ESPACES AFFINES

Exercice 1 -

(1) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On suppose que $a \neq b$. Démontrer que

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 1 \text{ et } ax + by + cz + dt = 0\}$$

est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$. Déterminer sa dimension ainsi qu'une base affine.

(2) Soit $a \in \mathbb{R}$. À quelle condition l'ensemble des solutions (x, y, z, t) dans $\mathbb{R}^4$ du système

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & +2t & = & a+1 \\ x & -y & & +2t & = & 3a-1 \\ x & +5y & +2z & -2t & = & -2a \end{cases}$$

est-il un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$? Lorsque c'est un espace affine, déterminer sa dimension ainsi qu'une base affine.

(3) Soit E l'espace affine des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables.
Démontrer que $\{y \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = (x-1)e^x\}$ est un sous-espace affine de E. Déterminer une base de sa direction.

Exercice 2 - Soient d un entier non nul, et $a_1, \ldots, a_d$ et b des réels. Soit E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_{n+d} = a_1 u_{n+d-1} + a_2 u_{n+d-2} + \cdots + a_d u_n + b.$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que E est un espace affine et déterminer sa dimension.

(2) Lorsque $d = 1$ et lorsque $d = 2$, donner une base de $\overrightarrow{E}$, puis donner une base affine de E.

Exercice 3 -

(1) Montrer que l'ensemble $E \subset \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 et vérifiant :

$$\int_0^1 P(x)dx = 1$$

est un sous-espace affine de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Donner un repère cartésien, puis un repère affine de E.

Exercice 4 - Soit $n \in \mathbb{N}$ et O le point $(0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. On considère l'espace affine

$$E = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 1\}.$$

(1) Donner la direction et la dimension de E.

(2) Soient $d \in \mathbb{N}$, $A_0, \ldots, A_d \in H$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$.
Démontrer que $O + \lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \cdots + \lambda_d\overrightarrow{OA_d} \in E$ si et seulement si $\lambda_0 + \cdots + \lambda_d = 1$.
Exprimer alors $O + \lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \cdots + \lambda_d\overrightarrow{OA_d}$ en fonction de A_0 et de $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_d}$.

Exercice 5 - On considère l'espace affine $E = \mathbb{R}^3$.

(1) Est-ce que les points $(1, -1, 1)$, $(2, -3, -1)$, $(0, -3, 3)$ sont alignés ?

(2) Est-ce que les points $(0,0,1)$, $(1,-1,2)$, $(2,1,0)$, $(3,0,1)$ sont coplanaires ?

(3) Déterminer l'ensemble des triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(0,0,1)$, $(1,-1,2)$, $(2,1,0)$, (a,b,c) soient coplanaires.

Exercice 6 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère les quatre points suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$A = (1,0,\lambda), \quad B = (2,-1,2\lambda), \quad C = (2,\lambda+2,\lambda+7), \quad D = (3,-2,2\lambda+2).$$

(1) À quelle condition sur λ les points A, B, C, D sont-ils affinement indépendants ?

(2) Dans les cas où A, B, C, D ne sont pas affinement indépendants, donner la dimension du sous-espace affine $E = \langle A, B, C, D\rangle$ qu'ils engendrent, ainsi qu'une équation cartésienne ou un système d'équations cartésiennes de ce sous-espace.

Exercice 7 - Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère les sous-ensembles F_1, F_2, F_3 de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z = 1 \text{ et } x-y-z = -1\}$$
$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x+y-z = 1 \text{ et } x+y+z = -1\}$$
$$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+az = b\}$$

(1) Déterminer la direction et la dimension de chacun des sous-espaces affines F_1, F_2, F_3 et $F_1 \cap F_3$.

(2) Déterminer la position relative de F_1 par rapport à F_2 et de F_1 par rapport à F_3.

Exercice 8 - Soit $\mathcal{R} = (\Omega, (e_1, e_2, e_3, e_4))$ un repère cartésien de $\mathbb{R}^4$. On considère les points suivants de $\mathbb{R}^4$ donnés par leur coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$:

point	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
coordonnées	$(1,0,-1,2)$	$(2,1,1,1)$	$(2,-1,1,3)$	$(3,0,3,2)$	$(1,2,-1,0)$

point	X_6	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
coordonnées	$(2,2,-1,0)$	$(1,-1,1,-1)$	$(3,-1,5,-1)$	$(3,0,3,-2)$	$(3,2,3,-4)$

Déterminer la direction de $\langle\{X_1, \ldots, X_6\}\rangle$ et démontrer que les sous-espaces affines $\langle\{X_1, \ldots, X_6\}\rangle$ et $\langle\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}\rangle$ sont parallèles.

Exercice 9 - Soient A, B, C, trois points non alignés d'un espace affine réel E.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des points ayant mêmes coordonnées dans les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est la droite passant par C et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

Exercice 10 - Soit E un espace affine réel.

(1) Soient $A, B \in E$. Soient $u, v \in \overrightarrow{E}$. On note M (resp. N) l'élément $A+u$ (resp. $B+v$). Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de A, B, u et v.

(2) Soient $A, B, C \in E$. On note I, J, K les milieux respectifs de (B,C), (C,A), (A,B). On note M pour $A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, N pour $B + \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ et P pour $C + \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$.
Démontrer que $M = N = P$. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice 11 - On se place dans l'espace affine $H = (\mathbb{F}_3)^2$ sur $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(1) Combien contient-il de points et de droites ?

(2) Étant donnés deux points M et N de H, le milieu de (M,N) est le point P tel que $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$. On considère les points $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ et $C = (0,2)$. Les médianes du triangle ABC sont-elles concourantes ?

Exercice 12 - Soit E un espace affine réel de dimension 3.
Soient $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ trois plans deux à deux non parallèles de E.

(1) Justifier que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ est une droite.

(2) On considère également les droites $\mathcal{D}_2 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3$ et $\mathcal{D}_3 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

   (a) Justifier que $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont parallèles ou sécantes.

   (b) Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont parallèles ou concourantes.

Exercice 13 - Soit E un espace affine de dimension 5 et soient F et G deux sous-espaces affines de E de dimension 3.

(1) Supposons $F \cap G \neq \varnothing$.

   (a) Justifier que $F \cap G$ est un sous-espace affine de E.

   (b) Montrer que $\dim(F \cap G) \in \{1, 2, 3\}$.

(2) Supposons $F \cap G = \varnothing$.

   (a) Montrer que $\dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) = 2$ ou $F /\!\!/ G$.

   (b) Dans $\mathbb{R}^5$, donner un exemple de deux sous-espaces affines de dimension 3 dont l'intersection est vide et dont l'intersection des directions est un plan vectoriel.

Exercice 14 - Soit E un espace affine réel de dimension 3.
Soient D_1 et D_2 deux droites affines de E non parallèles. Soit u un vecteur de $\overrightarrow{E}$ tel que u n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{D}_1$ et $\overrightarrow{D}_2$.
Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe une unique droite D de E dirigée par u et qui intersecte D_1 et D_2, c'est-à-dire telle que $D \cap D_1 \neq \emptyset$ et $D \cap D_2 \neq \emptyset$.

Soit P_1 le plan affine contenant D_1 et dont la direction contient u. Soit P_2 le plan affine contenant D_2 et dont la direction contient u.

(1) Quelle est la direction de P_1 ?

(2) Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

(3) On note $D = P_1 \cap P_2$. Montrer que D est une droite affine dirigée par $\mathrm{Vect}(u)$.

(4) Montrer que $D \cap D_1$ et $D \cap D_2$ sont des singletons.

(5) Soit D' une droite affine dirigée par u telle que $D' \cap D_1 \neq \emptyset$ et $D' \cap D_2 \neq \emptyset$. Démontrer que $D' = D$.

Exercice 15 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit l'espace affine $H = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 1\}$ de direction $\overrightarrow{H} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$.

(1) Démontrer que les sous-espaces affines de H sont les sous-ensembles de la forme $H \cap V$ où V parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{n+1}$ non contenus dans $\overrightarrow{H}$.

(2) Lorsque $n = 2$, soient $(x_1, x_2, 1)$, $(y_1, y_2, 1)$ et $(z_1, z_2, 1)$ trois points de $H \subset \mathbb{R}^3$. Démontrer qu'ils sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(3) Lorsque $n = 3$, soient $(x_1, x_2, x_3, 1)$, $(y_1, y_2, y_3, 1)$, $(z_1, z_2, z_3, 1)$ et $(t_1, t_2, t_3, 1)$ quatre points de $H \subset \mathbb{R}^4$. Démontrer qu'ils sont coplanaires si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_2 & t_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 16 - (Théorème de Menelaüs). Soit E un plan affine réel. Soient $A, B, C \in E$ non alignés. Soient $M \in (BC)\backslash\{B, C\}$, $N \in (CA)\backslash\{C, A\}$ et $P \in (AB)\backslash\{A, B\}$.

(1) Démontrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ tels que $M = B + \alpha\overrightarrow{BC}$, $N = C + \beta\overrightarrow{CA}$ et $P = A + \gamma\overrightarrow{AB}$.

(2) Justifier que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère cartésien de $\langle\{A, B, C\}\rangle$ et déterminer les coordonnées de M, N, P dans ce repère, en fonction de α, β, γ.

(3) Démontrer que M, N, P sont alignés si et seulement si :
$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \frac{\gamma}{1-\gamma} = -1.$$

Exercice 17 - (Espaces projectifs) Soient $\mathbb{K}$ un corps et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. L'*espace projectif de* V est l'ensemble $\mathbb{P}(V)$ des droites vectorielles de V. Sa dimension est $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$. On définit un *sous-espace projectif* de $\mathbb{P}(V)$ comme un sous-ensemble de la forme $\mathbb{P}(W)$ pour un certain sous-espace vectoriel W de V. On fixe finalement dans tout l'exercice un hyperplan affine H de V ne contenant pas 0.

(1) On considère l'application $i : H \to \mathbb{P}(V)$ qui envoie $u \in H$ sur $\mathbb{R}u \in \mathbb{P}(V)$.

(a) Montrer que i est injective.

Dans la suite de l'exercice, on identifiera H à un sous-ensemble de $\mathbb{P}(V)$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(V) \setminus H$ est un sous-espace projectif X_∞ de $\mathbb{P}(V)$. On explicitera son sous-espace vectoriel sous-jacent W_∞.

(2) On considère l'application Φ qui envoie un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$ sur son intersection avec H.

(a) Montrer que Φ induit une bijection entre les sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ non contenus dans X_∞ et les sous-espaces affines de V.

(b) Montrer que, pour tout sous-espace projectif X de $\mathbb{P}(V)$ non contenu dans X_∞, on a $\dim \Phi(X) = \dim X$.

(3) Soient X et Y deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$.

(a) Montrer qu'une intersection quelconque de sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$.

(b) Montrer qu'il existe un plus petit sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$ contenant X et Y. On le notera $\langle X \cup Y\rangle$.

(c) On suppose que X et Y ne sont pas contenus dans X_∞. Comparer $\Phi(\langle X \cup Y\rangle)$ et $\langle\Phi(X) \cup \Phi(Y)\rangle$.

(d) Montrer que :
$$\dim X + \dim Y = \dim(X \cap Y) + \dim\langle X \cup Y\rangle.$$
En déduire que si $\dim X + \dim Y \geq \dim \mathbb{P}(V)$, alors $X \cap Y \neq \emptyset$. Ainsi, par exemple, si $\dim V = 2$, deux droites projectives distinctes dans V s'intersectent toujours en un point.

(e) Relier l'égalité établie dans la question précédente à la proposition du cours permettant de calculer la dimension d'un sous-espace affine engendré par deux sous-espaces affines dans H.

Remarque : Souvent, des théorèmes de géométrie affine existent en deux versions différentes, selon que les sous-espaces affines qui interviennent soient parallèles ou non. Ces théorèmes peuvent généralement être énoncés de manière uniforme à l'aide de la géométrie projective.