# APPLICATIONS AFFINES

**Exercice 1 -** On note $E$ le sous-espace affine $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$. Dans chacune des situations suivantes, où $L$ est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, démontrer que $L(E) \subseteq E$ et que l'application de $E$ dans $E$ définie par $X \mapsto L(X)$ est une application affine.

(1) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ L(x,y,z) = (3x, 3y+z, z)$.

(2) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ L(x,y,z) = (x+2z, y+z, z)$.

**Exercice 2 -**

(1) Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, démontrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x',y',z')$ où

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y - 2z + 2 \\ y' = -4x - y + 2z - 2 \\ z' = 8z + 4y - 3z + 4 \end{cases}$$

est une application affine.

(2) Démontrer que l'ensemble des points fixes de $f$ est un plan $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$.

(3) Démontrer qu'il existe une droite vectorielle $D \subset \mathbb{R}^3$ telle que, pour tout point $M \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ appartient à $D$.

**Exercice 3 -**

(1) Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, démontrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x',y',z')$ où

$$\begin{cases} x' = -x + 2z + 1 \\ y' = x - y + z + 4 \\ z' = x + 3y - z \end{cases}$$

est une bijection affine. Expliciter sa bijection réciproque.

**Exercice 4 -** On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$. On considère le plan $P$ d'équation $x+y+z=1$ et la droite vectorielle $D$ d'équations $\begin{cases} x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$.

(1) Donner l'expression analytique de la projection $p$ sur le plan $P$ suivant la direction $D$.

(2) Donner l'expression analytique de la symétrie $s$ par rapport à $P$ suivant la direction $D$.

**Exercice 5 -** Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère l'application affine $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x',y',z')$ où

$$\begin{cases} x' = y + z - 1 \\ y' = x + z - 1 \\ z' = x + y - 1. \end{cases}$$

(1) Trouver les valeurs propres et les espaces propres de $\overrightarrow{f}$.

(2) Déduire que $f$ admet un unique point fixe $A$. Donner ses coordonées.

(3) Montrer que toute droite globalement invariante par $f$ passe par $A$.

(4) Déterminer toutes les droites globalement invariantes par $f$.

**Exercice 6 -** Soit $E$ une droite affine réelle. Déterminer toutes les applications affines bijectives de $E$ dans $E$.

**Exercice 7 -** On suppose que $E$ est un plan affine. Soient $A_0, A_1, A_2 \in E$ non alignés. Étant donné $M_0 \in (A_0A_1)$, on définit une suite $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ par récurrence : si $i \in \mathbb{N}$ alors $M_{i+1}$ est le projeté affine de $M_i$ de $(A_{i+1}A_{i+2})$ parallèlement à $(A_{i-1}A_i)$, en convenant que $A_i = A_{i \bmod 3}$ (c'est-à-dire $A_0 = A_3 = A_6 = \dots$, $A_1 = A_4 = A_7 = \dots$, $A_2 = A_5 = A_8 = \dots$).

On note $h\colon (A_0A_1) \to (A_0A_1)$ l'application définie par $h(M_0) = M_3$ pour tout $M_0 \in (A_0A_1)$.

(1) Faire un dessin représentant le triangle $A_0A_1A_2$ et une suite $M_0, \cdots, M_6$.

(2) Justifier que, pour tout $M_0 \in (A_0A_1)$, la suite $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est correctement définie.

(3) Démontrer que $h$ est une application affine.

(4) Identifier $h$ (*on pourra d'abord déterminer* $h(A_0)$ *et* $h(A_1)$).

(5) En déduire que $M_0 = M_6$ pour tout $M_0 \in (A_0A_1)$.

(6) A quelle condition sur $M_0$ les droites $(M_0M_1)$, $(M_2M_3)$ et $(M_4M_5)$ sont-elles concourantes ? Quel est alors le point de concourance ?

**Exercice 8 -** (Théorème de Pappus, première version) Soit $E$ un plan affine réel. Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites affines de $E$, dont on suppose qu'elles n'ont qu'un seul point d'intersection noté $O$. Soient $A, B, C \in \mathcal{D}\backslash\{O\}$ trois points deux-à-deux distincts, et soient $A', B', C' \in \mathcal{D}'\backslash\{O\}$ trois points deux-à-deux distincts. On suppose que $(AB')/\!/(A'B)$ et $(BC')/\!/(B'C)$.

(1) Faire un dessin.

(2) Démontrer qu'il existe une unique homothétie $h_C : E \to E$ telle que $h_C(A) = B$ et $h_C(B') = A'$, et une unique homothétie $h_A : E \to E$ telle que $h_A(B) = C$ et $h_A(C') = B'$

(3) Démontrer que $h_A \circ h_C = h_C \circ h_A$.

(4) Montrer que $(A'C)/\!/(AC')$.

**Exercice 9 -** Soit $E$ un plan affine réel. Soient $A, B, C \in E$ non alignés. On note $G$ l'ensemble des applications affines bijectives $u\colon E \to E$ telles que $u(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$. Montrer que $G$ est un groupe isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_3$.

**Exercice 10 -** Soit $E$ un espace affine réel.

(1) Soit $f : E \to E$ une application affine. Montrer que $f$ envoie chaque droite de $E$ sur une droite parallèle si, et seulement si, $f$ est une translation ou une homothétie de rapport non nul.

(2) Soit $\mathrm{HT}(E)$ le sous-ensemble de $\mathrm{GA}(E)$ constitué des translations et des homothéties. Montrer que $\mathrm{HT}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$. On dit que $\mathrm{HT}(E)$ est le groupe des dilatations de $E$.

(3) Montrer que $\mathrm{HT}(E) \cong \overrightarrow{E} \rtimes \mathbb{R}^\times$.

(4) On rappelle que le centre d'un groupe $G$ est le sous-groupe

$$Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G, gh = hg\}.$$

On rappelle également que le centre de $\mathrm{GL}(\overrightarrow{E})$ est $\mathbb{R}^\times \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$. Montrer que le centre de $\mathrm{GA}(E)$ est contenu dans $\mathrm{HT}(E)$ puis qu'il est trivial.

**Exercice 11 -** On rappelle que le sous-groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe $G$ est le sous-groupe de $G$ engendré par les commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x, y \in G$. C'est un sous-groupe distingué et le quotient $G/D(G)$ est le plus grand quotient abélien de $G$. On l'appelle l'abélianisé de $G$ et on le note $G^{\mathrm{ab}}$.

(1) Calculer $D(G)$ et $G^{\mathrm{ab}}$ pour $G = \mathrm{GA}(E)$ lorsque $E$ est un espace affine réel de dimension 1.

(2) Soit maintenant $E$ un espace affine réel de dimension finie $n$. On pose $G = \mathrm{GA}(E)$. Montrer que :

$$D(G) \cong \overrightarrow{E} \rtimes D(\mathrm{GL}(\overrightarrow{E})),$$

et en déduire que $G^{\mathrm{ab}} \cong \mathrm{GL}(\overrightarrow{E})^{\mathrm{ab}}$.

*Remarque :* On peut montrer que $D(\mathrm{GL}(\overrightarrow{E})) = \mathrm{SL}(\overrightarrow{E})$. Le sous-groupe dérivé de $\mathrm{GA}(E)$ est donc $\overrightarrow{E} \rtimes \mathrm{SL}(\overrightarrow{E})$.

**Exercice 12 -** Soient $E$ un espace affine réel et $p\colon E \to E$ une application affine. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $p$ est une projection affine

(2) $p \circ p = p$

(3) $\overrightarrow{p}$ est une projection vectorielle et $p$ a au moins un point fixe.

**Exercice 13 -** Dans cet exercice on se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$.

(1) Soit $A'B'C'$ un triangle. Montrer qu'il existe un triangle $ABC$, et un seul, tel que $A'$ soit le milieu de $(B, C)$, $B'$ le milieu de $(C, A)$ et $C'$ le milieu de $(A, B)$. Indiquer une construction géométrique de ce triangle.

(2) Soit $A'B'C'D'$ un quadrilatère. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un quadrilatère $ABCD$ tel que $A'$ soit le milieu de $(A, B)$, $B'$ le milieu de $(B, C)$, $C'$ le milieu de $(C, D)$ et $D'$ le milieu de $(D, A)$. Ce quadrilatère, s'il existe, est-il unique ?

(3) Étant donnés $n$ points $B_1, \ldots, B_n$, peut-on toujours trouver $n$ points $A_1, \ldots, A_n$ tels que $B_i$ soit, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le milieu de $(A_i, A_{i+1})$ (avec la convention $A_{n+1} = A_1$) ? Donner une construction géométrique des points $A_i$ à partir des points $B_i$ lorsque la solution existe.

**Exercice 14 -** Dans cet exercice on se place dans un plan affine réel $E$. Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati (*i.e.* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $A, B, C, D$ ne sont pas alignés). Soit $M \in (AC)\backslash\{A\}$. On note $I$ (resp. $J$) le projeté affine de $M$ sur $(AB)$ (resp. $(AD)$) parallèlement à la direction de $(AD)$ (resp. $(AB)$).

(1) Faire un dessin.

(2) Montrer que $(IJ) /\!\!/ (BD)$.

**Exercice 15 -** (Théorème de Ceva, première version). Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés dans un plan affine réel. Soient $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ et $F \in (AB)$. On suppose que les droites $(AD)$ et $(BE)$ sont parallèles. Montrer que $(CF)$ est parallèle à $(AD)$ et $(BE)$ si, et seulement si :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1.$$

**Exercice 16 -** (Théorème de Menelaüs via le Théorème de Thalès). Soit $E$ un plan affine réel. Soient $A, B, C \in E$ non alignés. Soient $M \in (BC)\backslash\{B, C\}$, $N \in (CA)\backslash\{C, A\}$ et $P \in (AB)\backslash\{A, B\}$.

(1) On suppose que $M$, $N$ et $P$ sont alignés. Soit $A'$ le projeté de $A$ sur $(MP)$ parallèlement à la direction de $(BC)$. En appliquant judicieusement le Théorème de Thalès, montrer que :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

(2) Réciproquement, on suppose que :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

(a) Montrer que les droites $(NP)$ et $(BC)$ sont sécantes.
(b) Conclure que $M$, $N$ et $P$ sont alignés.

**Exercice 17 -** (Birapport). Soit $E$ un plan affine réel. Soient $D$ et $D'$ deux droites sécantes en un point $A$. Soient $D_1$, $D_2$, $D_3$ et $D_4$ quatre droites non parallèles à $D$ et $D'$. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note $M_i$ l'intersection de $D$ et $D_i$ et $M_i'$ l'intersection de $D'$ et $D_i$.

(1) On suppose que $D_1$, $D_2$, $D_3$ et $D_4$ sont parallèles.
(a) Faire un dessin.
(b) Montrer que :

$$\frac{\overline{M_2M_1}}{\overline{M_2M_3}} \cdot \left(\frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_4M_3}}\right)^{-1} = \frac{\overline{M_2'M_1'}}{\overline{M_2'M_3'}} \cdot \left(\frac{\overline{M_4'M_1'}}{\overline{M_4'M_3'}}\right)^{-1}.$$

(2) On suppose maintenant que $D_1$, $D_2$, $D_3$ et $D_4$ sont concourantes en un point $B$, qui n'appartient ni à $D$ ni à $D'$.
(a) Faire un dessin.
(b) Montrer que l'on peut supposer que $A = M_1 = M_1'$. On fera cette hypothèse dans la suite de l'exercice.
(c) On considère :
(i) $N_2$ le projeté de $M_3$ sur $D_2$ parallèlement à la direction de $D_1$ ;
(ii) $N_2'$ le projeté de $M_3'$ sur $D_2$ parallèlement à la direction de $D_1$ ;
(iii) $N_4$ le projeté de $M_3$ sur $D_4$ parallèlement à la direction de $D_1$ ;
(iv) $N_4'$ le projeté de $M_3$ sur $D_4$ parallèlement à la direction de $D_1$.
Compléter la figure de la question (a).
(d) Montrer que :

$$\frac{\overline{M_2M_1}}{\overline{M_2M_3}} \cdot \left(\frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_4M_3}}\right)^{-1} = \frac{\overline{N_4M_3}}{\overline{N_2M_3}},$$
$$\frac{\overline{M_2'M_1'}}{\overline{M_2'M_3'}} \cdot \left(\frac{\overline{M_4'M_1'}}{\overline{M_4'M_3'}}\right)^{-1} = \frac{\overline{N_4'M_3'}}{\overline{N_2'M_3'}}.$$

(e) Conclure que :

$$\frac{\overline{M_2M_1}}{\overline{M_2M_3}} \cdot \left(\frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_4M_3}}\right)^{-1} = \frac{\overline{M_2'M_1'}}{\overline{M_2'M_3'}} \cdot \left(\frac{\overline{M_4'M_1'}}{\overline{M_4'M_3'}}\right)^{-1}.$$

**Exercice 18 -** (Théorème fondamental de la géométrie affine). On fixe un espace affine réel $E$ de dimension au moins 2 et on se donne une bijection $\varphi$ de $E$ dans $E$. Le but de cet exercice est de montrer que $\varphi$ est affine si et seulement si $\varphi$ préserve les triplets de points alignés.

*Dans tout ce qui suit on suppose que $\varphi$ envoie 3 points alignés sur 3 points alignés. On note par ' les images par $\varphi$ : $O' = \varphi(O)$, $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ ...*

(1) Soit $F$ un sous-espace affine de $E$. Montrer que $\varphi^{-1}(F)$ est affine.

(2) Montrer que $\varphi$ envoie un repère affine sur un repère affine.

(3) En déduire que $\varphi$ envoie $k$ points affinement indépendants sur $k$ points affinement indépendants.

(4) En déduire que $\varphi$ préserve droites et plans.

(5) En déduire que $\varphi$ envoie les droites parallèles sur des droites parallèles.

(6) On fixe $O$ un point de $E$. Soient $A$ et $B$ deux points de $E$ et soit $C$ tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. On suppose que $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés. En utilisant la question e) montrer que $\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$.

(7) Soient $D$ une droite passant par $O$ et $D'$ son image par $\varphi$. On fixe $A \neq O$ un point de $D$. Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le point $M$ tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$. Vérifier que $\overrightarrow{O'M'} = \mu\overrightarrow{O'A'}$ pour un unique scalaire $\mu \in \mathbb{R}$, indépendant du choix de A. On a ainsi défini une fonction

$$\begin{aligned} \sigma_D : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto \mu. \end{aligned}$$

(8) On fixe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Soient $M$ et $N$ tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda_1\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{ON} = \lambda_2\overrightarrow{OA}$. A l'aide d'un point $B$ hors de $D$ et de droites parallèles, décrire une manière de construire les points $P$ et $Q$ de $D$ tels que :

$$\overrightarrow{OP} = (\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{OA}, \qquad \overrightarrow{OQ} = \lambda_1\lambda_2\overrightarrow{OA}.$$

(9) Déduire que $\sigma_D(\lambda_1+\lambda_2) = \sigma_D(\lambda_1)+\sigma_D(\lambda_2)$ et $\sigma_D(\lambda_1\lambda_2) = \sigma_D(\lambda_2)\sigma_D(\lambda_2)$, puis que $\sigma_D$ est un automorphisme du corps $\mathbb{R}$.

(10) Soit $\sigma$ un automorphisme du corps $\mathbb{R}$. Vérifier que $\sigma(1) = 1$, que $\sigma(x) = x$ pour $x \in \mathbb{Q}$, que $\sigma$ est une application croissante, puis que $\sigma = Id$.

(11) Conclure que $\varphi$ est affine.