énoncé au cas de n idéaux deux à deux *étrangers*, i.e. vérifiant $I_i+I_j=A$ pour $i\neq j$ en montrant que
$$A/\prod_{j=1}^{n} I_j \cong \prod_{j=1}^{n} A/I_j.$$
5. Montrer, sous les mêmes hypothèses, l'isomorphisme de groupes :
$$\left(A/\prod_{j=1}^{n} I_j\right)^{\times} \cong \prod_{j=1}^{n}(A/I_j)^{\times}.$$

Exercice 2.

1. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$.
2. Réaliser les anneaux $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ et $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ comme quotients de $\mathbb{Z}[X]$.

Idéaux premiers et maximaux.

Exercice 3. Rappeler la définition d'un idéal premier, d'un idéal maximal, d'un élément irréductible dans un anneau A. Montrer les affirmations suivantes.

1. Un idéal maximal est premier.
2. Un idéal I est premier (resp. maximal) si et seulement si le quotient A/I est intègre (resp. est un corps).
3. Soit $\phi : B\to A$ un homomorphisme d'anneaux et I un idéal de A. montrer que si I est un idéal premier alors $\phi^{-1}(I)$ est également un idéal premier. L'énoncé est-il vrai en remplaçant "premier" par "maximal" ?
4. Supposons A intègre et soit $a\in A$ non nul. Montrer que si aA est un idéal premier, alors a est irréductible. La réciproque est-elle vraie ?
5. Supposons que A est principal. Soit $a\in A$ non nul. Montrer que a est irréductible si, et seulement si, aA est un idéal premier si, et seulement si, aA est un idéal maximal.

Exercice 4. Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ un entier algébrique, c'est-à-dire un nombre algébrique dont le polynôme minimal $\mu=\mu_\alpha$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On note $\bar{\mu}$ la réduction de μ dans $\mathbb{F}_p[X]$, et on pose $A=\mathbb{Z}[\alpha]$.

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer que μ divise P dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Montrer qu'on a un isomorphisme naturel d'anneaux
$$A \cong \mathbb{Z}[X]/(\mu).$$
3. Montrer qu'on a un isomorphisme naturel d'anneaux
$$A/pA \cong \mathbb{Z}[X]/(p, \mu) \cong \mathbb{F}_p[X]/\bar{\mu}\mathbb{F}_p[X]. \quad (1)$$
4. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) l'idéal pA de A est premier ;
   (b) l'idéal pA de A est maximal ;
   (c) le polynôme $\overline{\mu}$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Exercice 5. Soit p un nombre premier et soit $\alpha = i\sqrt{p}$. On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[\alpha]$. Montrer que l'idéal (α) de A est $\{a + b\alpha | a \in p\mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\}$. Est-il premier ? Est-il maximal ?

Exercice 6. On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. L'idéal (3) est-il premier ? Et l'idéal (5) ?

Exercice 7. Soient A un anneau commutatif et I un idéal.

1. Montrer que les idéaux de A/I sont en bijection avec les idéaux de A contenant I.
2. Soit $J \supseteq I$ un idéal de A. Montrer que A/J est canoniquement isomorphe au quotient de A/I par J/I.
3. On dit que I est un idéal premier (resp. maximal) si A/I est intègre (resp. un corps). Montrer que les idéaux premiers (resp. maximaux) de A/I sont en bijection avec les idéaux premiers (resp. maximaux) de A contenant I.
4. Soit $n > 0$ un entier. Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Lesquels sont premiers ? Et maximaux ?

Exercice 8. Soit A un anneau commutatif.

1. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier et $I_1, ..., I_n$ des idéaux. On suppose que $\mathfrak{p}$ contient $\prod_{k=1}^{n} I_k$. Montrer que $\mathfrak{p}$ contient l'un des I_k.
2. Soient I un idéal et $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$ des idéaux premiers. On suppose que I est contenu dans $\bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{p}_k$. Montrer que I est contenu dans l'un des $\mathfrak{p}_k$.

Divisibilité dans les anneaux.

Exercice 9. Soit $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. On considère l'application $N : A \to \mathbb{Z}, z = a + b\sqrt{5} \mapsto a^2 - 5b^2$.

1. Montrer qu'un élément z de A est inversible si, et seulement si, $N(z) = \pm 1$. Vérifier que A possède une infinité d'éléments inversibles.
2. Montrer que 2, $3 + \sqrt{5}$ et $3 - \sqrt{5}$ sont irréductibles dans A.
3. Montrer qu'il n'y a pas d'unicité (à l'ordre et à association près) de la décomposition de 4 en facteurs irréductibles dans A.
4. Vérifier que 2 et $3 + \sqrt{5}$ sont associés dans $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. De même, vérifier que 2 et $3 - \sqrt{5}$ sont associés dans $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Remarque : On verra dans l'exercice 13 que tout élément non nul de $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ s'écrit comme produit d'irréductibles, et ce de manière unique à l'ordre et à une unité près.

Exercice 10. Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

1. Quels sont les éléments inversibles de A ?
2. Montrer que 3, 7, $4 - i\sqrt{5}$ et $4 + i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans A.
3. Montrer qu'il n'y a pas d'unicité (à l'ordre et à association près) de la décomposition de 21 en facteurs irréductibles dans A.
4. Faire la liste des idéaux premiers de A contenant 3 et celle des idéaux premiers de A contenant 7. Exhiber des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ tels que :

$$(3) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \quad (7) = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, \quad (4 + i\sqrt{5}) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2, \quad (4 - i\sqrt{5}) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1.$$

Remarque : On peut montrer que, dans l'anneau A, tout idéal s'écrit comme produit d'idéaux premiers, et ce de manière unique à l'ordre près.

Anneaux euclidiens, principaux, factoriels, intégralement clos.

Exercice 11.

1. Rappeler la définition d'un anneau euclidien, un anneau principal, un anneau factoriel et un anneau intégralement clos.
2. Quelles implications y a t'il entre ces différentes notions ? Savez-vous les démontrer ?

Exercice 12.

1. Rappeler pourquoi $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.
2. Factoriser $-3 + 15i$ en produit d'irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 13.

1. L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est-il factoriel ? Et intégralement clos ?
2. Et l'anneau $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$?
3. Et l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$?

Exercice 14. Soit R un anneau euclidien qui n'est pas un corps.

1. Montrer que l'on peut trouver un élément non inversible x de R tel que la restriction à $R^\times \cup \{0\}$ de la projection canonique de R sur $R/(x)$ soit surjective. On pourra choisir x tel que $\phi(x)$ soit minimal parmi les éléments $x \notin R^\times$, où ϕ désigne le stathme d'une division euclidienne de R.

Soient $\alpha = \dfrac{1 + i\sqrt{19}}{2}$ et $A = \mathbb{Z}[\alpha]$.

2. Déterminer $A^\times$.
3. Montrer que A n'est pas euclidien.
4. Si $a, b \in A \smallsetminus \{0\}$, montrer qu'il existe $q, r \in A$ tels que $r = 0$ ou $|r| < |b|$ et qui vérifient, soit $a = bq + r$, soit $2a = bq + r$.
5. Montrer que l'idéal engendré par 2 dans A est maximal.
6. Montrer que A est un anneau principal.

Exercice 15. Considérons les anneaux $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{11}]$ et $B = \mathbb{Z}[i\sqrt{13}]$.

1. Montrer que A et B ne sont pas des anneaux factoriels.
2. Faire la liste des idéaux premiers de A qui contiennent l'idéal (2). En déduire que l'idéal (2) ne s'écrit pas comme produit d'idéaux premiers de A.
3. À l'inverse, montrer que les idéaux (2), (3) et (7) s'écrivent bien comme des produit d'idéaux premiers de l'anneau B.

Remarque : Dans B, on peut montrer que tout idéal s'écrit comme produit d'idéaux premiers de manière unique à l'ordre près.