GÉOMÉTRIE AFFINE ET EUCLIDIENNE

Cours de Licence 3

Diego Izquierdo

Université Paris Cité

Année 2025-2026

Table des matières

1 Espaces affines **3**
- 1.1 Définition d'un espace affine . . . 3
- 1.2 Premiers exemples . . . 5
- 1.3 Sous-espaces affines . . . 7
- 1.4 Parallélisme . . . 8
- 1.5 Position relative de sous-espaces affines . . . 11
- 1.6 Repères affines et coorodonnées . . . 15

2 Applications affines **17**
- 2.1 Définition et premiers exemples . . . 17
- 2.2 Quelques propriétés des applications affines . . . 21
  - 2.2.1 Comportement des sous-espaces affines . . . 21
  - 2.2.2 Composition et groupe affine . . . 23
  - 2.2.3 Points fixes . . . 25
- 2.3 Théorème de Thalès . . . 27

3 Barycentres **31**
- 3.1 Définition et premières applications . . . 31
- 3.2 Associativité du barycentre . . . 34
- 3.3 Caractérisations barycentriques des sous-espaces affines . . . 35
- 3.4 Caractérisations barycentriques des applications affines . . . 38
- 3.5 Convexité . . . 39
  - 3.5.1 Enveloppe convexe . . . 39
  - 3.5.2 Convexité et applications affines . . . 42

4 Espaces affines euclidiens **44**
- 4.1 Distance sur un espace affine affine euclidien . . . 44
- 4.2 Orthogonalité . . . 46
- 4.3 Sphères . . . 50
- 4.4 Applications affines dans un espace affine euclidien . . . 51
- 4.5 Repères dans un espace affine euclidien . . . 54

5 Groupes d'isométries **55**
5.1 Isométries affines et le groupe Isom(E) 55
5.2 Décomposition canonique des isométries affines 57
5.3 Classification en dimension 2 59
5.4 Classification en dimension 3 61
5.5 Groupes d'isométries laissant une partie invariante: l'exemple du groupe diédral 64
5.6 Angles dans un plan affine euclidien 65
5.6.1 Angles orientés entre vecteurs 65
5.6.2 Angles orientés entre droites 67
5.6.3 Quelques propriétés applications 69
5.7 Similitudes affines 77
5.7.1 Définition et groupe des similitudes 77
5.7.2 Similitudes planes et nombres complexes 80
5.7.3 Triangles isométriques et semblables 81

6 Coniques et quadriques **85**
6.1 Rappels sur les formes quadratiques 85
6.2 Coniques 86
6.2.1 Définition et classification 86
6.2.2 Description géométrique 89
6.3 Quadriques 99

A Tableau récapitulatif des coniques **105**

B Tableau récapitulatif des quadriques **107**

Chapitre 1

Espaces affines

Dans tout ce chapitre ainsi que les deux suivants, $\mathbb{K}$ désigne un corps fixé. En général, il n'y aura pas d'hypothèses sur ce corps. Bien sûr, on indiquera explicitement les quelques endroits où on a besoin de faire des hypothèses sur $\mathbb{K}$. Si cela est plus simple pour vous, vous pouvez supposer, tout au long de ce chapitre et même du cours, que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.1 Définition d'un espace affine

Dans cette section, on introduit la structure algébrique que nous allons étudier tout au long du cours: les espaces affines.

Définition 1.1.1

Un **espace affine** est un ensemble E muni d'une action simplement transitive d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\overrightarrow{E}$. On appelle $\overrightarrow{E}$ la **direction** de E, les éléments de E sont appelés **points** et ceux de $\overrightarrow{E}$ **vecteurs**.

Remarque 1.1.2. Si A désigne un point dans E et u un vecteur dans $\overrightarrow{E}$, le point obtenu en faisant agir u sur A est généralement noté $A+u$ plutôt que $u \cdot A$.

Proposition 1.1.3

Si $\overrightarrow{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, se donner un espace un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$ revient à se donner un ensemble E muni d'une application:

$$\begin{aligned} \Phi : E \times E &\to \overrightarrow{E} \\ (A, B) &\mapsto \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes:

1. Pour tout $A \in E$, l'application:

$$\begin{aligned} \Phi_A : E &\to \overrightarrow{E} \\ B &\mapsto \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

   est une bijection;

2. (Relation de Chasles) Pour tous $A, B, C \in E$, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Preuve. Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$. Comme l'action de $\overrightarrow{E}$ sur E est simplement transitive, pour chaque $A, B \in E$, il existe un unique vecteur $u \in \overrightarrow{E}$ tel que $B = A + u$. On le note $\overrightarrow{AB}$ et on définit $\Phi : E \to E$ par $\Phi(A, B) = \overrightarrow{AB}$. Vérifions maintenant les conditions 1 et 2.

1. Soit $A \in E$. On définit:

$$\begin{aligned} \Psi_A : \overrightarrow{E} &\to E \\ u &\mapsto A + u. \end{aligned}$$

   On calcule alors

$$\begin{aligned} \Psi_A(\Phi_A(B)) = \Psi_A(\overrightarrow{AB}) = A + \overrightarrow{AB} = B, \\ \Phi_A(\Psi_A(u)) = \Phi_A(A + u) = u. \end{aligned}$$

   Donc Φ_A et Ψ_A sont réciproques l'une de l'autre et Φ_A est bien bijective.

2. Soient $A, B, C \in E$. Par définition d'une action de groupes, on a:

$$A + \overrightarrow{AC} = C = B + \overrightarrow{BC} = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).$$

   En appliquant Φ_A, on obtient $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Réciproquement, soit E un ensemble muni d'une application $\Phi : E \times E \to \overrightarrow{E}$ vérifiant les conditions 1 et 2. On définit l'application:

$$\begin{aligned} \theta : \overrightarrow{E} \times E &\to E \\ (u, A) &\mapsto \Phi_A^{-1}(u). \end{aligned}$$

Vérifions qu'il s'agit d'une action de $\overrightarrow{E}$ sur E. Pour ce faire, on commence par remarquer que, pour $A \in E$, la relation de Chasles implique que $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}$ et donc que $\overrightarrow{AA} = 0$. Du coup:

$$\theta(0, A) = \Phi_A^{-1}(0) = A.$$

De plus, étant donnés $u, v \in \overrightarrow{E}$ et $A \in E$, on pose $B = \Phi_A^{-1}(v)$ et $C = \Phi_B^{-1}(u)$, de sorte que $\theta(v, A) = B$ et $\theta(u, \theta(v, A)) = C$. On a alors $v = \overrightarrow{AB}$ et $u = \overrightarrow{BC}$, et donc par la relation de Chasles:

$$u + v = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

On déduit que $\theta(u + v, A) = C = \theta(u, \theta(v, A))$. Cela prouve bien que θ est une action de $\overrightarrow{E}$ sur E. La condition 1 dit alors exactement que cette action est simplement transitive. Elle munit donc E d'une structure d'espace affine. □

Ainsi, afin de prouver qu'un ensemble est muni d'une structure d'espace affine, vous pouvez au choix utiliser la Définition 1.1 ou la caractérisation des espaces affines donnée par la Proposition 1.1.3. La notation $\overrightarrow{AB}$ pourra être librement utilisée dans la suite. Elle jouit des propriétés élémentaires suivantes (qu'on laisse en exercice):

(i) Pour $A, B \in E$, on a $\overrightarrow{AB} = 0$ si, et seulement si, $A = B$.

(ii) Pour $A, B \in E$, on a $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

(iii) Pour $A \in E$ et $u, v \in \overrightarrow{E}$, on a $A + u = A + v$ si, et seulement si, $u = v$.

(iv) Pour $A, B \in E$ et $u \in \overrightarrow{E}$, on a $A + u = B + u$ si, et seulement si, $A = B$.

Définition 1.1.4

La **dimension** d'un espace affine est la dimension de sa direction. Une **droite affine** est un espace affine de dimension 1. Un **plan affine** est un espace affine de dimension 2.

1.2 Premiers exemples

Il est important d'avoir en tête quelques exemples classiques d'espaces affines.

Exemple 1.2.1. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En le faisant agir sur lui-même par translation (à gauche ou à droite, cela n'a pas d'importance vu que V est un groupe abélien):

$$V \times V \to V$$
$$(v, w) \mapsto v + w,$$

on obtient une action simplement transitive. Cela permet de voir V comme un espace affine de direction $\overrightarrow{V} = V$. Avec le langage de la Proposition 1.1.3, étant donnés $u, v \in V$, on a $\overrightarrow{uv} = v - u$. L'application $\Phi_u : V \to V, w \mapsto \overrightarrow{uw} = w - u$ est bien bijective et on a la relation de Chasles:

$$\forall u, v, w \in V,\ \overrightarrow{uw} = w - u = (w - v) + (v - u) = \overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw}.$$

Exemple 1.2.2. Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et W un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel. On fixe $u \in V$ et on pose:

$$u + W := \{u + w : w \in W\}.$$

On peut munir cet ensemble d'une action de W:

$$W \times (u + W) \to u + W$$
$$(w, u + w') \mapsto u + w + w'.$$

On vérifie aisément que cette action est simplement transitive. Elle munit donc $u + W$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace affine de direction W. On remarquera que $u + W$ n'est pas en général un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de V.

Exemple 1.2.3. Fixons $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $u \in \mathbb{K}^n$ et considérons le système d'équations $Ax = u$, avec $x \in \mathbb{K}^n$. Supposons que l'ensemble E des solutions soit non vide. Alors on a $E = x_0 + E_0$ où $x_0 \in \mathbb{K}^n$ est une solution particulière et E_0 est l'ensemble des solutions du système homogène associé $Ax = 0$. Bien sûr, E_0 est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Du coup, d'après l'exemple précédent, E est un espace affine de direction E_0.

Exemple 1.2.4. Fixons des fonctions $a_0, \ldots, a_{n-1}, b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et considérons l'équation différentielle linéaire:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

D'après le Théorème de Cauchy-Lipshitz linéaire, il existe une solution de classe $\mathscr{C}^n$ à cette équation. Notons-la y_0. L'ensemble E des solutions de classe C^n est alors $y_0 + E_0$ où E_0 est l'ensemble des solutions de classe C^n de l'équation différentielle homogène associée:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Bien sûr, E_0 est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Du coup, d'après l'exemple 1.2.2, E est un espace affine de direction E_0.

1.3 Sous-espaces affines

À chaque fois que l'on définit des structures algébriques, ils est important de définir des sous-structures. Nous allons donc maintenant définir les sous-espaces affines d'un espace affine.

Définition 1.3.1

Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$. Un **sous-espace affine** de E est un sous-ensemble de E de la forme $A+V := \{A+v : v \in V\}$ où A est un point de E et V un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$.

Remarque 1.3.2. Soit $F = A+V$ un sous-espace affine de E. L'action de $\overrightarrow{E}$ sur E induit par restriction une action de V sur F, qui est toujours simplement transitive. Ainsi, F est naturellement un espace affine de direction $\overrightarrow{F} = V$. En particulier, $F = B+V$ pour tout $B \in F$.

Exemple 1.3.3. Les sous-espaces affines de dimension 0 d'un espace affine sont les points.

Exemple 1.3.4. Prenons les notations de l'exemple 1.2.2 et munissons l'espace vectoriel V de la structure d'espace affine donnée par l'exemple 1.2.1. L'espace affine $u+W$ est alors un sous-espace affine de V. En particulier, dans l'exemple 1.2.3 (resp. 1.2.4), l'espace affine E est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$ (resp. de $\mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$).

Exemple 1.3.5. Soit $f : V \to W$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $w \in \mathrm{im}(f)$. En fixant $v \in V$ tel que $f(v) = w$, on voit que $f^{-1}(\{w\}) = v+\ker(f)$. Du coup, $f^{-1}(\{w\})$ est un sous-espace affine de V de direction $\ker(f)$.

Proposition 1.3.6

Soient E un espace affine et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines. Alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{E}_i$.

Preuve. Supposons que $\bigcap_{i\in I} E_i$ soit non vide et fixons un point $A \in \bigcap_{i\in I} E_i$. Pour $B \in E$, on a alors:

$$B \in \bigcap_{i\in I} E_i \Leftrightarrow \left(\forall i \in I, \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{E}_i\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{E}_i \Leftrightarrow B \in A + \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{E}_i.$$

Cela prouve que E_i est un sous-espace affine de E de direction $\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{E}_i$. □

Définition 1.3.7

Soit S une partie non vide d'un espace affine E. L'intersection de tous les sous-espaces affines de E contenant S est un sous-espace affine. C'est le plus petit sous-espace affine contenant S. On l'appelle le **sous-espace affine engendré par** S et on le note $\langle S \rangle$.

Exemple 1.3.8. Soient A et B deux points distincts de E. Alors $\langle A, B \rangle$ est la droite $A + \mathbb{K}\overrightarrow{AB}$. C'est en fait la seule droite passant par A et B. En effet, si Δ est une telle droite, $\overrightarrow{\Delta}$ doit contenir $\overrightarrow{AB}$ et comme $\dim \overrightarrow{\Delta} = 1$, on doit avoir $\overrightarrow{\Delta} = \mathbb{K}\overrightarrow{AB}$. Du coup, $\Delta = A + \mathbb{K}\overrightarrow{AB}$. La droite passant par A et B est généralement notée (AB).

1.4 Parallélisme

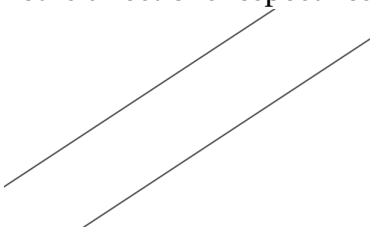
En algèbre linéaire, tous les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné s'intersectent en 0. En géométrie affine, la situation est très différente: deux sous-espaces affines peuvent tout à fait être disjoints. Par exemple, dans le plan, deux droites qui ne s'intersectent pas (ou qui sont confondues) sont dites parallèles. Dans cette section, nous allons justement introduire la notion de parallélisme dans un espace affine quelconque. C'est une notion fondamentale en géométrie.

Définition 1.4.1

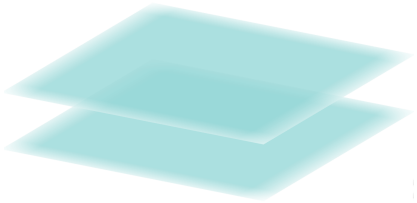
Soit E un espace affine. Deux sous-espaces affines F et G de E sont dits **parallèles** si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$ ou $\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{F}$. On note $F /\!/ G$.

Exemple 1.4.2. Soit $f : V \to W$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Les $f^{-1}(\{w\})$ pour $w \in \mathrm{im}(f)$ sont tous parallèles, puisqu'ils ont tous la même direction $\ker(f)$.

Exemple 1.4.3. Considérons deux droites Δ et Δ' dans le plan $\mathbb{R}^2$, données par des équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. Leurs directions respectives sont les droites vectorielles d'équations $ax + by = 0$ et $a'x + b'y = 0$. Les droites Δ et Δ' sont parallèles si, et seulement si, les droites vectorielles $\overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{\Delta'}$ coïncident. Cela revient à dire que $ab' = a'b$.



Exemple 1.4.4. Considérons deux plans Π et Π' dans l'espace $\mathbb{R}^3$ donnés par des équations $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$. Leurs directions respectives sont les plans vectoriels d'équations $ax+by+cz=0$ et $a'x+b'y+c'z=0$. Les plans Π et Π' sont parallèles si, et seulement si, les plans vectoriels $\overrightarrow{\Pi}$ et $\overrightarrow{\Pi'}$ coïncident. Cela revient à dire que les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont colinéaires.



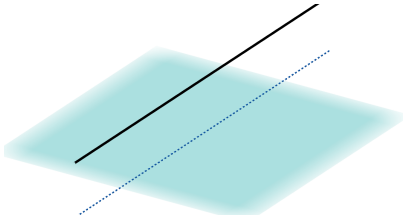
Exemple 1.4.5. Considérons un plan Π et une droite Δ dans l'espace donnés respectivement par l'équation $ax+by+cz+d=0$ et le système

$$\begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0. \end{cases}$$

Leurs directions respectives sont le plan vectoriel $\overrightarrow{\Pi}$ d'équation $ax+by+cz=0$ et la droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$ d'équation:

$$\begin{cases} a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0. \end{cases}$$

Le plan Π et la droite Δ sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{\Delta} \subset \overrightarrow{\Pi}$.



Remarque 1.4.6. Attention, le parallélisme n'est pas une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-espaces affines de E si $\dim E > 1$. En effet, prenons deux droites Δ et Δ' dans E ainsi qu'un point $P \in E$. Le point P est alors parallèle à Δ et Δ', alors que Δ et Δ' ne sont pas nécessairement parallèles.

Par contre, si l'on fixe un entier $0 \leq r \leq \dim E$ et on considère $\mathscr{C}_r$ l'ensemble des sous-espaces affines de E de dimension r, alors le parallélisme est bien une relation d'équivalence sur $\mathscr{C}_r$. En effet, dire que deux éléments F et G de $\mathscr{C}_r$ sont parallèles revient à dire que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$. La réflexivité, la symétrie et la transitivité se vérifient alors aisément.

On conclut cette section sur le parallèlisme en introduisant les parallélogrammes.

Proposition 1.4.7

On suppose ici que $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2 (par exemple, on pourra prendre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Soient A, B, C, D quatre points dans un espace affine E sur $\mathbb{K}$. Soient I et J les milieux de A et C et de B et D, c'est-à-dire les points tels que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BJ}$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

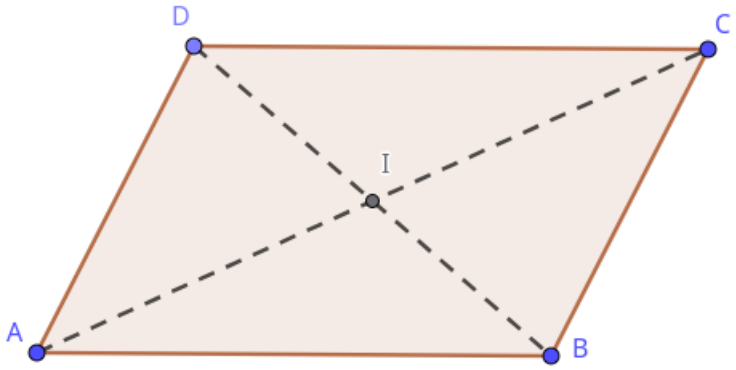
(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,

(ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$,

(iii) $I = J$.

Si A, B, C, D sont deux à deux distincts et non alignés, alors les assertions précédentes sont aussi équivalentes à:

(iv) $(AB) /\!/ (CD)$ et $(AD) /\!/ (BC)$.



Preuve. Supposons (i). Alors:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC},$$

d'où (ii).

Supposons (ii). On a:

$$2\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

d'où (iii).

Supposons (iii). Alors:

$$2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC},$$

d'où (i).

On vient donc de prouver que (i), (ii) et (iii) sont équivalentes. Bien sûr, lorsque A, B, C, D sont deux à deux distincts et non alignés, (i) et (ii) impliquent (iv). Reste à montrer que (iv) implique (i). Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^\times$ tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \mu\overrightarrow{BC}$. Ainsi:

$$\lambda\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + (\mu - 1)\overrightarrow{BC},$$

et donc:

$$(\lambda - 1)\overrightarrow{DC} = (\mu - 1)\overrightarrow{BC}.$$

Comme A, B, C, D ne sont pas alignés, on doit avoir $\lambda = \mu = 1$, d'où (i). □

Définition 1.4.8

Lorsque les assertions de la proposition précédente sont vérifiées, on dit que $ABCD$ est un **parallélogramme**.

1.5 Position relative de sous-espaces affines

Afin de mieux comprendre quelles sont les positions relatives possibles entre sous-espaces affines, il convient d'étudier la dimension d'une intersection de sous-espaces affines. On a pour cela la proposition suivante:

Proposition 1.5.1

Soient E un espace affine et F et G deux sous-espaces affines. On fixe deux points $A \in F$ et $B \in G$, et on pose $H = \langle F \cup G \rangle$.

1. La direction de H est $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} + \mathbb{K}\overrightarrow{AB}$.
2. On a les équivalences suivantes:

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} \Leftrightarrow F \cap G \neq \emptyset.$$

3. Supposons que E est de dimension finie. Alors:

$$\dim H = \begin{cases} \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) & \text{si } F \cap G \neq \emptyset, \\ \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) + 1 & \text{si } F \cap G = \emptyset. \end{cases}$$

Preuve. 1. Bien sûr, $\overrightarrow{H}$ contient $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$ et $\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{H}$ contient $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} + \mathbb{K}\overrightarrow{AB}$. Réciproquement, considérons l'espace affine $H' = A + (\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} + \mathbb{K}\overrightarrow{AB})$. Cet espace affine contient $F = A + \overrightarrow{F}$ ainsi que $G = B + \overrightarrow{G} = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{G}$. On déduit que $H \subset H'$, puis que $\overrightarrow{H} \subset \overrightarrow{H'} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} + \mathbb{K}\overrightarrow{AB}$. On conclut que $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} + \mathbb{K}\overrightarrow{AB}$.

2. La première équivalence découle immédiatement de 1. Montrons la deuxième. Supposons d'abord que $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$. On écrit donc $\overrightarrow{AB} = u + v$ avec $u \in \overrightarrow{F}$ et $v \in \overrightarrow{G}$. On a alors:

$$A + u = A + \overrightarrow{AB} - v = B - v \in F \cap G.$$

Donc $F \cap G \neq \emptyset$.

Réciproquement, supposons que $F \cap G \neq \emptyset$, et prenons $C \in F \cap G$. Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$.

3. Supposons d'abord que $F \cap G \neq \emptyset$. Par 2, on a $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$, de sorte que:

$$\begin{aligned} \dim H &= \dim \overrightarrow{H} \\ &= \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} + \mathbb{K}\overrightarrow{AB}) \\ &= \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) \\ &= \dim \overrightarrow{F} + \dim \overrightarrow{G} - \dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) \\ &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $F \cap G = \emptyset$. Par 2, on a $\overrightarrow{AB} \notin \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$, de sorte que:

$$\begin{aligned} \dim H &= \dim \overrightarrow{H} \\ &= \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} + \mathbb{K}\overrightarrow{AB}) \\ &= \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) + 1. \end{aligned}$$

□

La proposition précédente permet d'étudier la position relative de sous-espaces affines dans un espace affine de dimension 2 ou 3:

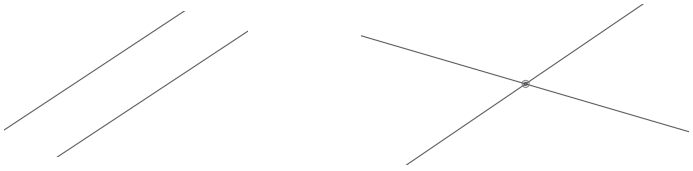
Corollaire 1.5.2

1. Soit E un plan affine et soient Δ et Δ' deux droites. Alors soit Δ et Δ' sont parallèles, soit $\Delta \cap \Delta'$ est un singleton.
2. Soit E un espace affine de dimension 3. Soient Π et Π' deux plans affines dans E et Δ et Δ' deux droites affines dans E. Alors:
   (a) Soit Π et Π' sont parallèles, soit $\Pi \cap \Pi'$ est une droite affine.
   (b) Soit Π et Δ sont parallèles, soit $\Pi \cap \Delta$ est un singleton.
   (c) Soit Δ et Δ' sont parallèles, soit $\Delta \cap \Delta'$ est un singleton, soit $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ et il n'existe pas de plan contenant Δ et Δ' en même temps.

Preuve. 1. Soit $H = \langle \Delta \cup \Delta' \rangle$ et supposons que Δ et Δ' ne sont pas parallèles. Alors $\overrightarrow{H} \supset \overrightarrow{\Delta} + \overrightarrow{\Delta'} = \overrightarrow{E}$, donc nécessairement $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\Delta} + \overrightarrow{\Delta'} = \overrightarrow{E}$. On déduit que $\Delta \cap \Delta' \neq \emptyset$, puis que:

$$\dim(\Delta \cap \Delta') = \dim \Delta + \dim \Delta' - \dim H = 1 + 1 - 2 = 0.$$

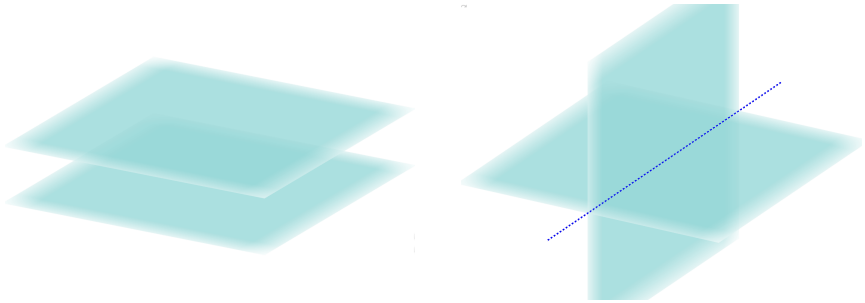
Autrement dit, $\Delta \cap \Delta'$ est un singleton.



2. (a) Soit $H = \langle \Pi \cup \Pi' \rangle$ et supposons que Π et Π' ne sont pas parallèles. Alors $\overrightarrow{H} \supset \overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{\Pi'} = \overrightarrow{E}$, donc nécessairement $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{\Pi'} = \overrightarrow{E}$. On déduit que $\Pi \cap \Pi' \neq \emptyset$, puis que:

$$\dim(\Pi \cap \Pi') = \dim \Pi + \dim \Pi' - \dim H = 2 + 2 - 3 = 1.$$

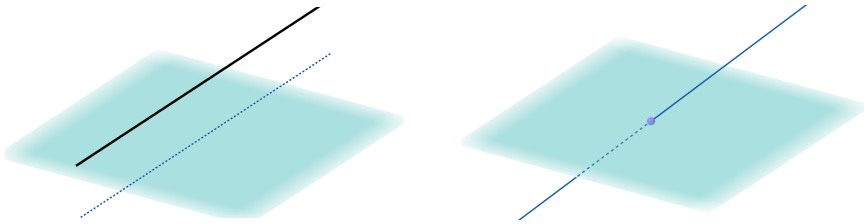
Autrement dit, $\Pi \cap \Pi'$ est une droite affine.



(b) Soit $H = \langle \Pi \cup \Delta \rangle$ et supposons que Π et Δ ne sont pas parallèles. Alors $\overrightarrow{H} \supset \overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{E}$, donc nécessairement $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{E}$. On déduit que $\Pi \cap \Delta \neq \emptyset$, puis que:

$$\dim(\Pi \cap \Delta) = \dim \Pi + \dim \Delta - \dim H = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Autrement dit, $\Pi \cap \Delta$ est un singleton.



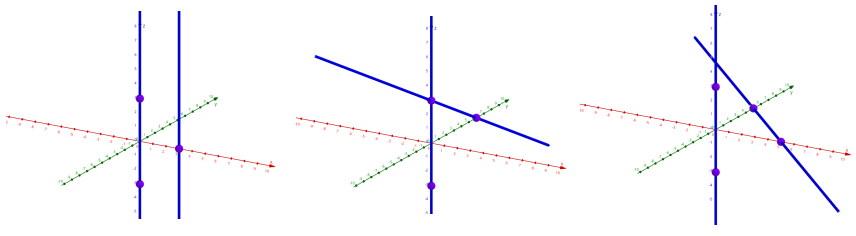
(c) Soit $H = \langle \Delta \cup \Delta' \rangle$ et supposons que Δ et Δ' ne sont pas parallèles. En fixant des points $A \in \Delta$ et $A' \in \Delta'$, on a $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\Delta} + \overrightarrow{\Delta'} + \mathbb{K}\overrightarrow{AA'}$. Deux cas se présentent alors:

i. *Premier cas:* $\overrightarrow{AA'} \notin \overrightarrow{\Delta} + \overrightarrow{\Delta'}$. Dans ce cas, $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$.

ii. *Second cas:* $\overrightarrow{AA'} \in \overrightarrow{\Delta} + \overrightarrow{\Delta'}$. Dans ce cas, $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\Delta} + \overrightarrow{\Delta'}$, et donc $\Delta \cap \Delta' \neq \emptyset$ et $\dim H = 2$. On déduit que:

$$\dim(\Delta \cap \Delta') = \dim \Delta + \dim \Delta' - \dim H = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Autrement dit, $\Delta \cap \Delta'$ est un singleton.



□

1.6 Repères affines et coordonnées

Nous terminons ce chapitre en introduisant des coordonnées dans les espaces affines.

Proposition 1.6.1

Soient E un espace affine et $A_0, \dots, A_n$ des points de E. On considère $F = \langle A_0, \dots, A_n \rangle$. La direction de F est $\overrightarrow{F} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$. En particulier, l'espace affine F est de dimension au plus n, avec égalité si, et seulement si, la famille $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est libre.

Preuve. Soit $V = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$. On a bien sûr $V \subset \overrightarrow{F}$. Réciproquement, $A_0 + V$ est un espace affine contenant F, donc V contient $\overrightarrow{F}$. On conclut que $V = \overrightarrow{F}$. □

Définition 1.6.2

Soit E un espace affine et soient $A_0, \dots, A_n$ des points de E. On dit que $(A_0, \dots, A_n)$ sont **affinement indépendants** si $\dim\langle A_0, \dots, A_n \rangle = n$ (ou de manière équivalente si la famille $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est libre).

Remarque 1.6.3. Une manière simple de construire des points affinement indépendants consiste à procéder de manière inductive: on part d'un point A_0, puis on choisit un point $A_1 \neq A_0$, puis un point A_2 qui n'est pas dans la droite passant par A_0 et A_1, puis un point A_3 qui n'est pas dans le plan passant par A_0, A_1 et A_2, et ainsi de suite.

Définition 1.6.4

Soit E un espace affine de dimension finie n.

1. Une famille de $n+1$ points affinement indépendants dans E est appelée **repère affine** ou **base affine** de E.
2. Une famille $(O, e_1, \dots, e_n)$ constituée d'un point O de E et d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\overrightarrow{E}$ est appelée **repère cartésien** de E.

C'est équivalent de se donner un repère affine ou un repère cartésien de E. En effet, si $(A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine, alors $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien, et réciproquement, si $(O, e_1, \dots, e_n)$ est un repère cartésient,

alors $(O, O+e_1, \ldots, O+e_n)$ est un repère affine.

Les répères affines ou cartésiens permettent de munir E de coordonnées:

Définition 1.6.5

Soit $(O, e_1, \ldots, e_n)$ un repère cartésien d'un espace affine E de dimension n. Pour tout point A de E, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que:

$$\overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

On dit que les **coordonnées** de A dans le repère $(O, e_1, \ldots, e_n)$ sont $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Chapitre 2

Applications affines

On note toujours $\mathbb{K}$ un corps fixé.

2.1 Définition et premiers exemples

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit les espaces affines. Comme on le fait souvent en algèbre, une fois que l'on a introduit une nouvelle structure algébrique, il convient de définir des applications qui la respectent. Dans ce chapitre, nous allons donc nous intéresser aux applications affines.

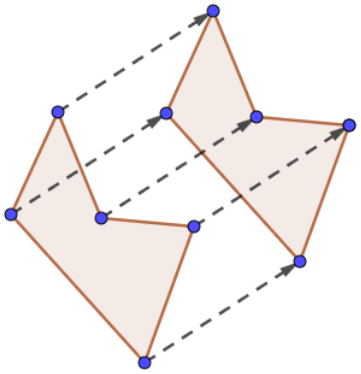
Définition 2.1.1

Soient E et F deux espaces affines et soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une **application affine** s'il existe une application linéaire $\varphi : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ telle que $f(A+u) = f(A) + \varphi(u)$ pour tout $A \in E$ et tout $u \in \overrightarrow{E}$. Cette application linéaire φ est uniquement déterminée, on l'appelle la **partie linéaire de** f, et on la note $\overrightarrow{f}$.

Exemple 2.1.2. Les applications affines de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ sont les applications de la forme $x \mapsto ax + b$ pour certains $a, b \in \mathbb{K}$ fixés. Plus généralement, les applications affines de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^m$ sont les applications de la forme $X \mapsto AX + B$ avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^m$.

Exemple 2.1.3. Soient E un espace affine et $u \in \overrightarrow{E}$. On définit l'application:

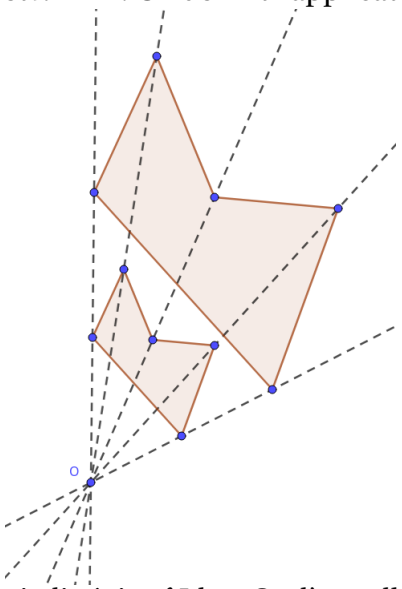
$$\begin{aligned}\tau_u : E &\to E\\ A &\mapsto A+u.\end{aligned}$$



Pour tout $A \in E$ et tout $w \in \overrightarrow{E}$, on a $\tau_u(A+w) = A+u+w = \tau_u(A)+w$. Donc τ_u est une application affine de partie linéaire $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$. On l'appelle la **translation de vecteur** u. On a $\tau_0 = \mathrm{Id}_E$ et $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$ pour tout $u, v \in \overrightarrow{E}$. En particulier, τ_u est bijective d'inverse τ_{-u}.

Exemple 2.1.4. Soient E un espace affine, $\Omega \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}^\times$. On définit l'application:

$$\begin{aligned}h_{\Omega,\lambda} : E &\to E\\ A &\mapsto \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega A}.\end{aligned}$$



Étant donnés $A \in E$ et $u \in \overrightarrow{E}$, on pose $B = A+u$. On a alors:

$$\begin{aligned}h_{\Omega,\lambda}(A+u) &= \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega B}\\ &= \Omega + \lambda(\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AB})\\ &= \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega A} + \lambda u\\ &= h_{\Omega,\lambda}(A) + \lambda u.\end{aligned}$$

Donc $h_{\Omega,\lambda}$ est une application affine de partie linéaire $\lambda\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$. On l'appelle l'**homothétie de centre Ω et de rapport λ**. On a $h_{\Omega,1} = \mathrm{Id}_E$, et étant donnés $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^\times$ et $A \in E$, on calcule

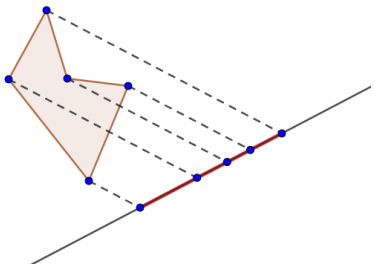
$$\begin{aligned}(h_{\Omega,\lambda} \circ h_{\Omega,\mu})(A) &= \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega h_{\Omega,\mu}(A)}\\ &= \Omega + \lambda\mu\overrightarrow{\Omega A}\\ &= h_{\Omega,\lambda\mu}(A).\end{aligned}$$

Du coup, $h_{\Omega,\lambda} \circ h_{\Omega,\mu} = h_{\Omega,\lambda\mu}$. En particulier, $h_{\Omega,\lambda}$ est bijective d'inverse $h_{\Omega,\lambda^{-1}}$.

Exemple 2.1.5.
Soient E un espace affine et F un sous-espace affine. Soit V un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus V$. D'après la Proposition 1.5.1, pour $A \in E$, l'in-

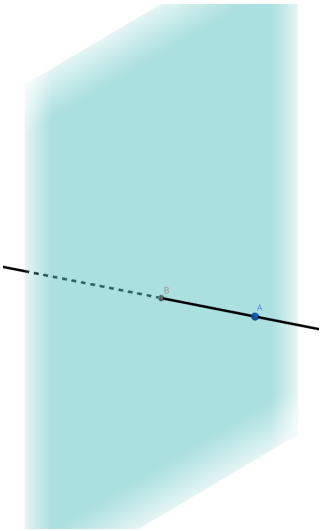
tersection $F \cap (A+V)$ est un espace affine de dimension $\dim F + \dim(A+V) - \dim E = 0$. C'est donc un singleton. On peut du coup définir une application:

$$\begin{aligned} \pi_{F,V} : E &\to E \\ A &\mapsto F \cap (A+V). \end{aligned}$$



Prenons $A \in E$ et $u \in \overrightarrow{E}$. On peut décomposer $u = v + w$ avec $v \in V$ et $w \in \overrightarrow{F}$. On a alors:

$$\begin{aligned} \pi_{F,V}(A+u) &= F \cap (A+u+V) = F \cap (A+w+V) \\ &= ((F-w) \cap (A+V)) + w \\ &= (F \cap (A+V)) + w = \pi_{F,V}(A) + w. \end{aligned}$$



Cela montre que $\pi_{F,V}$ est une application affine de partie linéaire la projection de $\overrightarrow{E}$ sur $\overrightarrow{F}$ le long de V. On dit que $\pi_{F,V}$ est la **projection de E sur F le long de V**. On vérifie immédiatement que:

$$\mathrm{im}(\pi_{F,V}) = F = \{A \in E : \pi_{F,V}(A) = A\}.$$

En particulier, $\pi_{F,V}^2 = \pi_{F,V}$.

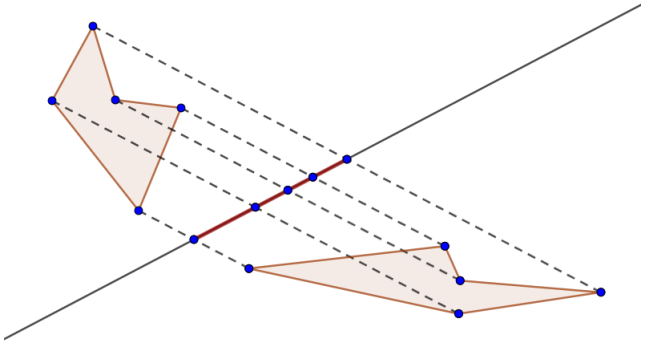
Exemple 2.1.6. Soient E un espace affine et F un sous-espace affine. Soit V un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus V$. On définit:

$$\begin{aligned} s_{F,V} : E &\to E \\ A &\mapsto A + 2\overrightarrow{A\pi_{F,V}(A)}. \end{aligned}$$

Pour $A \in E$ et $u \in \overrightarrow{E}$, notons $B = A + u$ et calculons

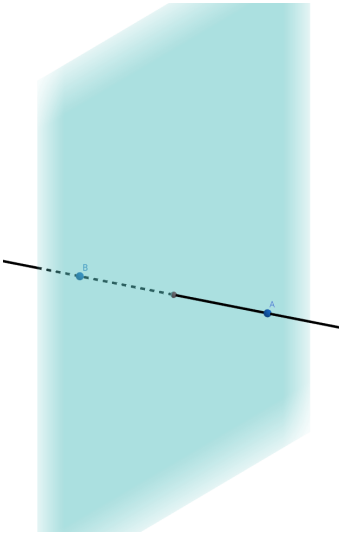
$$\begin{aligned} s_{F,V}(A+u) &= A + u + 2\overrightarrow{B\pi_{F,V}(B)} \\ &= A + u + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\pi_{F,V}(A)} + \overrightarrow{\pi_{F,V}(A)\pi_{F,V}(B)}) \\ &= A + u + 2(-u + \overrightarrow{A\pi_{F,V}(A)} + \overrightarrow{\pi}_{F,V}(\overrightarrow{AB})) \\ &= s_{F,V}(A) - u + 2\overrightarrow{\pi}_{F,V}(u). \end{aligned}$$

Cela montre que $s_{F,V}$ est une application affine de partie linéaire la symétrie de $\overrightarrow{E}$ par rapport à $\overrightarrow{F}$ le long de V. On dit que $s_{F,V}$ est la **symétrie de E sur F le long de V**.



On vérifie immédiatement que:

$$\{A \in E : s_{F,V}(A) = A\} = F.$$



De plus, pour $A \in E$:

$$\begin{aligned} s_{F,V}^2(A) &= s_{F,V}(A + 2\overrightarrow{A\pi_{F,V}(A)}) \\ &= s_{F,V}(A) + 2\overrightarrow{s}_{F,V}(\overrightarrow{A\pi_{F,V}(A)}) \\ &= s_{F,V}(A) - 2\overrightarrow{A\pi_{F,V}(A)} \\ &\qquad\qquad (\text{car } \overrightarrow{A\pi_{F,V}(A)} \in V) \\ &= A + 2\overrightarrow{A\pi_{F,V}(A)} - 2\overrightarrow{A\pi_{F,V}(A)} \\ &= A. \end{aligned}$$

Donc $s_{F,V}^2 = \mathrm{Id}_E$. En particulier, $s_{F,V}$ est bijective.

De manière plus générale, voici deux méthodes pratiques pour construire des applications affines:

Proposition 2.1.7

1. Soient E et F deux espaces affines, A un point de E, B un point de F et $\varphi : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ une application linéaire. Il existe une unique application affine $f : E \to F$ telle que $f(A) = B$ et $\overrightarrow{f} = \varphi$. Elle est définie par $f(C) = B + \varphi(\overrightarrow{AC})$ pour $C \in E$.

2. Soient E et F deux espaces affines et $(A_0, \ldots, A_n)$ une base affine de E. Pour chaque $(B_0, \ldots, B_n) \in F^{n+1}$, il existe une unique application affine $f : E \to F$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour chaque $0 \leq i \leq n$.

Preuve. 1. Soit f une application affine telle que $f(A) = B$ et $\overrightarrow{f} = \varphi$. Comme

f est affine, on a pour $C \in F$:

$$f(C) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AC}) = B + \varphi(\overrightarrow{AC}).$$

Reste à vérifier que cette formule définit bien une fonction affine telle que $f(A) = B$ et $\overrightarrow{f} = \varphi$. L'égalité $f(A) = B$ est évidente, et pour $C \in E$ et $u \in \overrightarrow{E}$, on pose $D = C + u$ et on calcule:

$$f(C+u) = B + \varphi(\overrightarrow{AD}) = B + \varphi(\overrightarrow{AC} + u) = B + \varphi(\overrightarrow{AC}) + \varphi(u) = f(C) + \varphi(u).$$

2. Comme $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de $\overrightarrow{E}$, il existe une unique application linéaire $\varphi : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ telle que $\varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}$ pour chaque i. Une application affine $f : E \to F$ envoie alors chaque A_i sur B_i si, et seulement si, $f(A_0) = B_0$ et $\overrightarrow{f} = \varphi$. La partie 1 de la proposition implique donc l'existence et l'unicité d'une telle application affine.

□

2.2 Quelques propriétés des applications affines

Cette section est dédiée aux propriétés élémentaires des applications affines.

2.2.1 Comportement des sous-espaces affines

Proposition 2.2.1

Soient E et F deux espaces affines et soit $f : E \to F$ une application affine.

1. L'image d'un sous-espace affine E' de E est un sous-espace affine de F de direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{E'})$.
2. L'image réciproque d'un sous-espace affine F' de F est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{F'})$.

Preuve. 1. Soit $A \in E'$, de sorte que $E' = A + \overrightarrow{E'}$. Par définition d'une application affine:

$$f(E') = f(A + \overrightarrow{E'}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{E'}).$$

Ainsi, $f(E')$ est bien un sous-espace affine de F de direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{E'})$.

2. Supposons que $f^{-1}(F') \neq \emptyset$, et donnons-nous $A \in f^{-1}(F')$. Pour $B \in E$, on a:

$$B \in f^{-1}(F') \Leftrightarrow f(B) \in F' \Leftrightarrow f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) \in F'$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) \in \overrightarrow{F'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{F'}) \Leftrightarrow B \in A + \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{F'}).$$

On déduit que $f^{-1}(F')$ est bien un sous-espace affine de E de direction $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{F'})$.

□

De la proposition précédente, on déduit que l'injectivité et la surjectivité d'une application affine se lisent dans sa partie linéaire:

Corollaire 2.2.2

Une application affine est injective (resp. surjective, resp. bijective) si, et seulement si, sa partie linéaire est injective (resp. surjective, resp. bijective).

Preuve. Soit $f : E \to F$ une application affine. Par la proposition précédente, pour $B \in \text{im}(f)$, l'image réciproque $f^{-1}(B)$ est un sous-espace affine de direction $\ker(\overrightarrow{f})$. C'est donc un singleton si, et seulement si, $\ker(\overrightarrow{f}) = 0$. Autrement dit, f est injective si, et seulement si, $\overrightarrow{f}$ est injective.

Par ailleurs, $f(E)$ est un sous-espace affine de F de direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{E})$. On a donc $f(E) = F$ si, et seulement si, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{F}$. Autrement dit, f est surjective si, et seulement si, $\overrightarrow{f}$ est surjective. □

La Proposition 2.2.1 implique notamment que les images de trois points alignés (resp. quatre points coplanaires) par une application affine sont alignés (resp. coplanaires). Il existe une réciproque partielle à cet énoncé:

Théorème 2.2.3 (Théorème fondamental de la géométrie affine)

On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit E un espace affine sur $\mathbb{K}$ de dimension au moins 2. Soit $f : E \to E$ une bijection qui envoie trois points alignés sur trois points alignés. Alors f est une application affine.

Preuve. Admis (voir exercice 18 du TD2). □

2.2.2 Composition et groupe affine

Proposition 2.2.4

Soient E, F, G trois espaces affines et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications affines. Alors $g \circ f$ est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

Preuve. Pour $A \in E$ et $u \in \overrightarrow{E}$, on a:

$$(g \circ f)(A + u) = g(f(A) + \overrightarrow{f}(u)) = g(f(A)) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(u)).$$

Donc $g \circ f$ est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. □

Corollaire 2.2.5

Soit $f : E \to F$ une application affine bijective. Sa réciproque est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{f}^{-1}$.

Preuve. Soient $B \in F$ et $v \in \overrightarrow{F}$. Soient A le point de E tel que $f(A) = B$ et u le vecteur de $\overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{f}(u) = v$. Alors:

$$f(A + u) = f(A) + \overrightarrow{f}(u) = B + v.$$

Ainsi $f^{-1}(B + v) = A + u = f^{-1}(B) + \overrightarrow{f}^{-1}(v)$. Cela prouve que f^{-1} est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{f}^{-1}$. □

La proposition et le corollaire précédents permettent d'introduire la définition suivante:

Définition 2.2.6

Soit E un espace affine. L'ensemble des applications affines bijectives de E dans E est un groupe pour la composition. On l'appelle le **groupe affine** de E et on le note $\mathrm{GA}(E)$.

Proposition 2.2.7

Soit E un espace affine. Le groupe $\mathrm{GA}(E)$ s'insère dans une suite exacte:

$$1 \to \overrightarrow{E} \to \mathrm{GA}(E) \to \mathrm{GL}(\overrightarrow{E}) \to 1.$$

Cette suite est scindée et donc $\mathrm{GA}(E)$ est un produit semi-direct de $\overrightarrow{E}$ par $\mathrm{GL}(\overrightarrow{E})$.

Preuve. Considérons l'application:

$$\theta : \mathrm{GA}(E) \to \mathrm{GL}(\overrightarrow{E})$$
$$f \mapsto \overrightarrow{f}.$$

Cette application est bien définie d'après le Corollaire 2.2.1 et c'est un morphisme de groupes d'après la Proposition 2.2.4. Elle est surjective d'après la Proposition 2.1.7.

Fixons maintenant $A \in E$. Le noyau de θ est constitué des applications affines $f : E \to E$ telles que $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$. D'après la Proposition 2.1.7, pour chaque $B \in E$, il existe une unique telle application affine vérifiant $f(A) = B$. Mais on connaît cette application affine: c'est la translation $\tau_{\overrightarrow{AB}}$. On déduit que:

$$\ker(\theta) = \{\tau_u : u \in \overrightarrow{E}\}.$$

Comme $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$ pour tous $u, v \in \overrightarrow{E}$, la bijection:

$$\overrightarrow{E} \to \ker(\theta)$$
$$u \mapsto \tau_u$$

est un isomorphisme de groupes. On a donc bien une suite exacte:

$$1 \to \overrightarrow{E} \to \mathrm{GA}(E) \to \mathrm{GL}(\overrightarrow{E}) \to 1.$$

Reste à prouver qu'elle est scindée. A l'aide de la Proposition 2.1.7, considérons l'application $s : \mathrm{GL}(\overrightarrow{E}) \to \mathrm{GA}(E)$ qui envoie $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ sur l'unique application affine $\tilde{\varphi} : E \to E$ telle que $\tilde{\varphi}(A) = A$ et $\overrightarrow{\tilde{\varphi}} = \varphi$. Cette application est bien définie d'après le Corollaire 2.2.1 et on a de manière évidente $\theta \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(\overrightarrow{E})}$. Pour montrer que s est une section, il ne reste plus qu'à vérifier que c'est un morphisme de groupes.

L'égalité $s(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}) = \tilde{\mathrm{Id}}_{\overrightarrow{E}} = \mathrm{Id}_E$ est évidente, et si on se donne $\varphi, \psi \in \mathrm{GL}(\overrightarrow{E})$, la Proposition 2.2.4 implique que:

$$s(\varphi) \circ s(\psi) = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}$$

est l'unique application affine qui envoie A sur lui-même et de partie linéaire $\varphi \circ \psi$. C'est donc $s(\varphi \circ \psi)$, ce qui prouve bien que s est un morphisme de groupes. □

En dimension finie, le groupe affine a une interprétation matricielle très concrète:

Proposition 2.2.8

Soit E un espace affine de dimension finie n. Le groupe affine $\mathrm{GA}(E)$ est isomorphe au sous-groupe $\mathrm{GA}_n(\mathbb{K})$ de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ donné par les matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} P & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Preuve. Choisissons un repère cartésien $(O, e_1, \dots, e_n)$ de E. Considérons l'application $\theta : \mathrm{GA}(E) \to \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ qui envoie $f \in \mathrm{GA}(E)$ sur la matrice $\begin{pmatrix} P & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où P désigne la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ et C désigne le vecteur des coordonnées de $f(O)$ dans le repère $(O, e_1, \dots, e_n)$. Cette application est bien définie d'après le Corollaire 2.2.1 et elle est injective d'image $\mathrm{GA}_n(\mathbb{K})$ d'après la Proposition 2.1.7. Reste à vérifier que c'est un morphisme de groupes.

On a bien sûr $\theta(\mathrm{Id}_E) = I_{n+1}$. Donnons-nous maintenant $f, f' \in \mathrm{GA}(E)$ et notons P (resp. P') la matrice de $\overrightarrow{f}$ (resp. $\overrightarrow{f'}$) dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ et C (resp. C') le vecteur des coordonnées de $f(O)$ (resp. $f'(O)$) dans le repère $(O, e_1, \dots, e_n)$. D'après la Proposition 2.2.4, la composée $f \circ f'$ est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f'}$, et la matrice de $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f'}$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est PP'. De plus, on a $(f \circ f')(O) = f(f'(O)) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{Of'(O)})$, dont les coordonnées dans le repère $(O, e_1, \dots, e_n)$ sont données par le vecteur colonne $C + PC'$. On déduit que:

$$\theta(f \circ f') = \begin{pmatrix} PP' & C + PC' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P' & C' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \theta(f)\theta(f'),$$

et θ est bien un morphisme de groupes. □

2.2.3 Points fixes

Définition 2.2.9

Soient E un espace affine et $f : E \to E$ une application affine. On dit qu'un point $P \in E$ est un **point fixe de** f si $f(P) = P$.

Proposition 2.2.10

Soient E un espace affine et $f : E \to E$ une application affine. L'ensemble F des points fixes de f est soit vide, soit un sous-espace affine de E dirigé par $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$. De plus, si $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ est surjective, F est non vide.

Preuve. Supposons d'abord que f admette au moins un point fixe, disons A. Alors, pour $B \in E$:

$$B \in F \Leftrightarrow f(B) = B \Leftrightarrow A + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow B \in A + \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}).$$

Donc F est un sous-espace affine de E dirigé par $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$.

Supposons maintenant que $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ est surjective et montrons que f admet un point fixe. Pour ce faire, fixons $A \in E$ et notons $B = f(A)$. Comme $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ est surjective, on peut trouver $u \in \overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{f}(u) - u = \overrightarrow{BA}$. On a alors:

$$f(A+u) = f(A) + \overrightarrow{f}(u) = B + u + \overrightarrow{BA} = A + u,$$

et donc $A + u$ est un point fixe de f. □

Corollaire 2.2.11

Soient E un espace affine de dimension finie et $f : E \to E$ une application affine. Alors f admet un unique point fixe si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Preuve. Si f admet un unique point fixe, la proposition précédente montre que $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}) = 0$, et donc 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$. Réciproquement, supposons que 1 ne soit pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$. Cela signifie que $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}) = 0$ ou, de manière équivalente, que $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ est injective. Comme $\overrightarrow{E}$ est dimension finie, cela revient à dire que $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ est surjective. La proposition précédente montre alors que f admet un point fixe et que l'ensemble des points fixes de f est un sous-espace affine de E dirigé par $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}) = 0$. C'est donc un singleton. □

Exemple 2.2.12. Soit E un espace affine. Soient $O, O' \in E$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}^\times$. On considère les homothéties $h = h_{O,\lambda}$ et $h' = h_{O',\lambda'}$, et cherche à comprendre la composée $h \circ h'$. On sait par la Proposition 2.2.4 que la partie linéaire de $h \circ h'$ est $\overrightarrow{h} \circ \overrightarrow{h'} = \lambda\lambda' \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$. Deux cas se présentent alors:

1. Si $\lambda\lambda' \neq 1$, alors $\overrightarrow{h} \circ \overrightarrow{h'} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} = (\lambda\lambda' - 1)\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ est un automorphisme linéaire et donc $h \circ h'$ admet un unique point fixe. Notons-le O''. Par la Proposition 2.1.7, l'application $h \circ h'$ n'est autre que l'homothétie $h_{O'',\lambda\lambda'}$ de centre O'' et de rapport $\lambda\lambda'$. Pour calculer le point O'', on résoud:

$$\begin{aligned} h(h'(O'')) = O'' &\Leftrightarrow h(O' + \lambda'\overrightarrow{O'O''}) = O'' \\ &\Leftrightarrow O + \lambda\overrightarrow{OO'} + \lambda\lambda'\overrightarrow{O'O''} = O'' \\ &\Leftrightarrow -\overrightarrow{OO''} + \lambda\overrightarrow{OO'} + \lambda\lambda'\overrightarrow{O'O''} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OO''} = \frac{\lambda(1-\lambda')}{1-\lambda\lambda'}\overrightarrow{OO'}. \end{aligned}$$

   Ainsi $O'' = O + \frac{\lambda(1-\lambda')}{1-\lambda\lambda'}\overrightarrow{OO'}$.

2. Si $\lambda\lambda' = 1$, alors $\overrightarrow{h} \circ \overrightarrow{h'} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ et donc, par la Proposition 2.1.7, si l'on note $A = h(h'(O')) = h(O') = O + \lambda\overrightarrow{OO'} = O' + (\lambda - 1)\overrightarrow{OO'}$, la composée $h \circ h'$ n'est autre que la translation de vecteur $\overrightarrow{O'A} = (\lambda - 1)\overrightarrow{OO'}$.

2.3 Théorème de Thalès

On termine ce chapitre avec un théorème que vous connaissez bien depuis longtemps, mais que vous n'avez probablement jamais démontré proprement: le Théorème de Thalès.

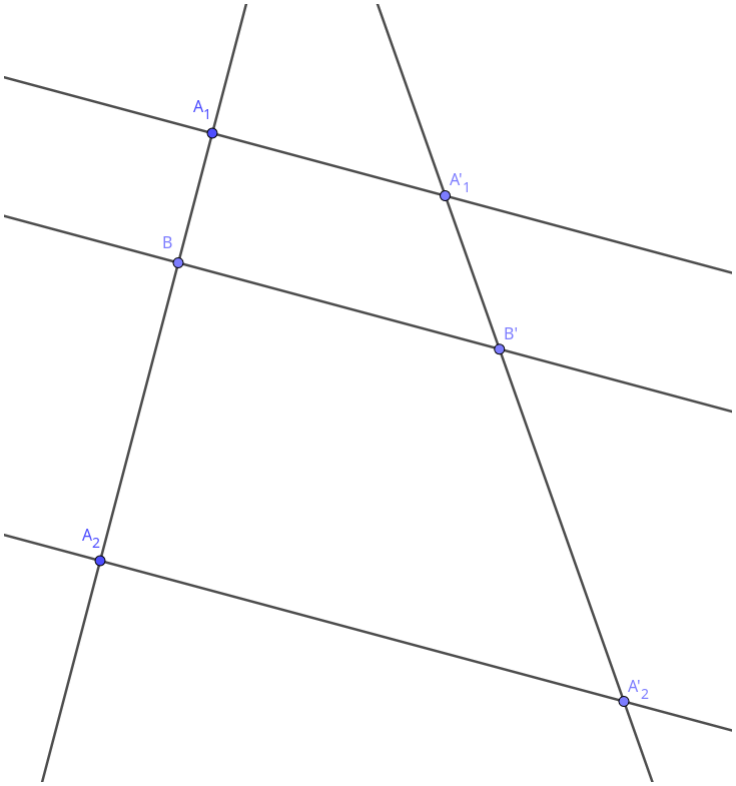
Définition 2.3.1

Soient E un espace affine et A, B, C trois points alignés dans E. On suppose que $A \neq B$. On note alors $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ l'unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Théorème 2.3.2 (Théorème de Thalès)

Soit E un plan affine. Soient δ_1, δ_2 deux droites parallèles distinctes dans E. Soient Δ et Δ' deux droites non parallèles à δ_1, δ_2. Pour $i \in \{1,2\}$, on note $A_i = \Delta \cap \delta_i$ et $A_i' = \Delta' \cap \delta_i$. On se donne deux points distincts $B \in \Delta$ et $B' \in \Delta'$. Alors la droite passant par B et B' est parallèle à δ_1 et δ_2 si, et seulement si:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A_1'B'}}{\overline{A_1'A_2'}}.$$



Preuve. Supposons d'abord que la droite passant par B et B' est parallèle à δ_1 et δ_2. Comme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\Delta'} \oplus \overrightarrow{\delta}_1$, on peut considérer la projection $\pi = \pi_{\Delta', \overrightarrow{\delta}_1}$ sur Δ' parallèlement à $\overrightarrow{\delta}_1$. On a alors:

$$\pi(A_1) = (A_1 + \overrightarrow{\delta}_1) \cap \Delta' = \delta_1 \cap \Delta' = A_1',$$
$$\pi(A_2) = (A_2 + \overrightarrow{\delta}_2) \cap \Delta' = \delta_2 \cap \Delta' = A_2',$$
$$\pi(B) = (B + \overrightarrow{\delta}_1) \cap \Delta' = (B + \mathbb{K}\overrightarrow{BB'}) \cap \Delta' = B'.$$

De plus, par définition:

$$\overrightarrow{A_1B} = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_2}} \overrightarrow{A_1A_2}.$$

Par linéarité de $\overrightarrow{\pi}$:

$$\overrightarrow{A_1'B'} = \overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{A_1B}) = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_2}} \overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{A_1A_2}) = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_2}} \overrightarrow{A_1'A_2'}.$$

Donc:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A_1'B'}}{\overline{A_1'A_2'}}.$$

Réciproquement, supposons que:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A_1'B'}}{\overline{A_1'A_2'}},$$

introduisons δ_B la droite parallèle à δ_1 et passant par B et B'' le point d'intersection de δ_B avec Δ'. Nous avons déjà prouvé que:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A_1'B''}}{\overline{A_1'A_2'}}, \quad \text{et donc} \quad \frac{\overline{A_1'B'}}{\overline{A_1'A_2'}} = \frac{\overline{A_1'B''}}{\overline{A_1'A_2'}}.$$

Ainsi:

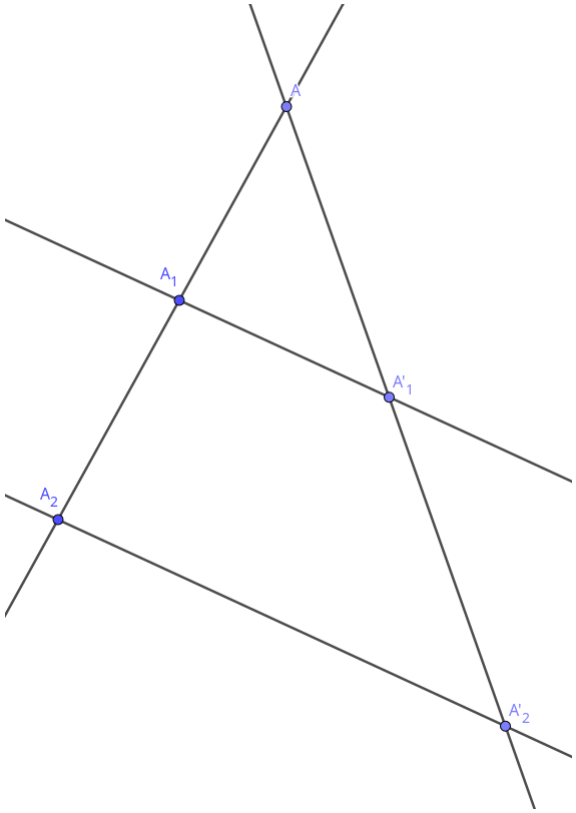
$$\overrightarrow{A_1'B'} = \frac{\overline{A_1'B'}}{\overline{A_1'A_2'}}\overrightarrow{A_1'A_2'} = \frac{\overline{A_1'B''}}{\overline{A_1'A_2'}}\overrightarrow{A_1'A_2'} = \overrightarrow{A_1'B''},$$

et donc $B' = B''$. En particulier, la droite passant par B et B' est parallèle à δ_1 et δ_2. □

Corollaire 2.3.3

Soit E un plan affine. Soient δ_1, δ_2 deux droites parallèles et Δ et Δ' deux droites sécantes en un point $A \in E \setminus (\delta_1 \cup \delta_2)$ et non parallèles à δ_1 et δ_2. On note $A_i = \delta_i \cap \Delta$ et $A_i' = \delta_i \cap \Delta'$ pour $i \in \{1,2\}$. Alors:

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{AA_1'}}{\overline{AA_2'}} = \frac{\overline{A_1A_1'}}{\overline{A_2A_2'}}.$$



Preuve. L'égalité $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{AA'_1}}{\overline{AA'_2}}$ découle immédiatement du Théorème de Thalès. Pour la deuxième égalité, on introduit l'homothétie $h = h_{A,\lambda}$ de centre A et de rapport $\lambda = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_2}}$. On a $h(A_2) = A_1$ et $h(A'_2) = A'_1$, donc $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{A_2A'_2}) = \overrightarrow{A_1A'_1}$. On déduit que $\frac{\overline{A_1A'_1}}{\overline{A_2A'_2}} = \lambda = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_2}}$ □

Chapitre 3

Barycentres

On note toujours $\mathbb{K}$ un corps fixé.

3.1 Définition et premières propriétés

Dans cette section, nous allons définir la notion que vous avez probablement déjà rencontrée au lycée de barycentre. Pour cela, nous commençons par introduire des points pondérés.

Définition 3.1.1

Soit E un espace affine. Un **point pondéré** est un couple (A,α) où A est un point de E et α est un élément de $\mathbb{K}$. Le **poids** d'une famille finie de points pondérés $((A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n))$ est le nombre $\sum_{i=1}^n \alpha_i \in \mathbb{K}$.

Proposition 3.1.2

Soient E un espace affine et $((A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n))$ une famille finie de points pondérés. On considère l'application:

$$\begin{aligned} f : E &\mapsto \vec{E} \\ M &\mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}. \end{aligned}$$

1. Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, alors la fonction f est constante.
2. Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors il existe un unique point $G \in E$ tel que $f(G) = 0$.

On a alors, pour tout $M \in E$:

$$f(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG},$$

ou encore: $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Preuve. Pour $A \in E$ et $u \in \overrightarrow{E}$, on a:

$$f(A+u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{AA_i} - u) = f(A) - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) u.$$

Donc f est une application affine de partie linéaire $-\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$. On déduit que:

1. si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors $\overrightarrow{f} = 0$ et l'application f est constante.
2. si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors $\overrightarrow{f}$ est bijective et donc f l'est aussi par le Corollaire 2.2.1. En particulier, il existe un unique point $G \in E$ tel que $f(G) = 0$. De plus, pour $M \in E$, on a:

$$f(M) = f(G) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{GM}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}.$$

□

Définition 3.1.3

Le point G de l'assertion 2 de la proposition précédente s'appelle le **barycentre de la famille** $((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n))$. On le notera dans la suite $\mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n))$.

Le barycentre jouit des propriétés élémentaires suivantes:

Proposition 3.1.4

Soit E un espace affine. Soient $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés dans E avec $\alpha := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

1. Le barycentre de $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ appartient au sous-espace

affine engendré par $A_1, \dots, A_n$.

2. Pour $A_0 \in E$:

$$\mathrm{Bar}((A_0, 0), (A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)) = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)).$$

3. *Commutativité du barycentre:* Pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$:

$$\mathrm{Bar}((A_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(1)}), \dots, (A_{\sigma(n)}, \alpha_{\sigma(n)})) = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)).$$

Autrement dit, le barycentre ne dépent pas de l'ordre des points pondérés.

4. *Homogénéité du barycentre:* Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^\times$:

$$\mathrm{Bar}((A_1, \lambda\alpha_1), \dots, (A_n, \lambda\alpha_n)) = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)).$$

5. *Coordonnées du barycentre:* On suppose que E est de dimension finie m et on fixe un repère cartésien $(O, e_1, \dots, e_m)$ de E. Pour $1 \leq i \leq n$, on note $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$ les coordonnées de A_i dans le repère $(O, e_1, \dots, e_m)$. Les coordonées du barycentre de $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ sont alors:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} x_1^{(i)}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} x_m^{(i)} \right) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{(i)}.$$

Preuve. 1. Si $G = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n))$, alors on a:

$$\overrightarrow{A_1 G} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_1 A_i} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_n}).$$

Donc $G \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$.

2. Pour $M \in E$:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M A_i} = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot \overrightarrow{M A_0} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M A_i} = 0.$$

Donc $\mathrm{Bar}((A_0, 0), (A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)) = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n))$.

3. Pour $M \in E$:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M A_i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_{\sigma(i)} \overrightarrow{M A_{\sigma(i)}} = 0.$$

Donc $\mathrm{Bar}((A_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(1)}), \dots, (A_{\sigma(n)}, \alpha_{\sigma(n)})) = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n))$.

4. Pour $M \in E$:
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i \overrightarrow{MA_i} = 0.$$
Donc $\mathrm{Bar}((A_1, \lambda\alpha_1), \ldots, (A_n, \lambda\alpha_n)) = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n))$.

5. Cela découle immédiatement de l'égalité:
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i},$$
avec $G = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n))$.

□

Définition 3.1.5

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points dans un espace affine. Si $n \nmid \mathrm{car}(\mathbb{K})$, par homogénéité, pour $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, le barycentre $\mathrm{Bar}((A_1, \lambda), \ldots, (A_n, \lambda))$ est indépendant de λ. On l'appelle l'**isobarycentre** de $A_1, \ldots, A_n$. Lorsque $n = 2$, on dit que c'est le **milieu** de A_1 et A_2.

3.2 Associativité du barycentre

Le barycentre jouit aussi d'une propriété d'associativité, qui s'avère être particulièrement utile:

Proposition 3.2.1

Soit E un espace affine. Soient $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés dans E tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Fixons $i_0 \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $\sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i \neq 0$ et notons $G = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_{i_0}, \alpha_{i_0}))$ et $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i_0}$. Alors:
$$\mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)) = \mathrm{Bar}((G, \alpha), (A_{i_0+1}, \alpha_{i_0+1}), \ldots, (A_n, \alpha_n)).$$

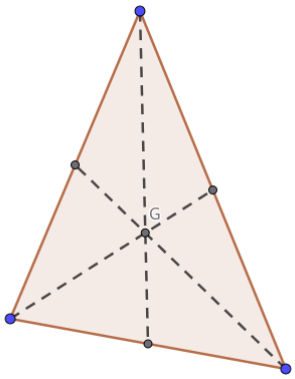
Preuve. Pour $M \in E$, on a:
$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}.$$
Donc:
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = 0 \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{MG} + \sum_{i=i_0+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = 0.$$

Donc:

$$\text{Bar}((A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)) = \text{Bar}((G,\alpha),(A_{i_0+1},\alpha_{i_0+1}),\dots,(A_n,\alpha_n)).$$

□

Exemple 3.2.2. Soit ABC un triangle non aplati dans un plan affine réel E. Soient A' le milieu de B et C, B' le milieu de A et C et C' le milieu de A et B. Les droites (AA'), (BB') et (CC'), que l'on appelle **médianes de** ABC, sont concourantes.



Preuve. Soit G l'isobarycentre de A, B et C. Par associativité du barycentre:

$$\begin{aligned} G &= \text{Bar}((A,1),(A',2)) = \text{Bar}((B,1),(B',2)) \\ &= \text{Bar}((C,1),(C',2)). \end{aligned}$$

Ainsi, G appartient aux trois médianes de ABC.

□

3.3 Caractérisations barycentriques des sous-espaces affines

La proposition suivante montre que les barycentres permettent de caractériser les sous-espaces affines d'un espace affine donné:

Proposition 3.3.1

Soient E un espace affine et F un sous-ensemble non vide de E. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. F est un sous-espace affine de E.
2. F est stable par barycentres, c'est-à-dire que pour tous points pondérés $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$ dans F avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, on a:

$$\text{Bar}((A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)) \in F.$$

Preuve. Supposons que F est un sous-espace affine de E. Si l'on se donne des points pondérés $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$ dans F avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ et on note $G = \text{Bar}((A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n))$, on a:

$$G = A_1 + \overrightarrow{A_1G} = A_1 + \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i} \in F.$$

Réciproquement, supposons que F est stable par barycentres. Fixons $A \in F$ et posons:

$$V = \{\overrightarrow{AM} : M \in F\}.$$

On a bien sûr $F = A + V$. Reste à prouver que V est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. On a bien sûr $0 = \overrightarrow{AA} \in V$. De plus, si l'on se donne $u, v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et on pose $B = A + u$, $C = A + v$ et $D = A + u + \lambda v$, on a:

$$\overrightarrow{AD} = u + \lambda v = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}.$$

Donc:

$$D = \text{Bar}((A, -\lambda), (B, 1), (C, \lambda)) \in F$$

et $u + \lambda v = \overrightarrow{AD} \in V$. Ainsi V est bien un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ et F un sous-espace affine de E. □

Les barycentres permettent également de décrire les sous-espaces affines engendrés, comme le montre la proposition suivante:

Proposition 3.3.2

Soient E un espace affine et $A_1, \ldots, A_n$ des points de E. On pose $F := \langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ et:

$$\Sigma := \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1\}.$$

Alors l'application:

$$\begin{aligned} \rho : \Sigma &\to F \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &\mapsto \text{Bar}((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n))) \end{aligned}$$

est bien définie et est surjective. C'est une bijection si, et seulement si, $(\overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_n})$ est une base de $\overrightarrow{F}$.

Preuve. L'application ρ est bien définie d'après la Proposition 3.1.4. Montrons d'abord sa surjectivité. Soit $G \in F$. D'après la Proposition 1.6.1, on peut écrire:

$$\overrightarrow{A_1G} = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_1A_i}$$

pour certains $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Autrement dit, $G = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n))) = \rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1 = 1 - \left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\right)$ et $\alpha_i = \lambda_i$ pour $i > 1$. L'application ρ est donc bien surjective.

Supposons maintenant que $(\overrightarrow{A_1A_2},\dots,\overrightarrow{A_1A_n})$ est une base de $\overrightarrow{F}$ et montrons que ρ est bijective. Pour cela, prenons $(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\Sigma$ tels que $G:=\rho(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\rho(\beta_1,\dots,\beta_n)$. Comme $\sum_{i=1}^n\alpha_i=\sum_{i=1}^n\beta_i=1$ on a alors:

$$\overrightarrow{A_1G}=\sum_{i=2}^n\alpha_i\overrightarrow{A_1A_i}=\sum_{i=2}^n\beta_i\overrightarrow{A_1A_i}.$$

La famille $(\overrightarrow{A_1A_2},\dots,\overrightarrow{A_1A_n})$ étant une base de $\overrightarrow{F}$, on déduit que $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\beta_1,\dots,\beta_n)$, d'où l'injectivité de ρ.

Réciproquement, supposons que ρ soit bijective et donnons-nous $\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tels que:

$$\sum_{i=2}^n\lambda_i\overrightarrow{A_1A_i}=0.$$

On a alors:

$$A_1=\rho(1-\lambda_2-\cdots-\lambda_n,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\rho(1,0,\dots,0).$$

Par injectivité de ρ, on déduit que $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. La famille $(\overrightarrow{A_1A_2},\dots,\overrightarrow{A_1A_n})$ est donc libre. C'est en plus une famille génératrice de $\overrightarrow{F}$ par la Proposition 3.1.4. C'est donc bien une base de $\overrightarrow{F}$. □

Ainsi, la proposition précédente permet de définir des coordonnées barycentriques comme suit:

Définition 3.3.3

Soit E un espace affine de dimension finie n. Soit $(A_0,\dots,A_n)$ un repère affine de E. Pour chaque point $A\in E$, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\alpha_0+\cdots+\alpha_n=1$ et $A=\mathrm{Bar}((A_0,\alpha_0),\dots,(A_n,\alpha_n))$. On dit $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ sont les **coordonnées barycentriques** de A dans la base affine affine $(A_0,\dots,A_n)$.

Exemple 3.3.4. Les coordonnées barycentriques de l'isobarycentre de $A_0,\dots,A_n$ sont $\left(\frac{1}{n+1},\dots,\frac{1}{n+1}\right)$.

Exemple 3.3.5. On se donne des points $B_1,\dots,B_m\in E$ de coordonnées barycentriques $\alpha^{(1)}=(\alpha_0^{(1)},\dots,\alpha_n^{(1)}),\dots,\alpha^{(m)}=(\alpha_0^{(m)},\dots,\alpha_n^{(m)})$ respectivement. On se donne $\beta_1,\dots,\beta_m\in\mathbb{K}$ avec $\beta_1+\cdots+\beta_m=1$. Par associativité du barycentre, les coordonnées barycentriques du barycentre $G=\mathrm{Bar}((B_1,\beta_1),\dots,(B_m,\beta_m))$ sont données par $\sum_{i=1}^m\beta_i\alpha^{(i)}$.

3.4 Caractérisations barycentriques des applications affines

Il est également possible de caractériser les applications affines via les barycentres. En effet:

Proposition 3.4.1

Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces affines. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. L'application f est affine.
2. L'application f conserve les barycentres, c'est-à-dire que pour tous points pondérés $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ dans E avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, on a:

$$f(\text{Bar}((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n))) = \text{Bar}((f(A_1), \alpha_1), \ldots, (f(A_n), \alpha_n)).$$

Preuve. Supposons d'abord que f est affine. Prenons une famille finie de points pondérés $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ et introduisons le barycentre $G = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n))$. On a alors:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0.$$

Donc, en appliquant $\overrightarrow{f}$:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{GA_i}) = 0.$$

On déduit que $f(G) = \text{Bar}((f(A_1), \alpha_1), \ldots, (f(A_n), \alpha_n))$.

Réciproquement, supposons que f conserve les barycentres, fixons un point $A \in E$ et introduisons la fonction:

$$\begin{aligned} \theta : \overrightarrow{E} &\mapsto \overrightarrow{F} \\ u &\mapsto \overrightarrow{f(A)f(A+u)}. \end{aligned}$$

Par la Proposition 2.1.7, il suffit de montrer que θ est linéaire afin de montrer que f est affine. Pour ce faire, on fixe $u, v \in \overrightarrow{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, puis on pose $B = A + u$, $C = A + v$ et $D = A + u + \lambda v$. Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}$, on a $D = \text{Bar}((A, -\lambda), (B, 1), (C, \lambda))$. Donc $f(D) = \text{Bar}((f(A), -\lambda), (f(B), 1), (f(C), \lambda))$, ce qui signifie que:

$$\theta(u + \lambda v) = \overrightarrow{f(A)f(D)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \lambda\overrightarrow{f(A)f(C)} = \theta(u) + \lambda\theta(v).$$

Ainsi θ est bien linéaire, comme on le souhaitait. □

3.5 Convexité

Dans cette dernière section du chapitre, on travaille systématiquement sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$. Nous allons définir la notion de convexité et étudier quelques unes de ses propriétés.

Définition 3.5.1

Soit E un espace affine réel.

1. Soient A et B deux points de E. Le **segment** $[AB]$ est l'ensemble des points de E de la forme $\mathrm{Bar}((A,\alpha),(B,\beta))$ avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

2. Soit X une partie de E. On dit que X est **convexe** si, et seulement si, pour tous $A, B \in X$, on a $[AB] \subset X$.

Exemple 3.5.2. Un segment est convexe. En effet, soient $A, B \in E$, considérons le segment $[AB]$, donnons-nous $C, D \in [AB]$ et montrons que $[CD] \subset [AB]$. Si $A = B$ il n'y a rien à montrer. Si $A \neq B$, on travaille sur la droite (AB) en coordonées barycentriques par rapport au repère affine (A,B). Les coordonnées de C (resp. D) sont alors de la forme (γ,γ') (resp. (δ,δ')) avec $\gamma,\gamma' \geq 0$ (resp. $\delta,\delta' \geq 0$). Étant donné un point $S \in [CD]$, on peut écrire $S = \mathrm{Bar}((C,\sigma),(D,\tau))$ avec $\sigma,\tau \geq 0$ et $\sigma+\tau = 1$, et alors les coordonnées barycentriques de S dans le repère affine (A,B) sont:

$$(\sigma\gamma + \tau\delta, \sigma\gamma' + \tau\delta').$$

Ces coordonées étant positives, on déduit que $S \in [AB]$.

3.5.1 Enveloppe convexe

La convexité se comporte bien par intersection. En effet:

Proposition 3.5.3

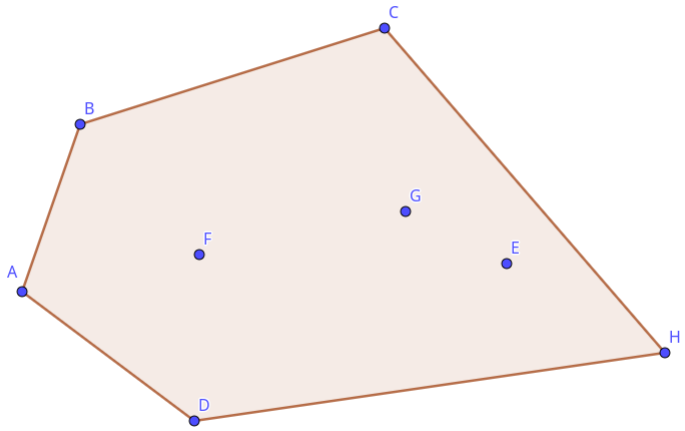
Soit E un espace affine réel. Une intersection de parties convexes de E est convexe.

Preuve. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes de E. Soit $X = \bigcap_{i\in I} X_i$. Soient $A, B \in X$ et $C \in [AB]$. Pour chaque $i \in I$, on a $A \in X_i$ et $B \in X_i$. Comme X_i est convexe, on déduit que $C \in X_i$. Cela étant vrai pour tout i, on obtient que $C \in X$, et donc que X est convexe. □

Ce résultat permet de définir la notion d'enveloppe convexe:

Définition 3.5.4

Soit E un espace affine réel. Soit X un sous-ensemble non vide de E. L'**enveloppe convexe** de X, notée $\mathrm{Conv}(X)$, est la plus petite partie convexe de E contenant X. C'est l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant X.



L'enveloppe convexe peut être décrite de manière assez explicite à l'aide du barycentre:

Proposition 3.5.5

Soient E un espace affine réel et X une partie non vide de E. L'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(X)$ est l'ensemble des barycentres $\mathrm{Bar}((A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n))$ avec $n \geq 1$, $A_1,\dots,A_n \in X, \alpha_1,\dots,\alpha_n \geq 0$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq (0,\dots,0)$.

Preuve. Appelons Y l'ensemble de barycentres proposé par la proposition. Il contient bien sûr X. De plus, si on se donne $B,C \in Y$ et $D \in [BC]$, on peut écrire $B = \mathrm{Bar}((B_1,\beta_1),\dots,(B_n,\beta_m))$, $C = \mathrm{Bar}((C_1,\gamma_1),\dots,(C_n,\gamma_n))$ et $D = \mathrm{Bar}((B,\beta),(C,\gamma))$ avec $B_1,\dots,B_m,C_1,\dots,C_n \in X$, $\beta_1,\dots,\beta_m,\gamma_1,\dots,\gamma_n,\beta,\gamma \geq 0$ et $\beta_1+\cdots+\beta_m = \gamma_1+\cdots+\gamma_n = \beta+\gamma = 1$. Par associativité du barycentre:

$$D = \mathrm{Bar}((B_1,\beta_1\beta),\dots,(B_m,\beta_m\beta),(C_1,\gamma_1\gamma),\dots,(C_n,\gamma_n\gamma)),$$

et donc $D \in Y$. On déduit que Y est convexe et donc que $\mathrm{Conv}(X) \subset Y$.

Réciproquement, montrons que $Y \subset \mathrm{Conv}(X)$. Pour $n \geq 1$, on introduit l'ensemble Y_n des points de la forme $\mathrm{Bar}((A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n))$ avec $n \geq 1$, $A_1,\dots,A_n \in X$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n \geq 0$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq (0,\dots,0)$. On a alors $Y = \bigcup_{n\geq 1} Y_n$, et donc il suffit de montrer par récurrence sur n que $Y_n \subset \mathrm{Conv}(X)$.

Pour $n = 1$ on a $Y_1 = X$, donc $C_1 \subset \mathrm{Conv}(X)$. Soit maintenant $n \geq 1$ un entier tel que $Y_n \subset \mathrm{Conv}(X)$. On se donne $A_1,\dots,A_{n+1} \in X$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1} \geq 0$ avec $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) \neq (0,\dots,0)$. On pose $G = \mathrm{Bar}((A_1,\alpha_1),\dots,(A_{n+1},\alpha_{n+1})) \in Y_{n+1}$. On peut supposer sans perte de généralité que $\alpha_1 \neq 0$. Si $\alpha_2 = \cdots = \alpha_{n+1} = 0$, alors $G = A_1 \in \mathrm{Conv}(X)$. Sinon, on a $\alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1} \neq 0$, et donc par associativité du barycentre:

$$G = \mathrm{Bar}((A_1,\alpha_1),(G',\alpha)) \in [A_1G']$$

avec $G' = \mathrm{Bar}((A_2,\alpha_2),\dots,(A_{n+1},\alpha_{n+1}))$ et $\alpha = \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, $G' \in Y_n \subset \mathrm{Conv}(X)$. Par convexité de $\mathrm{Conv}(X)$, on déduit que $G \in \mathrm{Conv}(X)$. On a donc bien $Y_{n+1} \subset \mathrm{Conv}(X)$. □

En dimension finie, on peut faire mieux:

Théorème 3.5.6 (Théorème de Carathéodory)

Soient E un espace affine réel de dimension finie n et X une partie non vide de E. L'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(X)$ est l'ensemble des barycentres $\mathrm{Bar}((A_1,\alpha_1),\dots,(A_{n+1},\alpha_{n+1}))$ avec $A_1,\dots,A_{n+1} \in X, \alpha_1,\dots,\alpha_{n+1} \geq 0$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) \neq (0,\dots,0)$.

Proof. Comme dans la preuve de la Proposition 3.5.5, on introduit pour $m \geq 1$ l'ensemble Y_m des barycentres $\mathrm{Bar}((A_1,\alpha_1),\dots,(A_m,\alpha_m))$ avec $m \geq 1$, $A_1,\dots,A_m \in X, \alpha_1,\dots,\alpha_m \geq 0$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \neq (0,\dots,0)$. On sait alors que:

$$\mathrm{Conv}(X) = \bigcup_{m\geq 1} Y_m.$$

Comme $Y_m \subset Y_{m+1}$ pour chaque m, il s'agit donc de prouver que $Y_m = Y_{n+1}$ pour $m > n+1$. Pour ce faire, on fixe $m > n+1$ et on montre que $Y_m = Y_{m-1}$. Soit $A = \mathrm{Bar}((A_1,\alpha_1),\dots,(A_m,\alpha_m)) \in Y_m$ avec $A_1,\dots,A_m \in X, \alpha_1,\dots,\alpha_m \geq 0$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \neq (0,\dots,0)$. Comme E est de dimension n et $m > n+1$, les points $A_1,\dots,A_m$ sont affinement dépendants. Autrement dit, il existe $\lambda_2,\dots,\lambda_m$ non tous nuls tels que:

$$\sum_{i=2}^{m} \lambda_i \overrightarrow{A_1A_i} = 0.$$

En posant $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, on a alors, pour chaque $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=2}^{m} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha} + t\lambda_i\right) \overrightarrow{A_1A_i} = \overrightarrow{A_1A}$$

Cela signifie que:

$$A = \mathrm{Bar}\left(\left(A_1, \frac{\alpha_1}{\alpha} + t\lambda_1\right), \left(A_2, \frac{\alpha_2}{\alpha} + t\lambda_2\right), \ldots, \left(A_m, \frac{\alpha_m}{\alpha} + t\lambda_m\right)\right),$$

avec $\lambda_1 = -(\lambda_2 + \cdots + \lambda_m)$. On pose:

$$t_0 = \max\{-\frac{\alpha_i}{\alpha\lambda_i} : 1 \leq i \leq m, \lambda_i \neq 0\}.$$

On remarque alors que les $\frac{\alpha_i}{\alpha} + t_0\lambda_i$ sont tous positifs et au moins l'un d'entre eux est nul. Du coup:

$$A = \mathrm{Bar}\left(\left(A_1, \frac{\alpha_1}{\alpha} + t_0\lambda_1\right), \left(A_2, \frac{\alpha_2}{\alpha} + t_0\lambda_2\right), \ldots, \left(A_m, \frac{\alpha_m}{\alpha} + t_0\lambda_m\right)\right) \in Y_{m-1}.$$

Cela achève la preuve. □

3.5.2 Convexité et applications affines

On termine le chapitre en étudiant comment la convexité se comporte via les applications affines.

Proposition 3.5.7

Soit $f : E \to F$ une application affine entre deux espaces affines réels. L'image d'une partie convexe de E par f est convexe et l'image inverse d'une partie convexe de F par f est convexe.

Preuve. Soit X une partie convexe de E. Soient $A, B \in X$ et $C \in [f(A)f(B)]$. Il existe $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $C = \mathrm{Bar}((f(A), \alpha), (f(B), \beta))$. Par la Proposition 3.4.1, on a $C = f(\mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta)))$. Mais X étant convexe, $\mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta)) \in X$. Donc $C \in f(X)$ et $f(X)$ est convexe.

Soit maintenant Y une partie convexe de F. Soient $A, B \in f^{-1}(Y)$ et $C \in [AB]$. Il existe $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $C = \mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta))$. Par la Proposition 3.4.1, on a $f(C) = \mathrm{Bar}((f(A), \alpha), (f(B), \beta))$. Mais Y étant convexe, $\mathrm{Bar}((f(A), \alpha), (f(B), \beta)) \in Y$. Donc $C \in f^{-1}(Y)$ et $f^{-1}(Y)$ est convexe. □

La proposition précédente admet une réciproque partielle, qui repose sur le Théorème Fondamental de la Géométrie Affine:

Théorème 3.5.8

Soient E un espace affine réel de dimension au moins 2 et $f : E \to E$ une application bijective. Si toute image d'une partie convexe de E par f est

convexe, alors f est affine.

Preuve. Posons $g = f^{-1}$ et donnons-nous trois points A, B, C de E tels que $B \in [AC]$. Par hypothèse, $f([g(A)g(C)])$ est convexe, donc contient $[AC]$ et donc B. Il existe donc $D \in [g(A)g(C)]$ tel que $f(D) = B$. Or on a aussi $f(g(B)) = B$. Par bijectivité de B, on déduit que $g(B) = D \in [g(A)g(C)]$. On a ainsi montré que g préserve l'alignement. Du coup, par le Théorème 2.2.3, on déduit que g est affine. Il en est donc de même de f. □

Chapitre 4

Espaces affines euclidiens

Dans tout ce chapitre, on travaille sur le corps $\mathbb{R}$. En géométrie, on travaille souvent avec des espaces munis d'une distance euclidienne. Comme vous le savez déjà, en algèbre linéaire, on définit pour cela les espaces euclidiens. En géométrie affine, on définit la notion d'espace affine euclidien:

Définition 4.0.1

Un **espace affine euclidien** est un espace affine (réel) de dimension finie E dont la direction $\overrightarrow{E}$ est un espace (vectoriel) euclidien. Cela signifie que $\overrightarrow{E}$ est muni d'un produit scalaire.

Pour rappel, un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V est une forme bilinéaire symétrique définie positive $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. On peut alors définir une norme sur V par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

4.1 Distance sur un espace affine euclidien

Étant donné un espace affine euclidien E, on peut utiliser la norme euclidienne sur $\overrightarrow{E}$ pour définir une distance sur E:

Lemme 4.1.1. *Soit E un espace affine euclidien. L'application:*

$$\begin{aligned} d : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \|\overrightarrow{AB}\| \end{aligned}$$

est une distance sur E.

Preuve. Pour $A, B, C \in E$, on a:

1. Positivité: $d(A,B) \geq 0$.
2. Séparation: $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$.
3. Symétrie: $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = d(B,A)$.
4. Inégalité triangulaire: $d(A,C) = \|\overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| = d(A,B) + d(B,C)$.

□

Définition 4.1.2

Soit E un espace affine euclidien. L'application d introduite au lemme précédent s'appelle **la distance** sur E. On note généralement AB au lieu de $d(A,B)$.

On sera souvent amené à utiliser les résultats que vous connaissez déjà sur les produits scalaires et leurs normes associées dans le cadre affine. Par exemple, dans un espace affine euclidien E, l'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit:

$$\forall A,B,C \in E, \quad |\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle| \leq AB \cdot AC.$$

Il y a égalité si, et seulement si, les points A, B et C sont alignés.

Pour terminer, nous énonçons et démontrons un résultat classique de la géométrie du triangle:

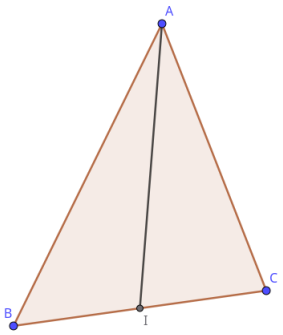
Proposition 4.1.3 (Théorème de la médiane)

Soient E un espace affine euclidien et $A,B,C \in E$. Soit I le milieu de $[BC]$. Alors:

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

Preuve. Comme $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, on a:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\|^2 + \|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AI}\|^2 + \|\overrightarrow{IB}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IB}\rangle \\ &\quad + \|\overrightarrow{AI}\|^2 + \|\overrightarrow{IC}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IC}\rangle \\ &= 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2. \end{aligned}$$



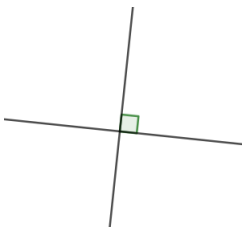
□

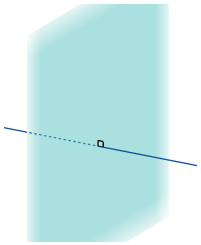
4.2 Orthogonalité

Dans un espace affine euclidien, le produit scalaire permet d'introduire la notion d'orthogonalité:

Définition 4.2.1

Soit E un espace affine euclidien. Deux sous-espaces affines F et G de E sont dits **orthogonaux** si leurs directions $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ le sont, c'est-à-dire $\langle u, v\rangle = 0$ pour tous $u \in \overrightarrow{F}$ et $v \in \overrightarrow{G}$. On note alors $F \perp G$.





Remarque 4.2.2. Soient E un espace affine euclidien et F, G et H trois sous-espaces affines.

1. En général, si $F \perp G$ et $G /\!\!/ H$, on ne peut pas déduire que $F \perp H$. Par exemple, si F et G sont deux droites orthogonales dans E et $H = E$, on a bien $F \perp G$ et $G /\!\!/ H$ mais F n'est pas orthogonal à H.

   Par contre, si G et H ne sont pas seulement supposés parallèles mais ont en plus même direction, alors on peut bien conclure que $F \perp H$.

2. En général, si $F \perp G$ et $G \perp H$, on ne peut pas déduire que $F /\!\!/ H$. Pour le voir, il suffit par exemple de prendre F et H des droites non parallèles dans E et G un point. Voici cependant une situation assez usuelle où on peut quand même donner un sens à l'implication précédente.

   Supposons que E est de dimension finie, $F \perp G$, $G \perp H$ et $\dim F + \dim G = \dim E$. Comme $F \perp G$ et $G \perp H$, on a $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}^{\perp}$ et $\overrightarrow{H} \subset \overrightarrow{G}^{\perp}$. Mais:

$$\dim \overrightarrow{F} = \dim F = \dim E - \dim G = \dim \overrightarrow{E} - \dim \overrightarrow{G} = \dim \overrightarrow{G}^{\perp}.$$

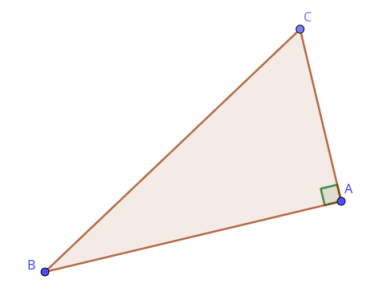
   On déduit que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}^{\perp} \supset \overrightarrow{H}$, et donc que $F /\!\!/ H$.

L'orthogonalité peut être caractérisée à l'aide de la distance euclidienne. En effet:

Théorème 4.2.3 (Théorème de Pythagore)

Soient E un espace affine euclidien et $A, B, C \in E$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si, et seulement si:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$



Preuve. On a:

$$BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle.$$

Donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ si, et seulement si, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$. □

Pour conclure cette partie sur l'orthogonalité, on introduit la notion d'hyperplan médiateur.

Proposition 4.2.4

Soient E un espace affine euclidien et A et B deux points distincts de E. L'ensemble des points M de E tels que $AM = BM$ est l'hyperplan affine orthogonal à (AB) passant par le milieu I de $[AB]$.

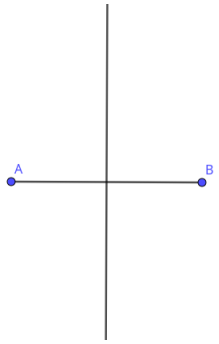
Preuve. On calcule:

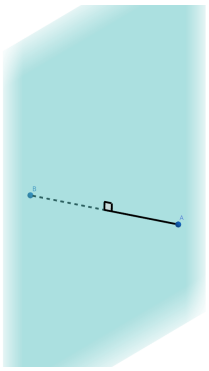
$$\begin{aligned} AM^2 - BM^2 &= \|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\|^2 - \|\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AI}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM} \rangle + \|\overrightarrow{IM}\|^2 - \|\overrightarrow{BI}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IM} \rangle - \|\overrightarrow{IM}\|^2 \\ &= 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IM} \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi $AM = BM$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux. Cela signifie exactement que M appartient à l'hyperplan affine orthogonal à (AB) passant par I. □

Définition 4.2.5

L'hyperplan affine de la proposition précédente s'appelle l'**hyperplan médiateur** de A et B. Lorsque E est de dimension 2, on parle de **médiatrice**.



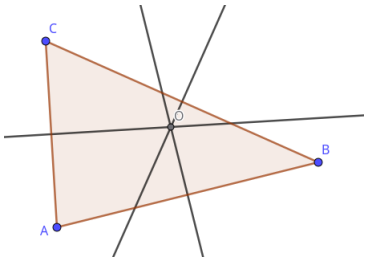


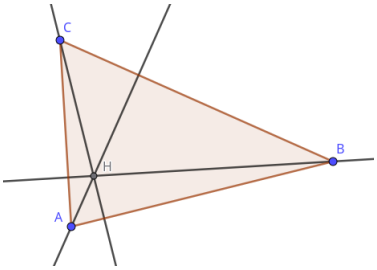
Nous sommes enfin en mesure de retrouver des résultats de la géométrie du triangle que vous connaissez bien:

Proposition 4.2.6

Soit ABC un triangle non aplati dans un plan affine euclidien.

1. Les médiatrices du triangle ABC sont concourantes.
2. Les hauteurs du triangle ABC, c'est-à-dire les droites passant par un sommet et orthogonales au côté opposé, sont concourantes.





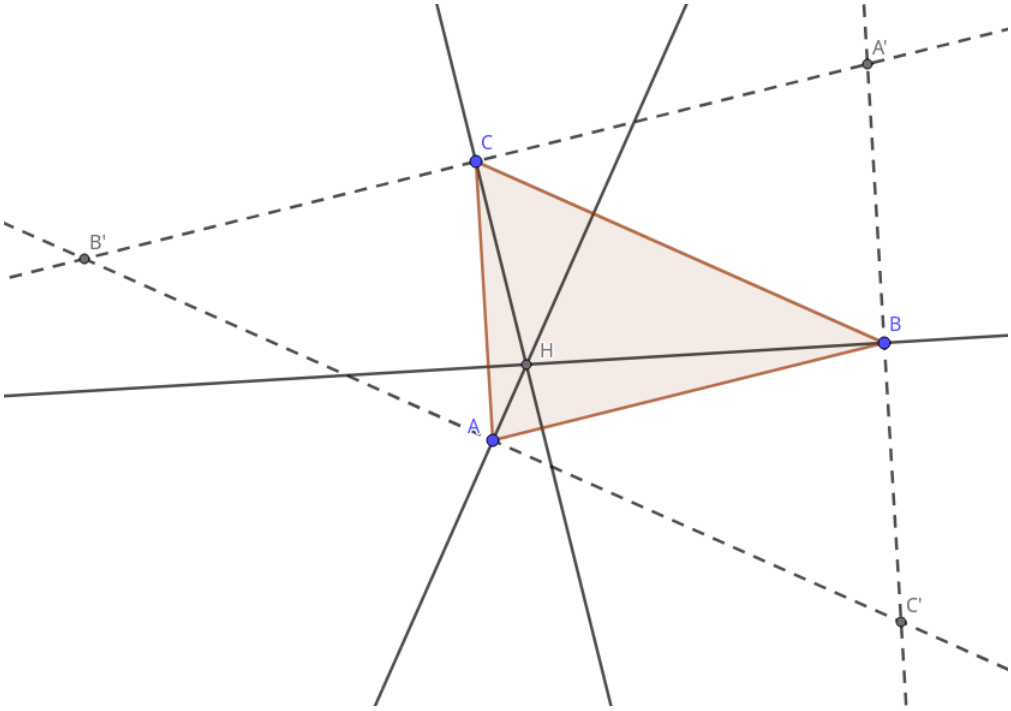
Preuve. 1. Soient Δ et Δ' les médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$ respectivement. Comme ABC n'est pas aplati, elles sont sécantes en un point O. On a $OA = OB$ et $OB = OC$. Donc $OA = OC$ et O est bien sur la médiatrice de $[AC]$.

2. Soient Δ_1 la droite parallèle à (BC) passant par A, Δ_2 la droite parallèle à (AC) passant par B et Δ_3 la droite parallèle à (AB) passant par C. Comme ABC n'est pas aplati, ces trois droites sont sécantes deux à deux. On note A' l'intersection de Δ_2 et Δ_3, B' celle de Δ_1 et Δ_3 et C' celle de Δ_1 et Δ_2.

   Considérons maintenant Δ_A, Δ_B et Δ_C les hauteurs de ABC issues de A, B et C respectivement. Comme (AC) et $(A'C')$ sont parallèles, Δ_B est orthogonale à $(A'C')$. De plus, $ABA'C$ et $AC'BC$ étant des parallélogrammes, on a $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'B}$, et donc B est le milieu de $[A'C']$. Ainsi Δ_B est la médiatrice du segment $[A'C']$.

   De manière analogue, on prouve que Δ_A et Δ_C sont les médiatrices de $[B'C']$ et de $[A'B']$ respectivement. Les hauteurs de ABC sont donc les médiatrices de $A'B'C'$: elles sont bien concourantes.

□



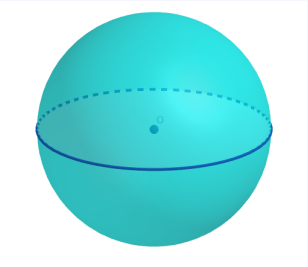
4.3 Sphères

Les espaces affines euclidiens étant munis d'une distance, on peut naturellement y définir une notion de sphère:

Définition 4.3.1

Soient E un espace affine euclidien, O un point de E et r un réel positif. La **sphère** de centre O et de rayon r est:

$$\mathscr{S}(O,r) = \{M \in E : OM = r\}.$$



Comme vous le savez depuis longtemps (mais vous ne l'avez probablement jamais prouvé), les sphères peuvent être caractérisées à l'aide de l'orthogonalité:

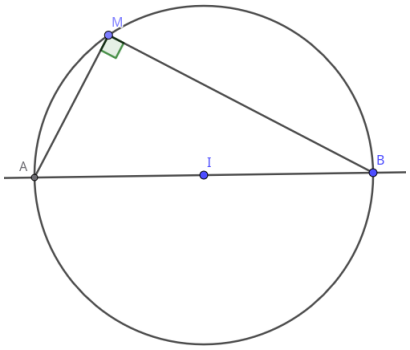
Proposition 4.3.2

Soient A et B deux points distincts dans un espace affine euclidien E. Soit I le milieu de $[AB]$. L'ensemble des points $M \in E$ tels que $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0$ est la sphère de centre I passant par A et B.

Preuve. Pour $M \in E$:

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle &= \langle \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \rangle \\ &= MI^2 + \langle \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IB} \rangle + \langle \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{MI} \rangle + \langle \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB} \rangle \\ &= MI^2 - IA^2.\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points $M \in E$ tels que $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0$ est $\mathscr{S}(I, IA)$. □



Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier où $\dim E = 2$. La sphère $\mathscr{S}(O,r)$ est alors généralement appelée **cercle** de centre O et de rayon r et notée $\mathscr{C}(O,r)$. D'après le Théorème de Pythagore, si on se place dans un repère orthonormé (O, e_1, e_2) centré en O, le cercle $\mathscr{C}(O,r)$ est décrit par l'équation

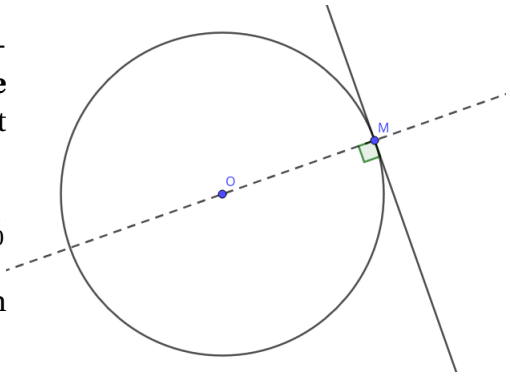
cartésienne $x^2 + y^2 = r^2$ et il est paramétré par:

$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t. \end{cases}$$

Étant donné un point $M \in \mathscr{C}(O,r)$ de coordonnées $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, la **tangente** à $\mathscr{C}(0,r)$ en M est la droite passant par M et de vecteur directeur de coordonnées

$(x'(t_0), y'(t_0)) = (-r\sin t_0, r\cos t_0) = (-y_0, x_0$

C'est aussi la droite orthogonale à (OM) en M.



4.4 Applications affines dans un espace affine euclidien

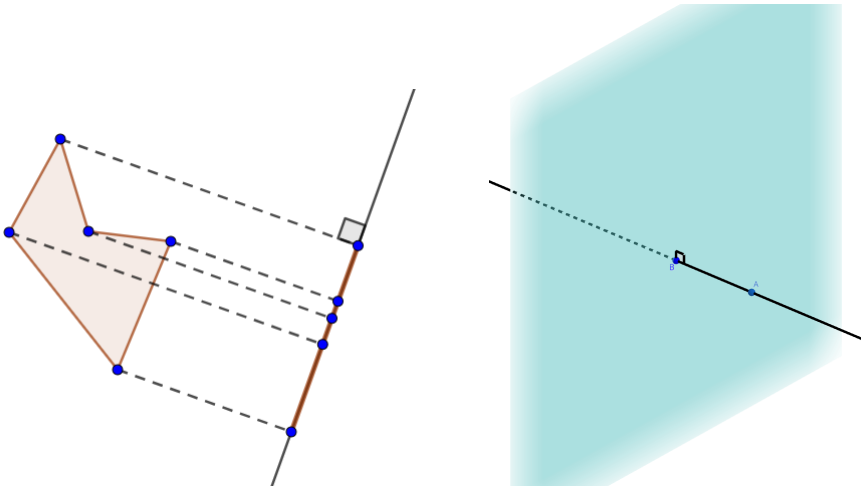
Certaines applications affines jouent un rôle particulèrement important quand on travaille dans un espace affine euclidien. C'est notamment le cas des projections et des symétries orthogonales:

Définition 4.4.1

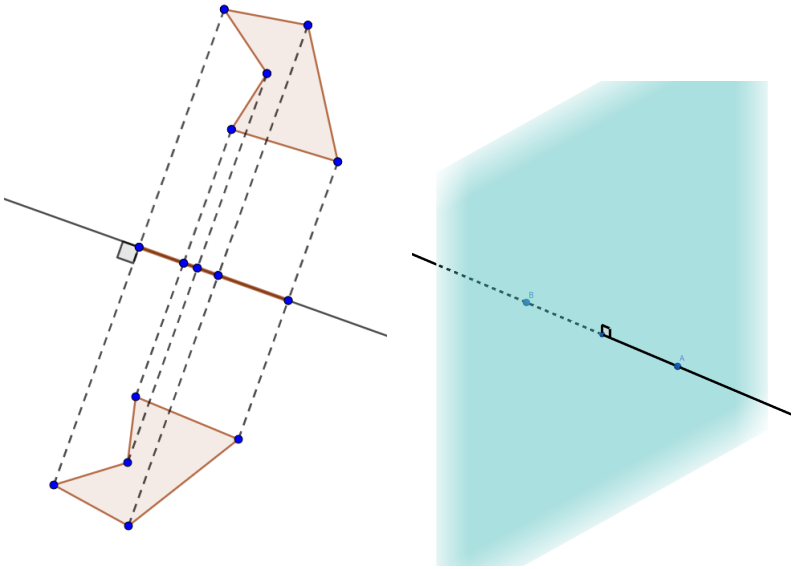
Soient E un espace affine euclidien et F un sous-espace affine.

1. La **projection affine orthogonale** sur F est la projection affine sur F parallèlement à $\overrightarrow{F}^{\perp}$.
2. La **symétrie affine orthogonale** par rapport à F est la symétrie affine par rapport à F parallèlement à $\overrightarrow{F}^{\perp}$. Lorsque F est un hyperplan de E, on parle de **réflexion** par rapport à F.

Projection orthogonale:



Symétrie orthogonale:



Remarque 4.4.2.

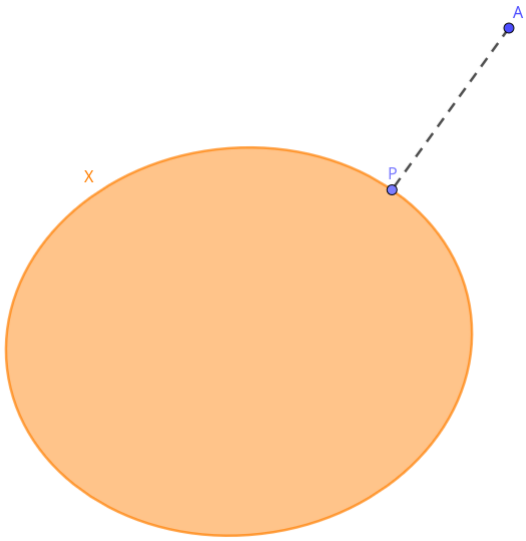
1. Soit π la projection affine orthogonale sur F. On a alors:

$$\forall A, B \in E,\ \pi(A) = B \Leftrightarrow ((B \in F) \wedge (\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F}^{\perp})).$$

2. Soit σ la symétrie affine orthogonale par rapport à F. Pour $A, B \in E$, on a $\sigma(A) = B$ si, et seulement si, le milieu de $[AB]$ appartient à F et $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F}^{\perp}$. Si σ est en fait une réflexion, cela équivaut également à ce que F soit l'hyperplan médiateur de A et B.

Définition 4.4.3

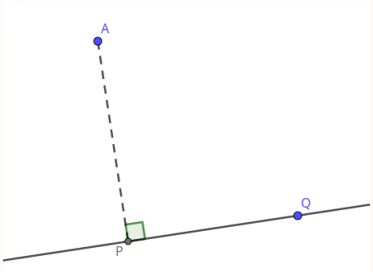
Soient E un espace affine euclidien, X une partie de E et $A \in E$. La **distance** de A à X est le réel positif: $d(A,X) = \inf\{AP : P \in X\}$.



La projection orthogonale permet de calculer la distance d'un point à un sous-espace affine:

Proposition 4.4.4

Soient E un espace affine euclidien, F un sous-espace affine et $A \in E$. Il existe un unique point $P \in F$ tel que $AP = d(A,F)$. C'est l'image de A par la projection affine orthogonale π sur F.



Preuve. On pose $P = \pi(A)$. Pour $Q \in F$, on a $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PA}$. Donc, par le Théorème de Pythagore:

$$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 \geq AP^2,$$

avec égalité si, et seulement si, $Q = P$. Cela prouve la proposition. □

4.5 Repères dans un espace affine euclidien

On conclut ce chapitre sur les espaces affines euclidiens en introduisant la notion de repère orthonormé.

Définition 4.5.1

Soit E un espace affine euclidien de dimension finie n. On dit qu'un repère cartésien $(O, e_1, \dots, e_n)$ de E est **orthogonal** si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. Si on a de plus $\|e_i\| = 1$ pour tout i, on dit qu'il est **orthonormé**.

Ainsi, si $(O, e_1, \dots, e_n)$ est un repère orthonormé et M est un point de E, les coordonnées de M dans le repère $(O, e_1, \dots, e_n)$ sont $(\langle \overrightarrow{OM}, e_i \rangle)_{1 \leq i \leq n}$.

Proposition 4.5.2

Soit V un espace (vectoriel) euclidien. Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des bases orthonormées de V.

1. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(V)$ agit simplement transitivement sur $\mathscr{B}$.
2. L'ensemble $\mathscr{B}$ contient exactement deux orbites sous l'action du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(V)$.

Preuve.

1. Cela découle immédiatement du fait que la matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice orthogonale.
2. On fixe $\mathbf{e} \in \mathscr{B}$. On considère l'application:

$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{B}/\mathrm{SO}(V) &\mapsto \{-1, 1\} \\ \mathbf{f} &\to \det A_{\mathbf{e},\mathbf{f}} \end{aligned}$$

où $A_{\mathbf{e},\mathbf{f}}$ est la matrice de passage de $\mathbf{e}$ vers $\mathbf{f}$. On vérifie aisément que cette application est bien définie et bijective.

□

Définition 4.5.3

Soit E un espace affine euclidien. Une **orientation** de E est le choix d'une des deux orbites de l'ensemble des bases orthonormées de $\vec{E}$ sous l'action de $\mathrm{SO}(\vec{E})$. Un repère affine orthonormé $(O, e_1, \dots, e_n)$ est dit **direct** si $(e_1, \dots, e_n)$ appartient à l'orbite choisie. Il est dit **indirect** sinon.

Chapitre 5

Groupes d'isométries

Comme dans le chapitre précédent, on travaille systématiquement sur le corps des réels. On poursuit l'étude des espaces affines euclidiens en introduisant les isométries, c'est-à-dire les applications affines qui préservent la distance euclidienne. Dans une première partie du chapitre, on étudiera les groupes d'isométries et on cherchera à établir une classification exhaustive des isométries en petite dimension. Dans une deuxième partie, on utilisera les isométries et leurs propriétés pour prouver un certain nombre de résultats classiques de géométrie plane.

5.1 Isométries affines et le groupe $\mathrm{Isom}(E)$

On commence par introduire la définition des isométries:

Définition 5.1.1

Soient E et F deux espaces affines euclidiens. Une **isométrie** $f : E \to F$ est une application affine qui conserve les distances, c'est-à-dire $f(A)f(B) = AB$ pour tous $A, B \in E$.

Remarque 5.1.2. De manière équivalente, dire que f préserve les distances signifie que $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ pour tous $A, B \in E$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ est une isométrie vectorielle.

Définition 5.1.3

Soit E un espace affine euclidien. Une **isométrie** de E est une isométrie f de E dans E. Elle est dite **directe** (ou **positive**) si $\overrightarrow{f}$ est de déterminant

1. Elle est dite **indirecte** (ou **négative**) si $\overrightarrow{f}$ est de déterminant -1. Une isométrie directe est aussi appelée **déplacement** et une isométrie indirecte **antidéplacement**.

L'ensemble des isométries, muni de la composition, est en fait un groupe qui a une structure très particulière:

Proposition 5.1.4

Soit E un espace affine euclidien.

1. L'ensemble $\mathrm{Isom}(E)$ des isométries de E est un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{GA}(E)$. Il s'insère dans une suite exacte:

$$1 \to \overrightarrow{E} \to \mathrm{Isom}(E) \to \mathrm{O}(\overrightarrow{E}) \to 1.$$

   Cette suite est scindée et donc $\mathrm{Isom}(E)$ est un produit semi-direct de $\overrightarrow{E}$ par $\mathrm{O}(\overrightarrow{E})$.

2. L'ensemble $\mathrm{Isom}^+(E)$ des déplacements de E est un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{GA}(E)$. Il s'insère dans une suite exacte:

$$1 \to \overrightarrow{E} \to \mathrm{Isom}^+(E) \to \mathrm{SO}(\overrightarrow{E}) \to 1.$$

   Cette suite est scindée et donc $\mathrm{Isom}^+(E)$ est un produit semi-direct de $\overrightarrow{E}$ par $\mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$.

Preuve. Considérons la suite exacte scindée donnée par la Proposition 2.2.7:

$$1 \to \overrightarrow{E} \to \mathrm{GA}(E) \xrightarrow{\phi} \mathrm{GL}(\overrightarrow{E}) \to 1.$$

Comme $\mathrm{Isom}(E) = \phi^{-1}(\mathrm{O}(\overrightarrow{E}))$, on déduit immédiatement que $\mathrm{Isom}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$ s'insérant dans une suite exacte scindée:

$$1 \to \overrightarrow{E} \to \mathrm{Isom}(E) \to \mathrm{O}(\overrightarrow{E}) \to 1.$$

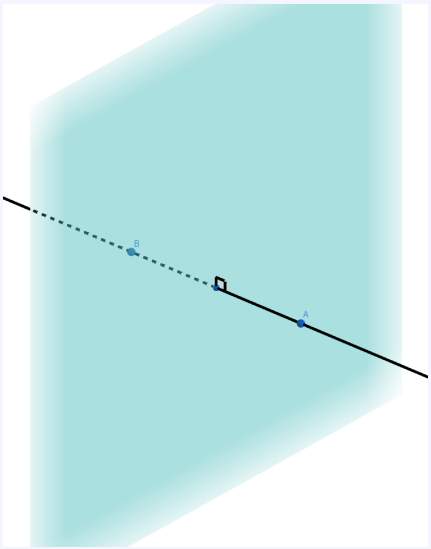
Le cas de $\mathrm{Isom}^+(E)$ se traite de la même manière en remarquant que $\mathrm{Isom}^+(E) = \phi^{-1}(\mathrm{SO}(\overrightarrow{E}))$. □

Afin de manipuler le groupe des isométries d'un espace affine euclidien, il est souvent utile de disposer d'un ensemble de générateurs agréable à manipuler.

Définition 5.1.5

1. Soient V un espace (vectoriel) euclidien et W un hyperplan de V. La symétrie orthogonale par rapport à W est appelée **réflexion** par rapport à W.

2. Soient E un espace affine euclidien et F un hyperplan affine de E. La symétrie orthogonale par rapport à F est appelée **réflexion** par rapport à F.



On rappelle des cours d'algèbre linéaire que, si V est un espace vectoriel euclidien, le groupe $\mathrm{O}(V)$ est engendré par les réflexions. Mieux, si $n = \dim V$, tout élément de $\mathrm{O}(V)$ est produit d'au plus n réflexions. Un résultat similaire vaut pour le groupe des isométries affines d'un espace affine euclidien:

Théorème 5.1.6

Soient E un espace affine euclidien de dimension n et $f \in \mathrm{Isom}(E)$. Alors f est produit d'au plus $n+2$ réflexions. En particulier, le groupe $\mathrm{Isom}(E)$ est engendré par les réflexions.

Preuve. Soient $r \leq n$ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathrm{O}(\vec{E})$ des réflexions telles que $\vec{f} = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_r$. Soient $s_1, \ldots, s_r$ des réflexions de E telles que $\vec{s_i} = \sigma_i$ pour chaque i. Considérons l'isométrie affine $g = f \circ s_r \circ \cdots \circ s_1$. On a alors $\vec{g} = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$, et donc g est une translation. Soit v son vecteur de translation. Fixons A un point de E et considérons $\Pi = A + \langle v \rangle^{\perp}$ et $\Sigma = \tau_{v/2}(\Pi)$. Soient s_Π et s_Σ les réflexions par rapport à Π et à Σ. La partie vectorielle de $s_\Sigma \circ s_\Pi$ est $\mathrm{Id}_{\vec{E}}$ et $s_\Sigma \circ s_\Pi(A) = s_\Sigma(A) = A + v$. Donc $s_\Sigma \circ s_\Pi = g$ et $f = s_\Sigma \circ s_\Pi \circ s_1 \circ \cdots \circ s_r$. □

5.2 Décomposition canonique des isométries affines

Dans les prochaines sections, nous allons établir la classification des isométries affines en petite dimension. Le point clé est donné par le théorème suivant:

Théorème 5.2.1 (Décomposition canonique des isométries affines)

Soient E un espace affine euclidien et $f \in \mathrm{Isom}(E)$. Il existe un unique vecteur $v \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ et une unique isométrie $g \in \mathrm{Isom}(E)$ ayant au moins un point fixe tels que $f = \tau_v \circ g$. On a alors aussi $f = g \circ \tau_v$.

On commence par le lemme suivant:

Lemme 5.2.2. *Avec les notations du théorème:*

$$\overrightarrow{E} = \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}) \perp \mathrm{im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}).$$

Preuve. Posons $V := \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$. Comme V est stable par $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle, $V^\perp$ est aussi stable par $\overrightarrow{f}$, et donc par $\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$. Mais comme V est l'espace propre associé à la valeur propre 1 pour $\overrightarrow{f}$ et V et $V^\perp$ sont en somme directe, on déduit que 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}|_{V^\perp}$. Du coup, $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})|_{V^\perp}$ est un automorphisme de $V^\perp$ et $\mathrm{im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}) \supset V^\perp$. Mais par le Théorème du rang:

$$\dim \mathrm{im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}) = \dim \overrightarrow{E} - \dim V = \dim V^\perp,$$

et donc $\mathrm{im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}) = V^\perp$. □

Preuve du Théorème 5.2.1. On commence par démontrer l'unicité. On se donne donc un vecteur $v \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ et une isométrie $g \in \mathrm{Isom}(E)$ ayant au moins un point fixe tels que $f = \tau_v \circ g$. On a alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\tau_v} \circ \overrightarrow{g} = \overrightarrow{g}$. Ainsi, si A est un point fixe de g, on a, pour $M \in E$:

$$f(M) = g(M) + v = A + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{AM}) + v = A + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) + v = M + (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})(\overrightarrow{AM}) + v.$$

Or $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})(\overrightarrow{AM}) \in \mathrm{im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ et $v \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$. Par le lemme 5.2.2, le vecteur v est nécessairement le projeté orthogonal de $\overrightarrow{Mf(M)}$ sur $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ pour chaque $M \in E$. Cela prouve son unicité, et celle de g découle alors de l'égalité $g = \tau_{-v} \circ f$.

Passons maintenant à l'existence. Fixons un point $M \in E$. Par le lemme 5.2.2, on peut écrire $\overrightarrow{Mf(M)} = v + w$ avec $v \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ et $w \in \mathrm{im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$. On pose alors $g = \tau_{-v} \circ f$. Bien sûr, g est une isométrie, et il suffit donc de montrer que g admet un point fixe.

Soit $A \in E$. On calcule:

$$g(A) = f(A) - v = f(M) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MA}) - v = M + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MA}) + w.$$

On a donc:

$$g(A) = A \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MA}) + w \Leftrightarrow w = -(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})(\overrightarrow{MA}).$$

Or $w \in \mathrm{im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$. On peut donc écrire $w = (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})(w')$, et avec $A = M - w'$, on a bien $g(A) = A$. Cela achève la preuve de l'existence.

Reste à vérifier que, si v et g vérifient les conditions de l'énoncé, alors on a $f = g \circ \tau_v$. Pour ce faire, on utilise que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ et on calcule pour $N \in E$:

$$g(\tau_v(N)) = g(N+v) = g(N) + \overrightarrow{g}(v) = g(N) + \overrightarrow{f}(v) = g(N) + v = \tau_v(g(N)) = f(N).$$

□

5.3 Classification en dimension 2

Dans cette section, on travaille dans un plan affine euclidien orienté E. On fixe une base orthonormée directe (e_1, e_2) de $\overrightarrow{E}$.

Rappels sur les isométries vectorielles de $\overrightarrow{E}$

Soit $u \in \mathrm{O}(\overrightarrow{E})$. Si u est une isométrie directe, elle s'écrit dans la base (e_1, e_2) sous la forme:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

avec $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On dit que u est la rotation d'angle θ.

Si u est une isométrie indirecte, il existe une base orthonormée directe (e'_1, e'_2) dans laquelle sa matrice s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On dit que u est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(e'_1) = \ker(u - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$.

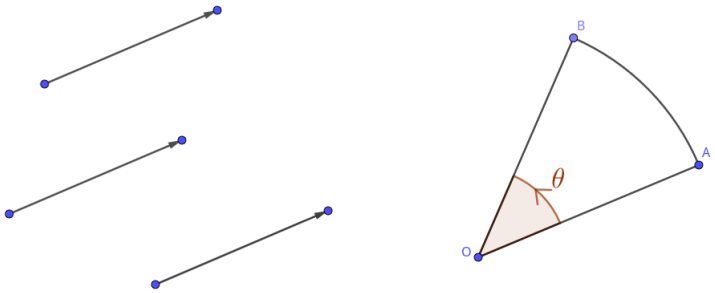
Pour faire des calculs dans le groupe $\mathrm{O}(\overrightarrow{E})$, il est souvent utile de se souvenir que, si r est une rotation et s une symétrie orthogonale, alors $r \circ s = s \circ r^{-1}$.

Déplacements

Soit $f \in \mathrm{Isom}^+(E)$. Alors $\overrightarrow{f} \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$. Du coup, $\overrightarrow{f}$ est une rotation d'angle θ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Dans la base (e_1, e_2), cette rotation s'écrit:

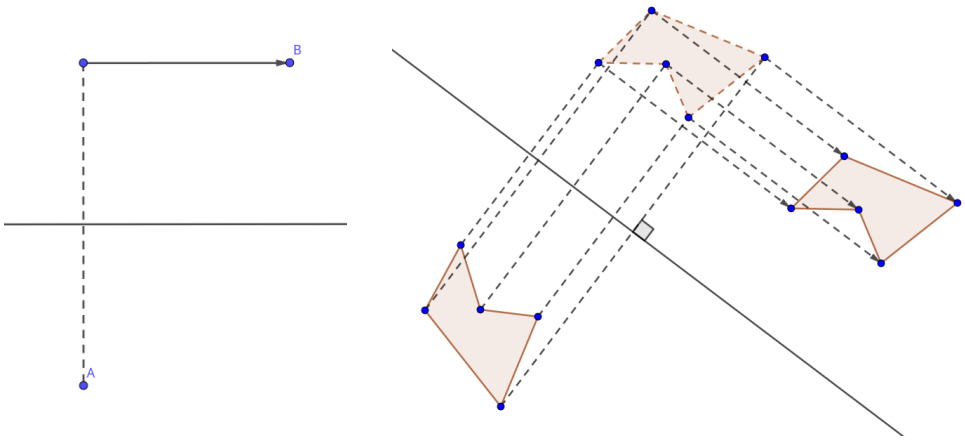
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Lorsque $\theta = 0$, on a $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ et donc f est une translation. Lorsque $\theta \neq 0$, on remarque que 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$. On déduit que f admet un point fixe O grâce au Corollaire 2.2.11 et alors f est la rotation de centre O et d'angle θ.



Antidéplacements

Soit f un antidéplacement de E. On a alors $\overrightarrow{f} \in \mathrm{O}(\overrightarrow{E}) \setminus \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$. Du coup, $\overrightarrow{f}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta = \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$. Appliquons le Théorème 5.2.1 à f. Cela permet d'écrire $f = \tau_v \circ g$ avec $v \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}) = \Delta$ et $g \in \mathrm{Isom}(E)$ une isométrie ayant au moins un point fixe O. Comme $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ est la symétrie orthogonale par rapport à Δ, on déduit que g est la symétrie orthogonale (affine) par rapport à $O+\Delta$. L'application f, composée de la symétrie orthogonale g et de la translation τ_v dont le vecteur v appartient à la direction de l'axe de g, est appelée **symétrie glissée** d'axe $O+\Delta$ et de vecteur de glissement v.



5.4 Classification en dimension 3

Dans cette section, on travaille dans un espace affine euclidien orienté E de dimension 3.

Rappels sur les isométries vectorielles de $\overrightarrow{E}$

Soit $u \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$. Si u est une isométrie directe, il existe une base orthonormée directe dans laquelle la matrice de u s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ bien défini modulo $2\pi\mathbb{Z}$ et au signe près. Si On dit que u est la rotation d'angle θ autour de l'axe $\Delta := \mathrm{Vect}(e_1)$. Lorsque $\theta \neq 0$, la droite Δ est caractérisée par $\Delta = \ker(u - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$. Lorsque $\theta = 0$, l'isométrie u n'est autre que l'identité.

Si u est une isométrie indirecte, il existe une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) dans laquelle sa matrice s'écrit:

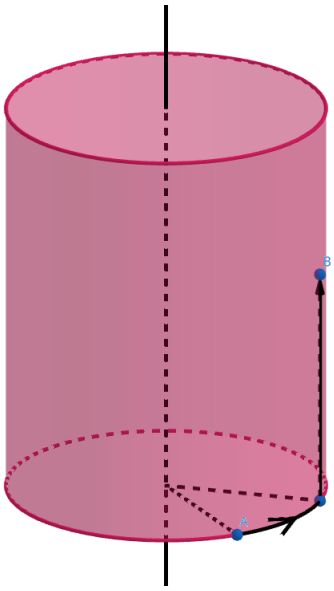
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ bien défini modulo $2\pi\mathbb{Z}$ et au signe près. Ainsi u est la composée (dans n'importe quel ordre) de la rotation d'angle θ autour de l'axe $\Delta = \langle e_1 \rangle$ et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\Pi = \langle e_2, e_3 \rangle = \Delta^{\perp}$. On dit que u est l'anti-rotation d'axe Δ et d'angle θ. Bien sûr, dès que $\theta \neq \pi$, on peut caractériser Δ en écrivant $\Delta = \ker(u + \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$. Lorsque $\theta = \pi$, l'isométrie u n'est autre que la symétrie centrale (par rapport à 0).

Déplacements

Soit f un déplacement de E. On a alors $\overrightarrow{f} \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$. Deux cas se présentent:

1. Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$, alors f est une translation.
2. Supposons que $\overrightarrow{f} \neq \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$. Alors $\overrightarrow{f}$ est la rotation d'angle θ autour de l'axe $\Delta = \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ pour un certain $\theta \neq 0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Appliquons le Théorème 5.2.1 à f. Cela permet d'écrire $f = \tau_v \circ g$ avec $v \in \Delta = \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ et $g \in \mathrm{Isom}(E)$ une isométrie ayant au moins un point fixe O. Comme $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ est la rotation d'angle θ autour de l'axe Δ, on déduit que g est la rotation (affine) autour de la droite $O + \Delta$ d'angle θ.
   L'application f, composée de la rotation affine g et de la translation τ_v dont le vectieur v appartient à la direction de l'axe de g, est appelée **vissage** d'axe $O + \Delta$, d'angle θ et de vecteur de glissement v. Lorsque $v = 0$, on dit que f est la **rotation** d'axe $O + \Delta$ et d'angle θ.

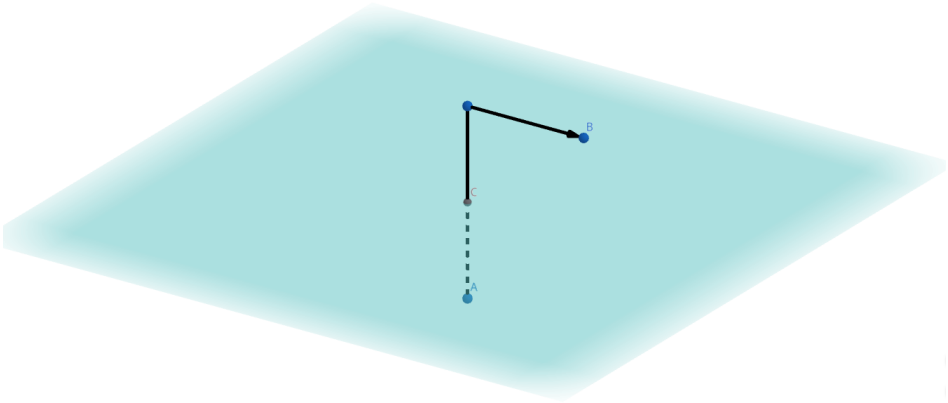


Antidéplacements

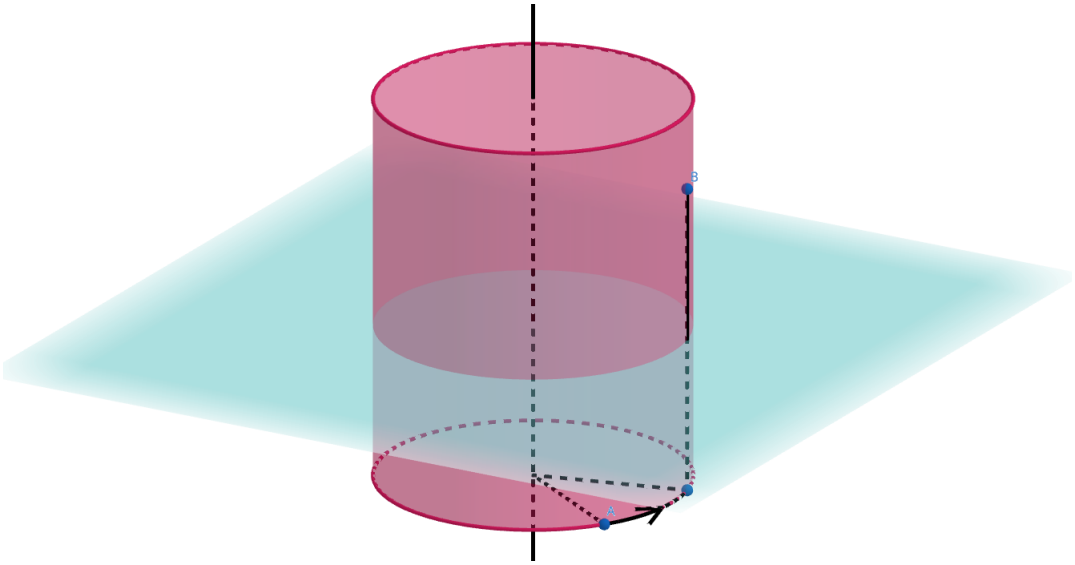
Soit f un antidéplacement de E. On a alors $\overrightarrow{f} \in \mathrm{O}(\overrightarrow{E}) \setminus \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ et $\overrightarrow{f}$ est une anti-rotation d'angle θ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ bien défini modulo $2\pi\mathbb{Z}$ et au signe près. Deux cas se présentent:

1. Supposons d'abord que $\theta = 0$. Dans ce cas, $\overrightarrow{f}$ est la symétrie orthogonale par rapport au plan $\Pi := \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$. Appliquons le Théorème 5.2.1 à f. Cela permet d'écrire $f = \tau_v \circ g$ avec $v \in \Pi = \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ et $g \in \mathrm{Isom}(E)$ une isométrie ayant au moins un point fixe O. Comme $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ est la symétrie orthogonale par rapport à Π, on déduit que g est la réflexion (affine) par rapport au plan $O + \Pi$.

L'application f, composée de la réflexion g et de la translation τ_v dont le vectieur v appartient à la direction du plan de réflexion de g, est appelée **réflexion glissée** de plan $O+\Pi$ et de vecteur de glissement v.



2. Supposons finalement que $\theta \neq 0$. Alors $\overrightarrow{f}$ est l'anti-rotation d'axe Δ et d'angle θ pour une certaine droite Δ. De plus, $\overrightarrow{f}$ n'admet pas 1 comme valeur propre, donc f admet un unique point fixe, que l'on note O. On déduit alors que f est la composée (dans n'importe quel ordre) de la rotation d'axe $O+\Delta$ et d'angle θ et de la réflexion par rapport au plan $O+\Delta^{\perp}$. On dit que f est l'**anti-rotation affine** d'axe $O+\Delta$, de plan $O+\Delta^{\perp}$ et d'angle θ.



5.5 Groupes d'isométries laissant une partie invariante: l'exemple du groupe diédral

Pour terminer notre étude des isométries affines et des groupes qui leur sont associés, nous allons nous intéresser à des isométries laissant globalement invariante une partie d'un espace affine.

Proposition 5.5.1

Soit E un espace affine euclidien orienté. Soit S une partie de E. L'ensemble:

$$D(S) = \{f \in \mathrm{Isom}(E) : f(S) = S\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(E)$.

Preuve. On a bien $\mathrm{Id}_E \in D(S)$ et si $f, g \in D(S)$, alors $(f \circ g)(S) = f(S) = S$ et $f^{-1}(S) = S$. On déduit que $D(S)$ est bien un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(E)$. □

Explicitons un exemple fondamental. On suppose à partir de maintenant que E est un plan affine euclidien orienté et on se donne $n \geq 3$. On fixe deux points distincts $O, A \in E$, on introduit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et on pose $A_i = r^i(A)$ pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Soit $S = \{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$.

Proposition 5.5.2

Le groupe $D(S)$ est d'ordre $2n$. Si s désigne la symétrie d'axe (OA), ses élements sont les r^i et les $r^i s$ avec $0 \leq i \leq n-1$.

Preuve. Pour $0 \leq i, j \leq n-1$, on a:

- $r^i(A_j) = r^i r^j(A) = r^{i+j}(A) = A_k$ où k est l'entier entre 0 et $n-1$ tel que $i + j \equiv k \mod n$;
- $s(A_j) = s(r^j(A)) = r^{-j}(s(A)) = r^{-j}(A) = A_l$ où l est l'entier entre 0 et $n-1$ tel que $-j \equiv l \mod n$.

On déduit que $r, s \in D(S)$. Comme $D(S)$ est un groupe, il contient les r^i et les $r^i s$ avec $0 \leq i \leq n-1$.

Reste à vérifier que $D(S)$ n'a pas d'autres éléments. Soit $f \in D(S)$ et prenons $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $f(A) = A_j$. On a alors $r^{-j}(f(A)) = A$. De plus, comme $r^{-j} \circ f$ préserve les barycentres et O est l'isobarycentre de $A_0, \ldots, A_{n-1}$, on a aussi $r^{-j}(f(O)) = O$. Or les seules isométries vectorielles de $\vec{E}$ fixant $\overrightarrow{OA}$ sont l'identité et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}\overrightarrow{OA}$. Donc les seules isométries

affines de E fixant O et A sont l'identité et s. On déduit que $f = r^j$ ou $f = r^j s$. □

Définition 5.5.3

Le groupe $D(S)$ étudié dans la proposition précédente s'appelle le **groupe diédral**. Il est généralement noté D_{2n}.

5.6 Angles dans un plan affine euclidien

Dans cette section, nous allons utiliser les isométries afin de retrouver un certain nombre de résultats classiques de géométrie plane. Pour cela, nous travaillons dans un plan affine euclidien orienté E fixé.

5.6.1 Angles orientés entre vecteurs

Nous allons d'abord définir la notion d'angle entre deux vecteurs non nuls. Pour cela, nous commençons par établir quelques résultats portant sur l'action de $\mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ sur $\overrightarrow{E}$.

Proposition 5.6.1

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des vecteurs unitaires de $\overrightarrow{E}$. Le groupe $\mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ agit simplement transitivement sur $\mathscr{C}$.

Preuve. Soient $u, u' \in \mathscr{C}$. On complète u en une base orthonormée directe (u, v) et on écrit $u' = au + bv$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. La seule rotation dans $\mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ qui envoie u sur u' est alors celle qui s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans la base (u, v). □

Proposition 5.6.2

Soit $X = \overrightarrow{E} \setminus \{0\}$.

1. Sur $X \times X$, on définit une relation d'équivalence de la manière suivante: $(u, u') \sim (v, v')$ si, et seulement si, il existe une rotation $r \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ telle que $r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$ et $r\left(\frac{u'}{\|u'\|}\right) = \frac{v'}{\|v'\|}$.

2. On a une bijection:

$$\begin{aligned}\varphi : (X \times X)/\sim &\to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\\ \overline{(u,u')} &\mapsto \theta\end{aligned}$$

où θ est l'angle (modulo 2π) de l'unique rotation de $\overrightarrow{E}$ qui envoie $\frac{u}{\|u\|}$ sur $\frac{u'}{\|u'\|}$.

Preuve. 1. On vérifie les axiomes d'une relation d'équivalence:

(a) *Réflexivité:* pour $(u,u') \in X$, on a $\mathrm{Id}\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{u}{\|u\|}$ et $\mathrm{Id}\left(\frac{u'}{\|u'\|}\right) = \frac{u'}{\|u'\|}$, donc $(u,u') \sim (u,u')$.

(b) *Symétrie:* si $(u,u') \sim (v,v')$, alors il existe $r \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ tel que $r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$ et $r\left(\frac{u'}{\|u'\|}\right) = \frac{v'}{\|v'\|}$. On a alors $r^{-1}\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{u}{\|u\|}$ et $r^{-1}\left(\frac{v'}{\|v'\|}\right) = \frac{u'}{\|u'\|}$ avec $r^{-1} \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$, et donc $(v,v') \sim (u,u')$.

(c) *Transitivité:* si $(u,u') \sim (v,v')$ et $(v,v') \sim (w,w')$, alors il existe $r_1, r_2 \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ tels que:

$$\begin{aligned} r_1\left(\frac{u}{\|u\|}\right) &= \frac{v}{\|v\|}, \quad r_1\left(\frac{u'}{\|u'\|}\right) = \frac{v'}{\|v'\|},\\ r_2\left(\frac{v}{\|v\|}\right) &= \frac{w}{\|w\|}, \quad r_2\left(\frac{v'}{\|v'\|}\right) = \frac{w'}{\|w'\|}. \end{aligned}$$

On a donc:

$$(r_2 \circ r_1)\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{w}{\|w\|}, \quad (r_2 \circ r_1)\left(\frac{u'}{\|u'\|}\right) = \frac{w'}{\|w'\|},$$

d'où $(u,u') \sim (w,w')$.

2. Vérifions d'abord que φ est bien définie. Soient (u,u') et (v,v') dans $X \times X$ tels que $(u,u') \sim (v,v')$. Il existe alors $r \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ une rotation telle que $r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$ et $r\left(\frac{u'}{\|u'\|}\right) = \frac{v'}{\|v'\|}$. Notons aussi $r' \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ l'unique rotation qui envoie $\frac{u}{\|u\|}$ sur $\frac{u'}{\|u'\|}$. Comme le groupe $\mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ est abélien, on a:

$$r'\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = r' \circ r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = r \circ r'\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = r\left(\frac{u'}{\|u'\|}\right) = \frac{v'}{\|v'\|}.$$

On a donc $\varphi(\overline{(u,u')}) = \varphi(\overline{(v,v')})$, et φ est bien définie. Elle est surjective car $\theta = \varphi\left(\overline{(u,r(u))}\right)$ pour u n'importe quel élément de X et $r \in \mathrm{SO}(\vec{E})$ la rotation d'angle θ.

Reste à prouver l'injectivité de φ. Si $(u,u'),(v,v') \in X \times X$ sont tels que $\varphi(\overline{(u,u')}) = \varphi(\overline{(v,v')})$, alors il existe une rotation $r \in \mathrm{SO}(\vec{E})$ telle que:

$$r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{u'}{\|u'\|}, \quad r\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{v'}{\|v'\|}.$$

Si r' est l'unique rotation qui envoie $\frac{u}{\|u\|}$ sur $\frac{v}{\|v\|}$, alors:

$$r'\left(\frac{u'}{\|u'\|}\right) = r' \circ r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = r \circ r'\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v'}{\|v'\|}.$$

On a donc $(u,u') \sim (v,v')$, d'où l'injectivité de φ.

□

On est finalement en mesure de définir un angle entre deux vecteurs:

Définition 5.6.3

On garde les notations de la proposition précédente. Un **angle orienté entre vecteurs** est un élément du quotient $(X \times X)/\sim$, c'est-à-dire une classe d'équivalence pour la relation $\sim$ sur $X \times X$. Sa **mesure** est son image par φ. Si $(u,u') \in X \times X$, on note généralement la mesure de son angle orienté $\widehat{(u,u')}$.

5.6.2 Angles orientés entre droites

Nous allons maintenant définir la notion d'angle entre deux droites. La stratégie est très similaire à celle de la section précédente.

Définition 5.6.4

Soit Y l'ensemble des droites (vectorielles) de $\vec{E}$. On considère l'action diagonale de $\mathrm{SO}(\vec{E})$ sur $Y \times Y$. Un **angle orienté entre deux droites** est une orbite pour cette action.

La proposition suivante va nous permettre d'associer une mesure à un angle entre deux droites:

Proposition 5.6.5

L'application:

$$\psi : (Y \times Y)/\mathrm{SO}(\vec{E}) \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$$
$$\overline{(\Delta_1, \Delta_2)} \mapsto \theta$$

où θ est l'angle d'une rotation de $\mathrm{SO}(\vec{E})$ envoyant Δ_1 sur Δ_2 est bien définie et est bijective.

Preuve. Montrons d'abord que ψ est bien définie. Donnons-nous $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 \in Y$ telles que $\overline{(\Delta_1, \Delta_2)} = \overline{(\Delta_3, \Delta_4)}$. Soient $r, r' \in \mathrm{SO}(\vec{E})$ des rotations telles que $r(\Delta_1) = \Delta_2$ et $r'(\Delta_3) = \Delta_4$. Soient θ et θ' les angles de r et r' respectivement. On cherche à montrer que $\theta \equiv \theta' \mod \pi\mathbb{Z}$.

Comme $\overline{(\Delta_1, \Delta_2)} = \overline{(\Delta_3, \Delta_4)}$, il existe une rotation $\rho \in \mathrm{SO}(\vec{E})$ telle que $\rho(\Delta_1) = \Delta_3$ et $\rho(\Delta_2) = \Delta_4$. Soit u_1 un vecteur directeur unitaire de Δ_1. On pose $u_3 = \rho(u_1)$. On remarque alors que $r(u_3) = r(\rho(u_1)) = \rho(r(u_1))$ et $r'(u_3)$ sont des vecteurs directeurs unitaires de Δ_4. On a donc $r(u_3) = \pm r'(u_3)$, ce qui signifie que la rotation $\pm r \circ r'^{-1}$ fixe u_3. Ainsi, $\pm r \circ r'^{-1}$ est l'identité, et on a bien $\theta \equiv \theta' \mod \pi\mathbb{Z}$.

Maintenant que l'on sait que ψ est bien définie, il reste à prouver sa bijectivité. Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, on remarque que la classe de θ modulo $\pi\mathbb{Z}$ est l'image de $\overline{(\Delta, r(\Delta))}$ où Δ est n'importe quelle droite de $\vec{E}$ et r est la rotation d'angle θ. Ainsi ψ est bien surjective.

Quant l'injectivité, on se donne quatre droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 \in Y$ telles que $\psi(\overline{(\Delta_1, \Delta_2)}) = \psi(\overline{(\Delta_3, \Delta_4)})$. Il existe alors une rotation $r \in \mathrm{SO}(\vec{E})$ telle que $r(\Delta_1) = \Delta_2$ et $r(\Delta_3) = \pm r(\Delta_3) = \Delta_4$. Soient u_1 et u_3 des vecteurs directeurs unitaires de Δ_1 et Δ_3 respectivement et soit $\rho \in \mathrm{SO}(\vec{E})$ la rotation telle que $\rho(u_1) = u_3$. On a alors $\rho(\Delta_1) = \Delta_3$ et:

$$\rho(\Delta_2) = \rho(r(\Delta_1)) = r(\rho(\Delta_1)) = r(\Delta_3) = \Delta_4.$$

On déduit que $\overline{(\Delta_1, \Delta_2)} = \overline{(\Delta_3, \Delta_4)}$, et donc que ψ est injective. □

Définition 5.6.6

On garde les notations précédentes. La **mesure** d'un angle orienté entre deux droites est son image par ψ dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Lorsque A, B, C sont trois points de E avec $A \neq B$ et $A \neq C$, la mesure de l'angle orienté entre les droites (AB) et (AC) sera notée $\widehat{BAC}$.

Remarque 5.6.7. Si A, B, C sont trois points de E avec $A \neq B$ et $A \neq C$, alors $\widehat{BAC} \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ est la classe modulo π de $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

5.6.3 Quelques propriétés et applications

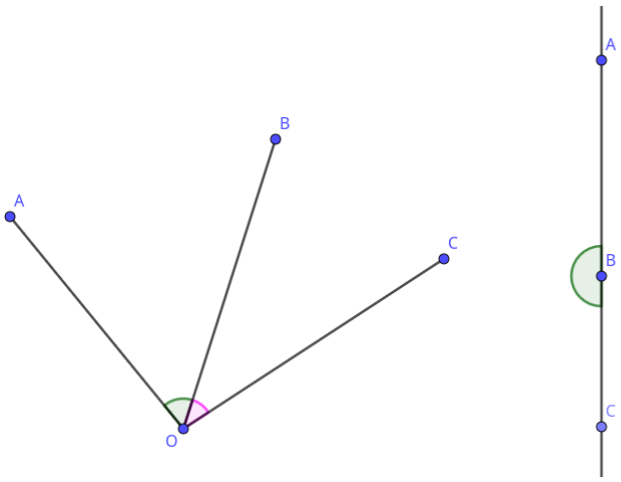
Maintenant que nous avons défini la notion d'angle, nous sommes en mesure de retrouver de nombreux résultats classiques et jolis de géométrie plane.

Additivité des angles et alignement

Proposition 5.6.8

1. Soient O, A, B, C quatre points de E avec $O \neq A$, $O \neq B$ et $O \neq C$. Alors:
$$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$
$$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC} \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}.$$

2. Soient A, B, C trois points de E avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Les points A, B, C sont alignés si, et seulement si, $\widehat{BAC} = 0 \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.



Preuve. 1. Soit r (resp. r') la rotation dans $\mathrm{SO}(\vec{E})$ envoyant $\frac{\overrightarrow{OA}}{OA}$ (resp. $\frac{\overrightarrow{OB}}{OB}$) sur $\frac{\overrightarrow{OB}}{OB}$ (resp. $\frac{\overrightarrow{OC}}{OC}$). Soient θ et θ' les angles de r et r'. Alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$ qui envoie $\frac{\overrightarrow{OA}}{OA}$ sur $\frac{\overrightarrow{OC}}{OC}$. On déduit que:
$$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = \theta + \theta' = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}).$$

La deuxième égalité en découle grâce à la remarque 5.6.7.

2. Les points A, B, C sont alignés si, et seulement si, les droites $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB})$ et $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AC})$ sont confondues. Cela équivaut à ce que l'identité envoie $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB})$ sur $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AC})$, ce qui signifie que $\widehat{BAC} = 0 \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

□

Angles et isométries

Proposition 5.6.9

Soit $f \in \mathrm{Isom}(E)$. Soient $A, B, C \in E$ avec $A \neq B$ et $A \neq C$. On pose $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$. Alors:

$$\widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})} = \begin{cases} \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} & \text{si } f \text{ est directe} \\ -\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} & \text{si } f \text{ est indirecte.} \end{cases}$$

Preuve. Soit $r \in \mathrm{SO}(\vec{E})$ la rotation telle que $r\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}\right) = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$.

- Si f est une rotation, alors $r \circ \vec{f} = \vec{f} \circ r$, et donc $r\left(\frac{\overrightarrow{A'B'}}{A'B'}\right) = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{A'C'}$.
- Si f est une symétrie, alors $r^{-1} \circ \vec{f} = \vec{f} \circ r$, et donc $r^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{A'B'}}{A'B'}\right) = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{A'C'}$.

Dans les deux cas, on déduit la formule de l'énoncé. □

Voici un petit corollaire utile:

Corollaire 5.6.10

Soit ABC un triangle non aplati et isocèle en A (c'est-à-dire $AB = AC$). Alors:

$$\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})} = -\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}.$$

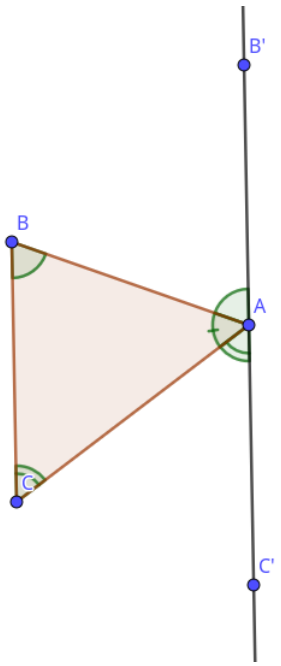
Preuve. Soit Δ la médiatrice de $[BC]$. Comme $AB = AC$, on a $A \in \Delta$. Du coup, la symétrie orthogonale par rapport à Δ fixe A et échange B et C. La proposition précédente permet donc de conclure. □

Somme des angles d'un triangle

Proposition 5.6.11

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts de E. Alors:

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$



Preuve. On considère les points B' et C' tels que $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BC}$. On a $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AB'}$, donc $\widehat{(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'})} = \pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Mais on a aussi:

$$\begin{aligned}
\widehat{(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'})} &= \widehat{(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'})} \\
&= \widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})} \\
&= \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}.
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat. □

Angles et produit scalaire

Proposition 5.6.12

Soient A, B, C trois points de E avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Soit $\theta = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$. Alors:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = AB \cdot AC \cdot \cos\theta.$$

En particulier, les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si, et seulement si, $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$.

Preuve. On pose $e_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ et on complète e_1 en une base orthonormée directe (e_1, e_2) de $\overrightarrow{E}$. On travaille dans le repère (A, e_1, e_2) de E.

Soient (x, y) les coordonnées de C. Soit r la rotation d'angle θ. On a $r(e_1) = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$, donc:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{AC} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Du coup:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = AB \cdot x = AB \cdot AC \cdot \cos\theta.$$

En particulier, (AB) et (AC) sont orthogonales si, et seulement si, $\cos\theta = 0$, ce qui signifie que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$. □

Voici une application très pratique de la proposition précédente, qui permet de calculer le cosinus d'un angle dans un triangle à partir des longueurs des côtés:

Théorème 5.6.13 (Formule d'Al-Kashi)

Soient A, B, C trois points de E avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Soit $\theta = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$. Alors:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\theta.$$

Preuve. On a:

$$\begin{aligned} 2AB \cdot AC \cos\theta &= 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \rangle \\ &= AC^2 + \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \rangle + AB^2 + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle \\ &= AB^2 + AC^2 - BC^2. \end{aligned}$$

□

Via la formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on peut alors déduire:

Théorème 5.6.14 (Loi des sinus)

Soient A, B, C trois points de E avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Soient $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$, $\beta = \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}$ et $\gamma = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$. Alors:

$$\frac{|\sin\alpha|}{BC} = \frac{|\sin\beta|}{AC} = \frac{|\sin\gamma|}{AB}.$$

Preuve. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, puis on utilise la formule d'Al-Kashi:

$$\begin{aligned} (\sin\alpha)^2 &= 1 - (\cos\alpha)^2 \\ &= 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} \\ &= \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4b^2c^2}. \end{aligned}$$

De même, on obtient:

$$(\sin\beta)^2 = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4a^2c^2},$$
$$(\sin\gamma)^2 = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4a^2b^2}.$$

Donc:

$$(\sin\alpha)^2 = \frac{a^2}{b^2}(\sin\beta)^2 = \frac{a^2}{c^2}(\sin\gamma)^2,$$

et la loi des sinus découle immédiatement. □

La loi des sinus permet d'obtenir très facilement la réciproque au Corollaire 5.6.3:

Corollaire 5.6.15

Soit ABC un triangle non aplati tel que:

$$\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})} = -\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}.$$

Alors ABC est isocèle en A.

Preuve. On pose $\beta = \widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}$ et $\gamma = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$. La loi des sinus et l'égalité $|\sin\beta| = |\sin\gamma|$ montrent alors que $AB = AC$. □

Bissectrices

Proposition 5.6.16

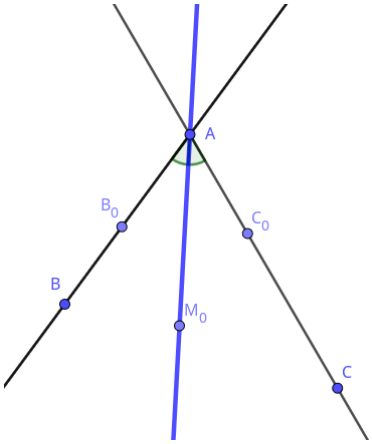
Soient A, B, C trois points non alignés de E. L'ensemble des points $M \in E$ tels que $M = A$ ou $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})} = \widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})}$ est une droite. Un vecteur directeur est donné par $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$.

Preuve.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \theta \mod 2\pi$. Pour $M \in E \setminus \{A\}$, on a:

$$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})} = \widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})} \Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})} = \frac{\theta}{2} \mod \pi \Leftrightarrow \widehat{BAM} = \frac{\theta}{2}.$$

On déduit que l'ensemble recherché est bien une droite Δ.

Reste à prouver que, si B_0 et C_0 sont les points tels que $\overrightarrow{AB_0} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ et $\overrightarrow{AC_0} = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$, alors le point M_0 tel que $\overrightarrow{AM_0} = \overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0}$ appartient à Δ. Pour ce faire, on commence par remarquer que $AB_0 = AC_0 = M_0B_0 = M_0C_0 = 1$. La droite (AM_0) est donc la médiatrice de $[B_0C_0]$, et, si s est la symétrie orthogonale par rapport à (AM_0), on a $s(B_0) = C_0$. Du coup, d'après la Proposition 5.6.9:



$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM_0}) = -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM_0}) = (\overrightarrow{AM_0}, \overrightarrow{AC}),$$

et M_0 appartient bien à Δ. □

Définition 5.6.17

La droite de la proposition précédente est appelée **bissectrice** de l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ au point A.

Nous pouvons maintenant retrouver le résultat suivant, que vous connaissez bien depuis longtemps:

Proposition 5.6.18

Soient A, B, C trois points non alignés de E. Les bissectrices des angles formés par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en A, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ en B, et $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ en C sont concourantes. Ces droites sont appelées les bissectrices du triangle ABC.

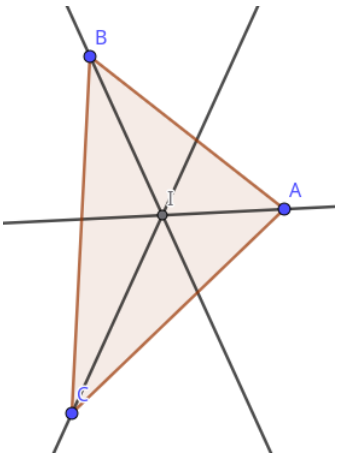
Preuve. On considère

$$I = \mathrm{Bar}((A,a),(B,b),(C,c))$$

avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Par associativité du barycentre, $I = \mathrm{Bar}((A,a),(D,b+c))$ avec:

$$D = \mathrm{Bar}((B,b),(C,c)) = \mathrm{Bar}((B,1/c),(C,1/b)).$$

Or, d'après la Proposition 5.6.16, la droite (AD) est la bissectrice de ABC issue de A. On déduit que I est sur cette bissectrice, et de manière analogue, il est sur les deux autres bissectrices de ABC. □



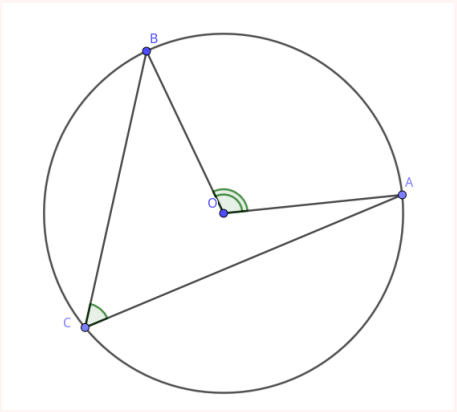
Théorème de l'angle au centre et cocyclicité

Théorème 5.6.19 (Théorème de l'angle au centre)

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O dans E. On se donne deux points distincts $A, B \in \mathscr{C}$ ainsi qu'un point $C \in E$ différent de A et B. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $C \in \mathscr{C}$;

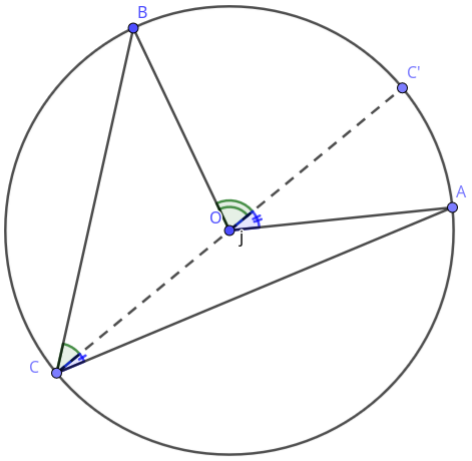
(ii) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \in \mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z}$.



Preuve.

On suppose d'abord (i), et on note C' le symétrique de C par rapport à O. Ainsi $[CC']$ est un diamètre de $\mathscr{C}$. Soit M un point quelconque de $\mathscr{C}$. Comme le triangle OMC' est isocèle en O, on a:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC'}) &= \pi - (\overrightarrow{MC'}, \overrightarrow{MO}) - (\overrightarrow{C'O}, \overrightarrow{C'M}) \\ &= \pi - 2(\overrightarrow{C'O}, \overrightarrow{C'M}) \\ &= \pi - 2(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{C'M})\end{aligned}$$



Or, d'après la Proposition 4.3.2, les droites (MC) et (MC') sont orthogonales, et donc:

$$(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{C'M}) = \pi - (\overrightarrow{MC'}, \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CC'}) = \pi \pm \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CC'}) = \pm\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CC'}).$$

On déduit que:

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC'}) = \pi - \pi + 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CC'}) = 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CC'}).$$

En appliquant cette égalité avec $M = A$ et avec $M = B$, on obtient:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC'}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC'}) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'}) = 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC'}).$$

Du coup:

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC'}) + (\overrightarrow{OC'},\overrightarrow{OB}) = 2((\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CC'}) + (\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{CB})) = 2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$$

On suppose maintenant (ii). Soient $\mathscr{C}'$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O' son centre. D'après l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii), on a:

$$2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'B}).$$

Ainsi, les triangles OAB et $O'AB$ étant isocèles en O et O' respectivement:

$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}) &= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}) = \pi - (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \\ &= \pi - (\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'B}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO'}) + (\overrightarrow{BO'},\overrightarrow{BA}) = 2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO'}). \end{aligned}$$

On déduit que $\widehat{BAO} = \widehat{BAO'}$, puis que $O' \in A + \mathbb{R}\overrightarrow{AO}$. Si Δ est la médiatrice de $[AB]$, on obtient:

$$\{O\} = \Delta \cap (A + \mathbb{R}\overrightarrow{AO}) = \{O'\},$$

d'où $O = O'$, $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$ et $C \in \mathscr{C}$. □

Le théorème de l'angle au centre est utile pour comprendre la notion de cocyclicité:

Définition 5.6.20

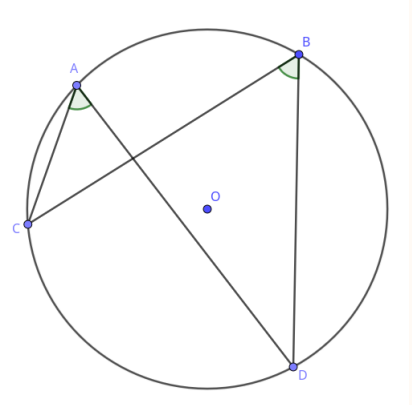
Quatre points de E sont dits **cocycliques** s'il existe un cercle les contenant.

Corollaire 5.6.21

Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts de E. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$;

(ii) les points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques.



Preuve. On suppose (ii). Si A,B,C,D sont alignés, alors $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 0$. On suppose désormais que A,B,C,D sont cocycliques. Soit $\mathscr{C}$ un cercle contenant A,B,C,D et soit O son centre. Alors:

$$2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) = (\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}).$$

Cela prouve que $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

On suppose (i). Si B,C,D sont alignés, alors $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 0$, et donc A,C,D sont alignés. Cela prouve que A,B,C,D sont tous alignés. On suppose désormais que B,C,D ne sont pas alignés. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à BCD et soit O son centre. On a:

$$2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}) = (\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}).$$

Donc $A \in \mathscr{C}$. □

5.7 Similitudes affines

La fin du chapitre est dédiée à une notion plus générale que celle d'isométrie: les similitudes.

5.7.1 Définition et groupe des similitudes

On commence par rappeler la notion de similitude vectorielle:

Définition 5.7.1

Soient V un espace vectoriel euclidien et λ un réel strictement positif.

1. Une **similitude vectorielle** de V de rapport λ est un endomorphisme $u : V \to V$ tel que $\|u(x)\| = \lambda\|x\|$ pour tout $x \in \vec{E}$. Autrement dit, $u = v \circ h = h \circ v$ où v est une isométrie et h est l'homothétie de rapport λ.

2. Une similitude vectorielle est dite **directe** (ou **positive**) si elle est de déterminant positif. Elle est dite **indirecte** (ou **négative**) si elle est de déterminant négatif.

Comme pour les isométries, l'ensemble des similitudes forme un groupe:

Proposition 5.7.2

Soit V un espace vectoriel euclidien. L'ensemble $\mathrm{GO}(V)$ des similitudes vectorielles de V et l'ensemble $\mathrm{GO}^+(V)$ des similitudes vectorielles directes de V sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}(V)$.

Preuve. Par définition, le noyau d'une similitude vectorielle est nul. Ainsi, les similitudes de V sont injectives, donc bijectives vu que V est de dimension finie. Cela prouve que $\mathrm{GO}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$. De plus, $\mathrm{Id} \in \mathrm{GO}(V)$, et si f est une similitude de rapport λ et g une similitude de rapport μ, alors pour $x \in V$:

$$\|f(g^{-1}(x))\| = \lambda\|g^{-1}(u)\| = \lambda\mu^{-1}\|g(g^{-1}(u))\| = \lambda\mu^{-1}\|u\|.$$

Cela prouve que $f \circ g^{-1}$ est une similitude et que $\mathrm{GO}(V)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$.

Finalement, on remarque $\mathrm{GO}^+(V)$ est l'image inverse de $\mathbb{R}_+^\times$ via le déterminant $\det : \mathrm{GO}(V) \to \mathbb{R}^\times$. En tant qu'image inverse d'un sous-groupe, $\mathrm{GO}^+(V)$ est bien sous-groupe de $\mathrm{GO}(V)$. □

On termine notre discussion sur les similitudes vectorielles en fournissant une caractérisarion via l'orthogonalité:

Théorème 5.7.3

Soit V un espace vectoriel euclidien. Soit $u : V \to V$ un endomorphisme non nul. Alors u est une similitude vectorielle si, et seulement si, u préserve l'orthogonalité.

Preuve. Les homothéties et les isométries préservent l'orthogonalité. Il en est donc de même des similitudes vectorielles, qui sont des composées d'une homothétie et d'une isométrie.

Soit maintenant u un endomorphisme non nul de V préservant l'orthogonalité. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de V. Alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille orthogonale. De plus, pour $i \neq j$, les vecteurs $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$ sont orthogonaux. Il en est donc de même de $u(e_i) + u(e_j)$ et $u(e_i) - u(e_j)$. Donc:

$$0 = \langle u(e_i) + u(e_j), u(e_i) - u(e_j)\rangle = \|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2.$$

On déduit que $\|u(e_1)\| = \cdots = \|u(e_n)\|$. On pose $\lambda := \|u(e_1)\|$. Comme u est non nul, $\lambda > 0$, et $\frac{u}{\lambda}$ envoie $(e_1, \ldots, e_n)$ sur une base orthonormée. Autrement dit, $\frac{u}{\lambda}$ est une isométrie, et donc u est une similitude de rapport λ. □

Passons maintenant à la notion de similitude affine.

Définition 5.7.4

Soient E un espace affine euclidien et λ un réel strictement positif.

1. Une **similitude affine** de E de rapport λ est une application affine $f : E \to E$ telle que $f(A)f(B) = \lambda AB$ pour tous $A, B \in E$. De manière équivalente, cela signifie que $\overrightarrow{f}$ est une similitude vectorielle de $\overrightarrow{E}$ de rapport λ.

2. Une similitude affine est dite **directe** ou **positive** (resp. **indirecte** ou **négative**) si sa partie linéaire l'est.

Comme pour les isométries, l'ensemble des similitudes affines est un groupe ayant une structure bien particulière:

Proposition 5.7.5

Soit E un espace affine euclidien.

1. L'ensemble $\mathrm{Sim}(E)$ des similitudes affines de E est un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{GA}(E)$. Il s'insère dans une suite exacte:

$$1 \to \overrightarrow{E} \to \mathrm{Sim}(E) \to \mathrm{GO}(\overrightarrow{E}) \to 1.$$

   Cette suite est scindée et donc $\mathrm{Sim}(E)$ est un produit semi-direct de $\overrightarrow{E}$ par $\mathrm{GO}(\overrightarrow{E})$.

2. L'ensemble $\mathrm{Sim}^+(E)$ des similitudes affines directes de E est un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{GA}(E)$. Il s'insère dans une suite exacte:

$$1 \to \overrightarrow{E} \to \mathrm{Sim}^+(E) \to \mathrm{GO}^+(\overrightarrow{E}) \to 1.$$

   Cette suite est scindée et donc $\mathrm{Sim}^+(E)$ est un produit semi-direct de $\overrightarrow{E}$ par $\mathrm{GO}^+(\overrightarrow{E})$.

Preuve. Cela se prouve de la même manière que la Proposition 5.1.4. □

5.7.2 Similitudes planes et nombres complexes

Nous allons désormais étudier en détail les similitudes affines planes. On fixe donc un plan affine euclidien orienté E.

Proposition 5.7.6

Soit $f : E \to E$ une bijection affine. Alors f est une similitude directe (resp. indirecte) si, et seulement si, elle préserve (resp. renverse) les angles orientés.

Preuve. Si f préserve les angles orientés ou les renverse, alors la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ préverse l'orthogonalité: f est donc une similitude affine d'après le Théorème 5.7.3. Réciproquement, si f est une similitude affine, alors $\overrightarrow{f}$ est la composée d'une homothétie et une isométrie. Ainsi, elle préserve ou renverse les angles orientés selon qu'elle soit directe ou indirecte. □

Comme E est un plan affine euclidien orienté, il peut être identifié avec $\mathbb{C}$. Les similitudes affines de $\mathbb{C}$ peuvent alors être décrites de manière très explicite:

Proposition 5.7.7

1. Une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude affine directe si, et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ tels que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. Une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude affine indirecte si, et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ tels que $f(z) = a\bar{z} + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Preuve. 1. Fixons $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et considérons l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = az + b$. Écrivons $a = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors $f = t \circ r \circ h$ où t, r et h sont les applications $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par $t(z) = z + b$, $r(z) = e^{i\theta} z$ et $h(z) = \rho z$. Or t est la translation de vecteur d'affixe b, r est la rotation de centre 0 et d'angle θ, et h est l'homothétie de centre 0 et de rapport ρ. En tant que composée de similitudes directes, f est une similitude directe.

   Réciproquement, supposons que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude affine directe. On a $f(1) \neq f(0)$, donc on peut considérer $g = g' \circ f$ où g' est la similitude directe définie par $g'(z) = \frac{z - f(0)}{f(1) - f(0)}$. En tant que composée de similitudes directes, g est une similitude directe et elle vérifie $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. C'est donc en fait un déplacement fixant 0 et 1. Cela impose que $g = \mathrm{Id}$ et donc $f = g'^{-1} : z \mapsto (f(1) - f(0))z + f(0)$.

2. On considère $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la conjugaison complexe. C'est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses, donc c'est une similitude indirecte. Du coup, f est une similitude indirecte si, et seulement si, $g := f \circ s$

est une similitude directe. Cela équivaut à ce qu'il existe $a \in \mathbb{C}^\times$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $g(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Comme $f = g \circ s$, cela signifie aussi que $f(z) = a\bar{z} + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

□

Remarque 5.7.8. Soient A, B, A', B' quatre points de E tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Il existe alors une unique similitude directe f de E telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. En effet, en notation complexe, on cherche f sous la forme $z \mapsto az + b$, et donc on cherche $a \in \mathbb{C}^\times$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que:

$$\begin{cases} az_A + b = z_{A'} \\ az_B + b = z_{B'}. \end{cases}$$

Ce système admet bien une unique solution: $a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B}$ et $b = z_{A'} - \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} z_A$. Bien sûr, si $AB = A'B'$, la similitude f est nécessairement une isométrie.

La Proposition 5.7.7 permet d'introduire quelques éléments caractéristiques des similitudes directes:

Définition 5.7.9

Soit f une similitude directe de $\mathbb{C}$ qui n'est pas une translation. Il existe $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le rapport de f est égal au module de a. L'argument de a est appelé **angle** de f. L'unique point fixe de f est appelé **centre** de f.

5.7.3 Triangles isométriques et semblables

On termine le chapitre en retrouvant, grâce aux isométries et aux similitudes, des notions importantes en géométrie du triangle.

Théorème 5.7.10 (Triangles isométriques et semblables)

Soit E un plan affine euclidien orienté. On se donne deux triangles non aplatis ABC et $A'B'C'$.

1. Les propriétés suivantes sont équivalentes:
   (a) il existe une isométrie f de E telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$;
   (b) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$;
   (c) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \pm \widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})}$.

2. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

   (a) il existe une similitude f de E telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$;

   (b) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$;

   (c) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \pm(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$;

   (d) $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \pm(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \pm(\widehat{\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \pm(\widehat{\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}})$.

Preuve. 1. L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) est évidente.

Supposons maintenant (b). Par la formule d'Al-Kashi:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2}{2A'B' \cdot A'C'} = \cos(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}).$$

Donc $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \pm(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ et (c) est vérifiée.

Finalement supposons (c). Quitte à appliquer une symétrie à $A'B'C'$, on peut supposer que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$. Comme $AB = A'B'$, il existe une isométrie directe f telle $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Posons $C'' = f(C)$. On a:

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C''}}),$$

donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\overrightarrow{A'C''} = \lambda \overrightarrow{A'C'}$. Mais $AC'' = AC = AC'$. Donc $\lambda = 1$ et $C' = C''$. Cela prouve (a).

2. Soit h une homothétie quelconque de rapport $\frac{AB}{A'B'}$. Soient A'', B'' et C'' les images respectives de A', B' et C' par h. On a alors:

$$A''B'' = AB, \qquad \frac{A''B''}{A'B'} = \frac{A''C''}{A'C'} = \frac{B''C''}{B'C'},$$
$$(\widehat{\overrightarrow{A''B''}, \overrightarrow{A''C''}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}), \quad (\widehat{\overrightarrow{B''C''}, \overrightarrow{B''A''}}) = (\widehat{\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}}).$$

Les assertions (a), (b) et (c) sont alors respectivement équivalentes à:

(a') il existe une isométrie f de E telle que $f(A) = A''$, $f(B) = B''$ et $f(C) = C''$;

(b') $AC = A''C''$ et $BC = B''C''$;

(c') $AC = A''C''$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm(\overrightarrow{A''B''}, \overrightarrow{A''C''})$.

D'après la partie 1 du théorème, on sait déjà que (a'), (b') et (c') sont équivalentes. Donc (a), (b) et (c) sont équivalentes.

De plus, vu que (a) implique (c) et que la condition (a) est invariante quand on permute les sommets de ABC et ceux de $A'B'C'$, on sait aussi que (a) implique (d). Reste à montrer que (d) implique (c).

Pour ce faire, suffit d'appliquer la loi des sinus:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{|\sin(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})|}{|\sin(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})|} = \frac{|\sin(\widehat{\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}})|}{|\sin(\widehat{\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}})|} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

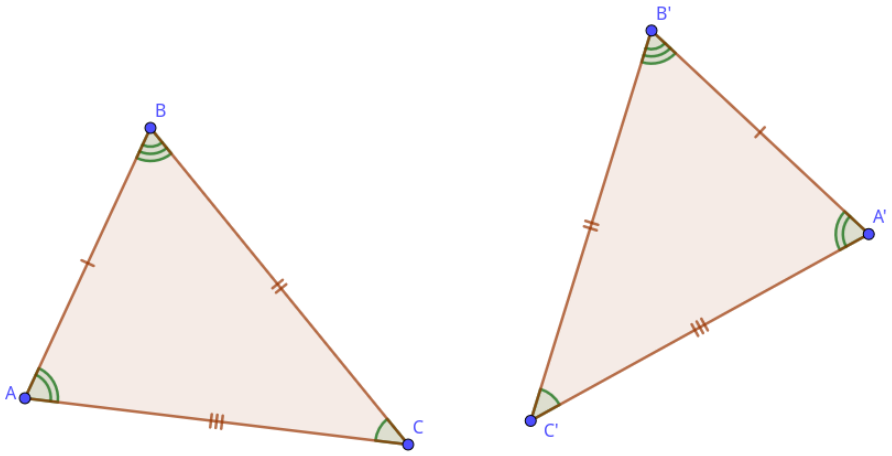
□

Le théorème précédent motive la définition suivante:

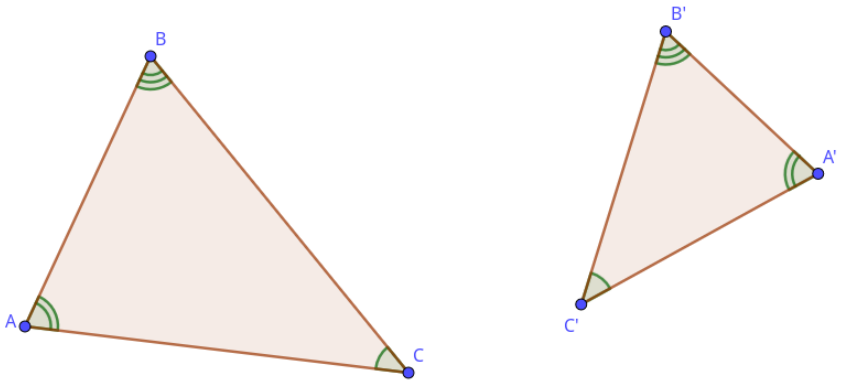
Définition 5.7.11

Avec les notations du théorème précédent, si les conditions de 1 sont satisfaites, on dit que ABC et $A'B'C'$ sont **isométriques**, et si les conditions de 2 sont satisfaites, on dit ABC et $A'B'C'$ sont **semblables**.

Triangles isométriques:



Triangles semblables:



Chapitre 6

Coniques et quadriques

Dans ce dernier chapitre, nous allons définir et étudier les coniques dans le plan et les quadriques dans l'espace. Il s'agit d'objets géométriques qui, en coordonnées cartésiennes, sont définis par des équations de degré 2. Il sera donc utile de faire quelques rappels sur les formes quadratiques.

6.1 Rappels sur les formes quadratiques

On travaille dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension n. On note $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ une base de V. Une forme quadratique sur V est une application de la forme:

$$\begin{aligned} q : V &\to \mathbb{R} \\ x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n &\mapsto {}^tXAX \end{aligned}$$

où $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{ij})$ est une matrice symétrique réelle de taille n. On a donc, pour $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$q(x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j.$$

La matrice A est appelée matrice de q dans la base $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$.

Malgré les apparences, notre définition de forme quadratique ne dépend pas du choix de la base $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$. En effet, si $(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n)$ est une autre base de V et P est la matrice de passage de $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ vers $(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n)$, alors pour $x'_1, \ldots, x'_n \in \mathbb{R}$:

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} x'_i\epsilon'_i\right) = {}^tX'A'X',$$

où $X' := \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ et $A' = {}^tPAP$. On dit que la matrice symétrique réelle A' est la matrice de q dans la base $(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n)$. On remarque A et A' sont de même rang et que $\det A$ et $\det A'$ sont de même signe. Ainsi:

- le rang de la matrice de q dans une base de V est bien défini, on l'appelle le rang de q;
- le signe du déterminant de la matrice de q dans une base de V est bien défini, on l'appelle le discriminant de q.

Revenons maintenant à la matrice A. Comme elle est symétrique réelle, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PD{}^tP$. Du coup, dans la base orthonormée $(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n)$ dont P est matrice de passage depuis $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, la forme quadratique q s'écrit:

$$q(y_1, \ldots, y_n) = \sum_i \delta_i y_i^2.$$

La signature de q est le couple (ρ, σ) où ρ (resp. σ) est le nombre de δ_i qui sont strictement positifs (resp. strictement négatifs).

6.2 Coniques

Dans cette section, on travaille dans un plan affine euclidien E. On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \epsilon_1, \epsilon_2)$.

6.2.1 Définition et classification

Les coniques sont les parties de E définies par des équations cartésiennes de degré 2. Plus précisément:

Définition 6.2.1

Une **conique** est un sous-ensemble $\mathscr{C}$ de E qui est défini dans le repère $\mathscr{R}$ par une équation de la forme:

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy + b_1 x + b_2 y + c = 0,$$

avec $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls.

On introduit la forme quadratique

$$\begin{aligned} q : \overrightarrow{E} &\to \mathbb{R}, \\ x\epsilon_1 + y\epsilon_2 &\mapsto a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy, \end{aligned}$$

de matrice dans la base (ϵ_1, ϵ_2):

$$A_q := \begin{pmatrix} a_1 & a_3/2 \\ a_3/2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

On note $\Delta = \det A_q = \frac{4a_1a_2 - a_3^2}{4}$ le discriminant de q.

Soient maintenant $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\delta_1, \delta_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices telles que $A_q = {}^tPDP$. Dans la base orthonormée $(\epsilon_1', \epsilon_2')$ dont P est matrice de passage depuis (ϵ_1, ϵ_2), la forme quadratique q s'écrit:

$$q(s,t) = \delta_1 s^2 + \delta_2 t^2.$$

Du coup, dans le repère orthonormé $\mathscr{R}' = (O, \epsilon_1', \epsilon_2')$, l'équation de la conique $\mathscr{C}$ devient:

$$\delta_1 s^2 + \delta_2 t^2 + b_1' s + b_2' t + c = 0 \tag{6.1}$$

pour certains $b_1', b_2' \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent alors:

1. *Cas où* $\Delta = 0$*:* on dit que $\mathscr{C}$ est de **type parabolique**.

   (a) Si q est de rang nul, c'est-à-dire $\delta_1 = \delta_2 = 0$, alors $\mathscr{C}$ est décrite par l'équation $b_1' s + b_2' t + c = 0$ dans le repère $\mathscr{R}'$. Du coup, $\mathscr{C}$ est:

      i. vide lorsque $b_1' = b_1' = 0$ et $c \neq 0$,

      ii. une droite affine lorsque $b_1' \neq 0$ ou $b_2' \neq 0$.

   (b) Si q est de rang 1, on peut supposer que $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 \neq 0$ quitte à échanger ϵ_1' et ϵ_2'. L'équation (6.1) se réécrit alors:

$$\delta_2 \left(t + \frac{b_2'}{2\delta_2} \right)^2 + b_1' s + c' = 0, \tag{6.2}$$

   avec $c' = c - \frac{b_2'^2}{4\delta_2^2}$. Deux cas se présentent:

      i. Si $b_1' = 0$, alors $\mathscr{C}$ est:
         - vide lorsque $\delta_2 c' > 0$,
         - une droite affine lorsque $c' = 0$,
         - une réunion de deux droites parallèles lorsque $\delta_2 c' < 0$.

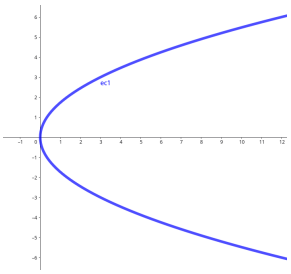
ii. Si $b'_1 \neq 0$, alors l'équation (6.2) se réécrit:

$$s + \frac{c'}{b'_1} = \frac{\delta_2}{b'_1}\left(t + \frac{b'_2}{2\delta_2}\right)^2.$$

Du coup, dans le repère orthonormé $(O', \epsilon'_1, \epsilon'_2)$ où O' est le point de coordonnées $s = -\frac{c'}{b'_1}$ et $t = -\frac{b'_2}{2\delta_2}$, l'équation de la conique $\mathscr{C}$ devient:

$$w^2 = 2pv$$

avec $2p = \frac{b'_1}{\delta_2}$. Quitte à remplacer ϵ'_1 par $-\epsilon'_1$, on peut supposer que $p > 0$. On dit que $\mathscr{C}$ est une **parabole de paramètre** p.



2. *Cas où* $\Delta \neq 0$.

On a alors $\delta_1 \neq 0$ et $\delta_2 \neq 0$. L'équation (6.1) se réécrit alors:

$$\delta_1\left(s + \frac{b'_1}{2\delta_1}\right)^2 + \delta_2\left(t + \frac{b'_2}{2\delta_2}\right)^2 + c' = 0,$$

avec $c' = c - \frac{b'^2_1}{4\delta^2_1} - \frac{b'^2_2}{4\delta^2_2}$. Du coup, dans le repère orthonormé $(O', \epsilon'_1, \epsilon'_2)$ où O' est le point de coordonnées $s = -\frac{b'_1}{2\delta_1}$ et $t = -\frac{b'_2}{2\delta_2}$, l'équation de la conique $\mathscr{C}$ devient:

$$\eta_1 \frac{u^2}{\alpha^2} + \eta_2 \frac{v^2}{\beta^2} = \nu,$$

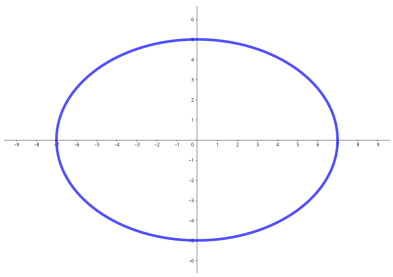
pour certains $\alpha, \beta > 0$, $\eta_1, \eta_2 \in \{-1, 1\}$ et $\nu \in \{0, 1\}$.

(a) *Cas où* $\Delta > 0$*:* cela signifie que q est de signature $(0,2)$ ou $(2,0)$, ou encore que $\eta_1 = \eta_2$. On dit alors que $\mathscr{C}$ est de **type elliptique**.

i. Si $\nu = 0$, alors $\mathscr{C}$ est un point.

ii. Si $\eta_1 = \eta_2 = -1$ et $\nu = 1$, alors $\mathscr{C}$ est vide.

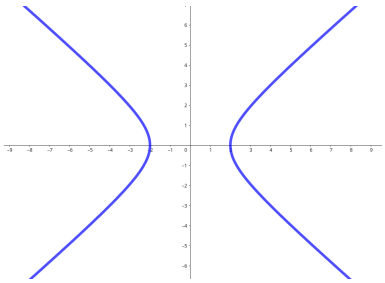
iii. Si $\eta_1 = \eta_2 = \nu = 1$, alors on dit que $\mathscr{C}$ est une **ellipse de centre** O'. Quitte à échanger ϵ'_1 et ϵ'_2, on peut supposer que $\alpha \leq \beta$. On dit alors que 2α est le **petit-axe** de $\mathscr{C}$ et que 2β est le **grand-axe** de $\mathscr{C}$.



(b) *Cas où* $\Delta < 0$*:* cela signifie que q est de signature $(1,1)$, ou encore que $\eta_1 = -\eta_2$. On dit alors que $\mathscr{C}$ est de **type hyperbolique**.

i. Si $v = 0$, alors $\mathscr{C}$ est une réunion de deux droites sécantes.

ii. Si $v = 1$, alors on dit que $\mathscr{C}$ est une **hyperbole de centre** O'. Si $\eta_1 = -\eta_2 = 1$, on dit que 2α est l'**axe transversal** et que 2β est l'**axe conjugué**. Sinon, c'est l'inverse.



Pour conclure:

Théorème 6.2.2 (Classification des coniques)

Une conique dans un plan affine euclidien peut être:

1. vide
2. un point,
3. une droite,
4. une réunion de deux droites sécantes ou parallèles,
5. une parabole, auquel cas elle a pour équation $x^2 = 2py$ avec $p > 0$ dans un repère orthonormé bien choisi,
6. une ellipse, auquel cas elle a pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ avec $0 < \alpha < \beta$ dans un repère orthonormé bien choisi,
7. une hyperbole, auquel cas elle a pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ avec $\alpha, \beta > 0$ dans un repère orthonormé bien choisi.

Dans les quatre premiers cas, on dit que la conique est **dégénérée**.

6.2.2 Description géométrique

Maintenant que nous disposons d'une classification exhaustive des coniques, nous allons nous concentrer sur leurs propriétés géométriques. Nous nous intéressons plus particulièrement aux coniques non dégénérées.

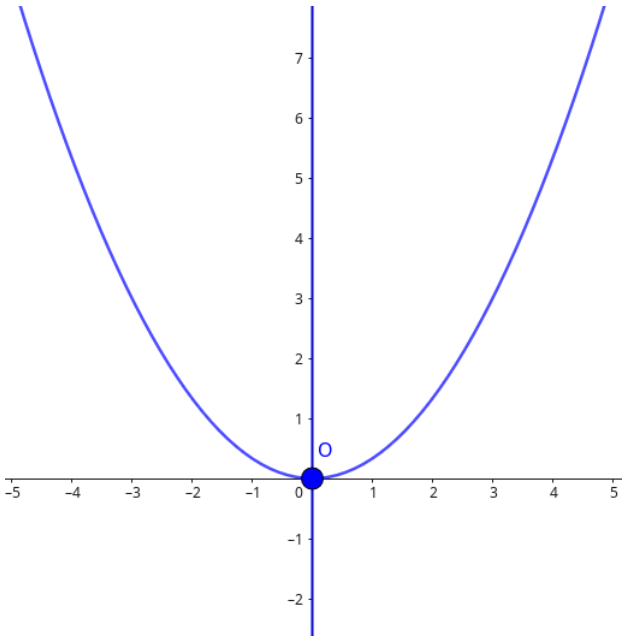
Premières observations

Parabole. On se donne une parabole $\mathscr{C}$ qui, dans un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2)$, admet une équation de la forme $x^2 = 2py$ avec $p > 0$. On dit que p est le **paramètre** de $\mathscr{C}$. La droite $\mathbb{R}e_2$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$. On l'appelle l'**axe** de $\mathscr{C}$. Cet axe intersecte la parabole $\mathscr{C}$ au point O, que l'on appelle **sommet** de $\mathscr{C}$. On peut donner un paramétrage de $\mathscr{C}$ via:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{2p} t^2. \end{cases}$$

La **tangente** à $\mathscr{C}$ au point M de coordonnées $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ est la droite passant par M et de vecteur directeur:

$$(x'(t_0), y'(t_0)) = \left(1, \frac{t_0}{p}\right) = \left(1, \frac{x_0}{p}\right).$$



Ellipse. On se donne une ellipse $\mathscr{C}$ qui, dans un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2)$, admet une équation de la forme $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ avec $0 < \alpha < \beta$. On dit que α est le **demi petit-axe** de $\mathscr{C}$ et que β est le **demi grand-axe** de $\mathscr{C}$.

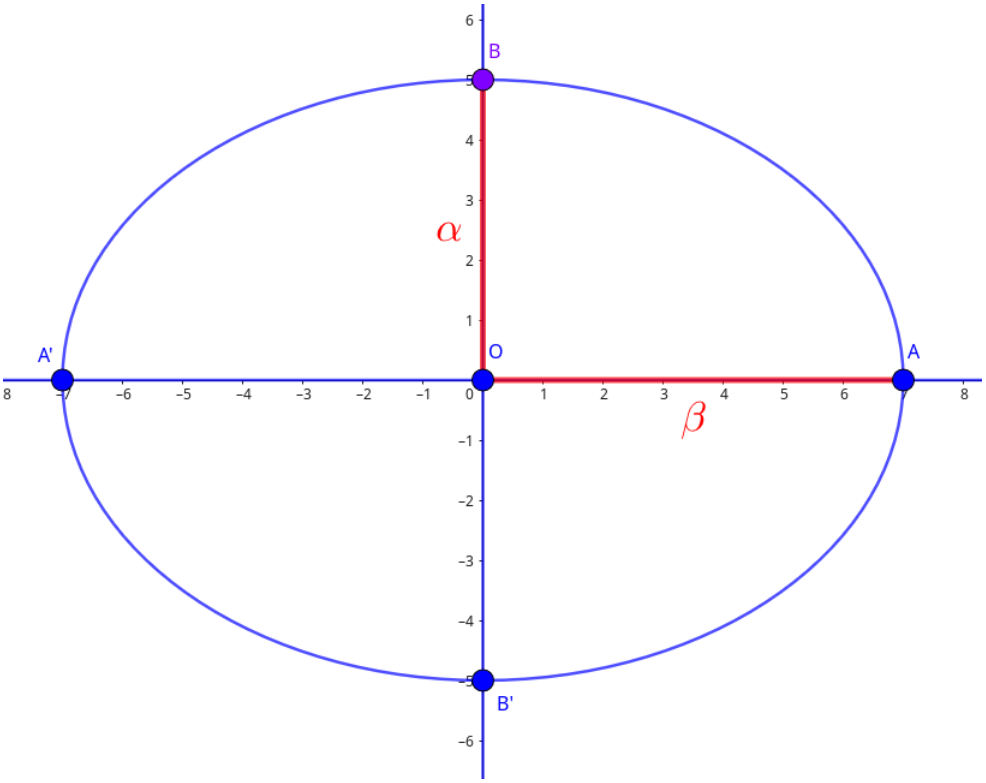
Le point O est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$. On l'appelle le **centre** de $\mathscr{C}$. Les droites $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$ sont des axes de symétrie de $\mathscr{C}$. On les appelle les **axes** de $\mathscr{C}$. L'axe $\mathbb{R}e_1$ intersecte $\mathscr{C}$ en deux points, A et A'. Le centre O est le milieu de $[AA']$ et $OA = \alpha$. L'axe $\mathbb{R}e_2$ intersecte $\mathscr{C}$ en deux points, B et B'. Le centre O est

le milieu de $[BB']$ et $OB = \beta$. Les points A, A', B, B' sont appelés **sommets** de $\mathscr{C}$. On peut donner un paramétrage de $\mathscr{C}$ via:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha \cos t \\ y(t) = \beta \sin t. \end{cases}$$

La **tangente** à $\mathscr{C}$ au point M de coordonnées $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ est la droite passant par M et de vecteur directeur:

$$(x'(t_0), y'(t_0)) = (-\alpha \sin t_0, \beta \cos t_0) = \left(-\frac{\alpha y_0}{\beta}, \frac{\beta x_0}{\alpha}\right).$$



Hyperbole. On se donne une hyperbole $\mathscr{C}$ qui, dans un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2)$, admet une équation de la forme $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ avec $\alpha, \beta > 0$. On dit que α est le **demi axe transversal** de $\mathscr{C}$ et que β est le **demi axe conjugué** de $\mathscr{C}$.

Le point O est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$. On l'appelle le **centre** de $\mathscr{C}$. Les droites $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$ sont des axes de symétrie de $\mathscr{C}$. On les appelle les **axes** de $\mathscr{C}$. L'axe $\mathbb{R}e_1$ intersecte $\mathscr{C}$ en deux points, A et A', que l'on appelle **sommets** de $\mathscr{C}$. Le centre O est le milieu de $[AA']$ et $OA = \alpha$. L'axe $\mathbb{R}e_2$ n'intersecte pas $\mathscr{C}$.

L'hyperbole $\mathscr{C}$ a deux composantes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, qui peuvent être paramétrées via:

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha \cosh t \\ y_1(t) = \beta \sinh t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = -\alpha \cosh t \\ y_2(t) = -\beta \sinh t. \end{cases}$$

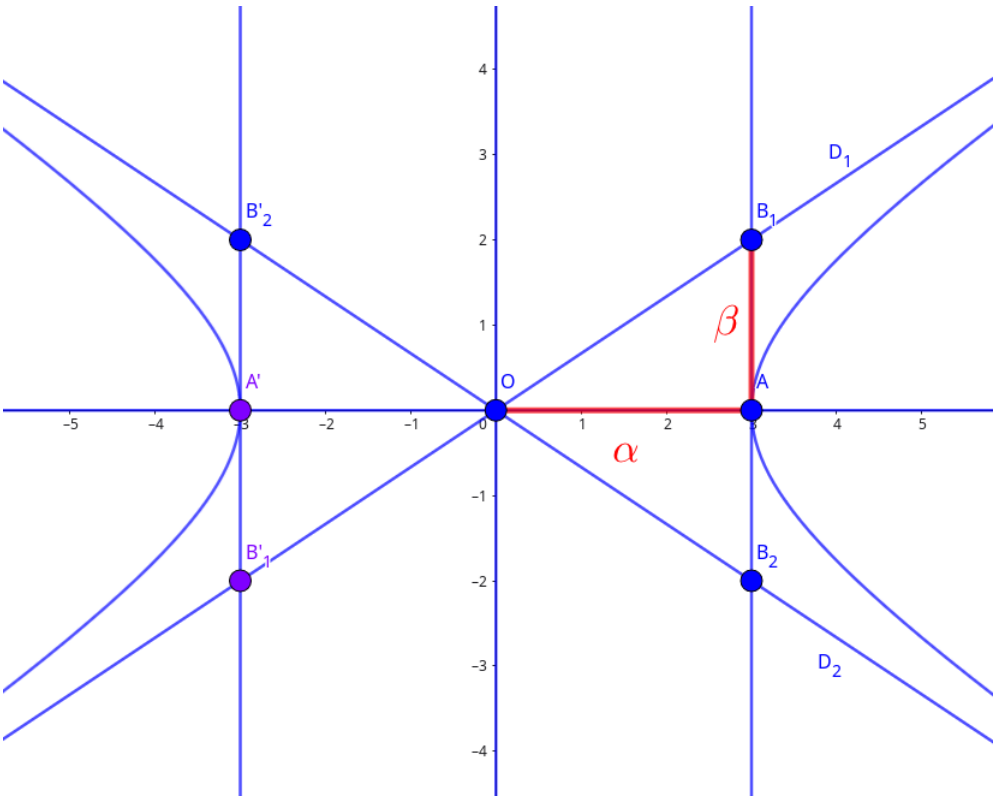
La **tangente** à $\mathscr{C}$ au point $M \in \mathscr{C}_i$ (avec $i \in \{1,2\}$) de coordonnées $(x_0, y_0) = (x_i(t_0), y_i(t_0))$ est la droite passant par M et de vecteur directeur:

$$(x_i'(t_0), y_i'(t_0)) = (\pm\alpha \sinh t_0, \pm\beta \cosh t_0) = \left(\frac{\alpha y_0}{\beta}, \frac{\beta x_0}{\alpha}\right).$$

On a:

$$\lim_{t\to-\infty} (\beta x_1(t) + \alpha y_1(t)) = \lim_{t\to-\infty} (\beta x_2(t) - \alpha y_2(t)) = 0,$$
$$\lim_{t\to+\infty} (\beta x_1(t) + \alpha y_1(t)) = \lim_{t\to+\infty} (\beta x_2(t) - \alpha y_2(t)) = 0.$$

On dit que les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $\beta x + \alpha y = 0$ et $\beta x - \alpha y = 0$ sont des **asymptotes** de $\mathscr{C}$. La droite $A + \mathbb{R}e_2$ intersecte D_1 et D_2 en des points B_1 et B_2 tels que A est le milieu de $[B_1 B_2]$ et $AB_1 = \beta$. De même, La droite $A' + \mathbb{R}e_2$ intersecte D_1 et D_2 en des points B_1' et B_2' tels que A' est le milieu de $[B_1' B_2']$ et $A'B_1' = \beta$.



Description monofocale des coniques

Théorème 6.2.3 (Caractérisation monofocale des coniques)

1. Soit $e \in \mathbb{R}$ un réel strictement positif. Soient F un point et D une droite dans E ne contenant pas F. L'ensemble:

$$\mathscr{C} = \{M \in E : FM = ed(M,D)\}$$

est une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$ et une hyperbole si $e > 1$.

2. Soit $\mathscr{C}$ une conique non dégénérée dans E qui n'est pas un cercle. Il existe un réel $e > 0$, un point F et une droite D de E ne contenant pas F tels que:

$$\mathscr{C} = \{M \in E : FM = ed(M,D)\}.$$

Preuve. 1. On se place dans un repère orthonormé $\mathscr{R} = (F, \epsilon_1, \epsilon_2)$ où ϵ_1 est un vecteur directeur de $\vec{D}$. Ainsi, D est donnée par une équation de la forme $y = y_0$ pour un certain $y_0 \neq 0$. Soit M un point de E. On note (x,y) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$. On a alors:

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = e|y-y_0| \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2 = e^2(y-y_0)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (1-e^2)y^2 + 2e^2y_0y - e^2y_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Si $e = 1$, cela équivaut à:

$$x^2 + 2y_0\left(y - \frac{y_0}{2}\right) = 0,$$

donc $\mathscr{C}$ est une parabole de paramètre $|y_0|$.

Si $e \neq 1$, alors:

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \frac{1-e^2}{e^2y_0^2}x^2 + \frac{(1-e^2)^2}{e^2y_0^2}\left(y + \frac{e^2y_0}{1-e^2}\right)^2 = 1.$$

Ainsi $\mathscr{C}$ est une ellipse si $e < 1$ et une hyperbole si $e > 1$.

2. Supposons d'abord que $\mathscr{C}$ est une parabole. On se place dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$ dans lequel l'équation de $\mathscr{C}$ est $x^2 = 2py$ pour un certain $p > 0$. L'équation de $\mathscr{C}$ peut être réécrite sous la forme:

$$x^2 - 2p\left(y - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

En remontant les équivalences de la démonstration de la première assertion, cela signifie que $\mathscr{C} = \{M \in E : FM = d(M,D)\}$ où F est le point de coordonnées $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ et D est la droite donnée par l'équation $y = -\frac{p}{2}$.

Supposons maintenant que $\mathscr{C}$ est une ellipse qui n'est pas un cercle. On se place dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$ dans lequel l'équation de $\mathscr{C}$ est de la forme $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ pour certains $0 < \alpha < \beta$. En prenant $e = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}$ et $y_0 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$, on voit que:

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{e^2 y_0^2}{1-e^2} \\ \beta^2 = \frac{e^2 y_0^2}{(1-e^2)^2}. \end{cases}$$

L'équation de $\mathscr{C}$ se réécrit donc:

$$\frac{1-e^2}{e^2 y_0^2} x^2 + \frac{(1-e^2)^2}{e^2 y_0^2}\left(y - \frac{e^2 y_0}{1-e^2} + \frac{e^2 y_0}{1-e^2}\right)^2 = 1.$$

En remontant les équivalences de la preuve de la première assertion, on déduit que $\mathscr{C} = \{M \in E : FM = ed(M,D)\}$ où F est le point de coordonnées $\left(0, \frac{e^2 y_0}{1-e^2}\right) = \left(0, \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\right)$ et D est la droite donnée par l'équation $y = y_0 + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$.

Supposons finalement que $\mathscr{C}$ est une hyperbole. On se place dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$ dans lequel l'équation de $\mathscr{C}$ est de la forme $-\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ pour certains $\alpha, \beta > 0$. En prenant $e = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}}$ et $y_0 = \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, on voit que:

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{e^2 y_0^2}{(e^2-1)^2} \\ \beta^2 = \frac{e^2 y_0^2}{e^2-1}. \end{cases}$$

L'équation de $\mathscr{C}$ se réécrit donc:

$$\frac{1-e^2}{e^2 y_0^2} x^2 + \frac{(1-e^2)^2}{e^2 y_0^2}\left(y - \frac{e^2 y_0}{1-e^2} + \frac{e^2 y_0}{1-e^2}\right)^2 = 1.$$

En remontant les équivalences de la preuve de la première assertion, on déduit que $\mathscr{C} = \{M \in E : FM = ed(M,D)\}$ où F est le point de coordonnées $\left(0, -\frac{e^2 y_0}{1-e^2}\right) = \left(0, -\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)$ et D est la droite donnée par l'équation $y = y_0 - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

□

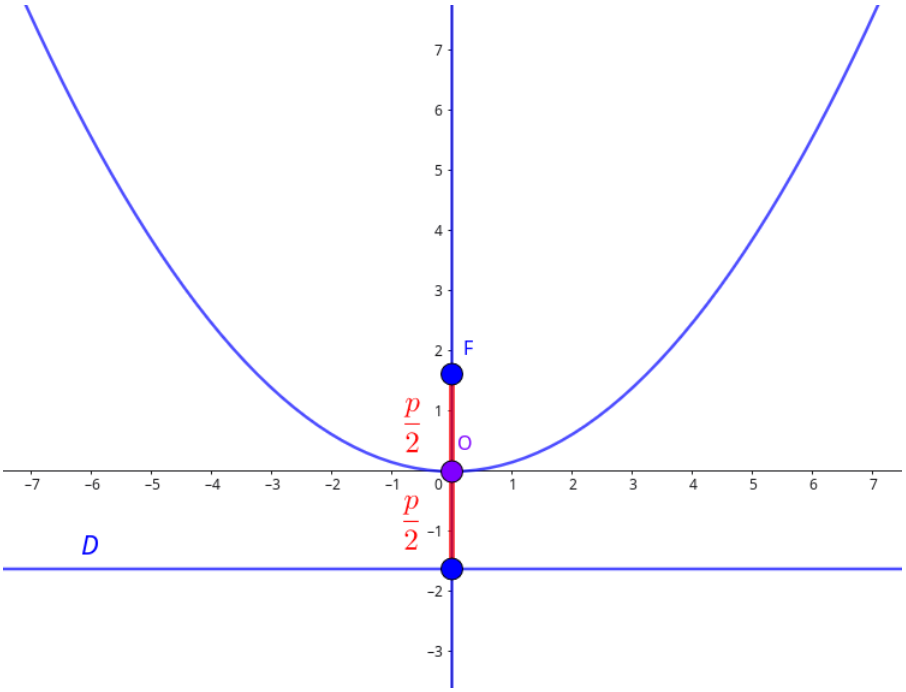
Définition 6.2.4

Avec les notations de la seconde partie du théorème précédent, le réel e est appelé **excentricité** de $\mathscr{C}$, la droite D **directrice** de $\mathscr{C}$ et le point F **foyer** de $\mathscr{C}$.

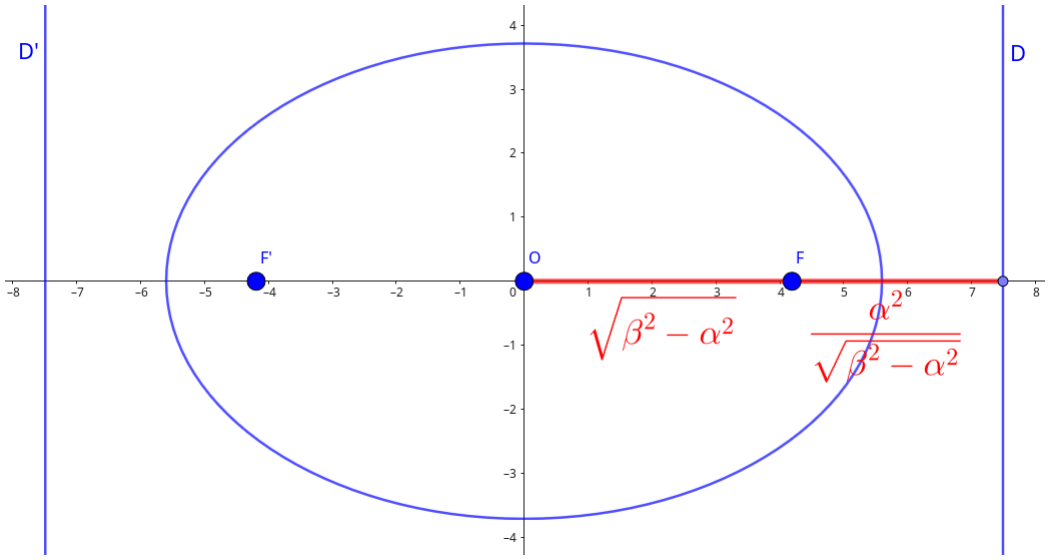
Remarque 6.2.5. Si $\mathscr{C}$ est une ellipse ou une hyperbole de centre O admettant une directrice D et un foyer F et si on note s la symétrie par rapport à O, alors $D' := s(D)$ et $F' := s(F)$ sont aussi une directrice et un foyer pour $\mathscr{C}$. Ainsi, $\mathscr{C}$ admet deux foyers et deux directrices qui sont symétriques par rapport à O. On peut prouver que $\mathscr{C}$ n'admet pas d'autres foyers ni d'autres directrices.

Remarque 6.2.6. La preuve du Théorème 6.2.3 permet de connaître la position des foyers et des directrices, ainsi que d'obtenir des formules reliant les différents paramètres associés à une conique.

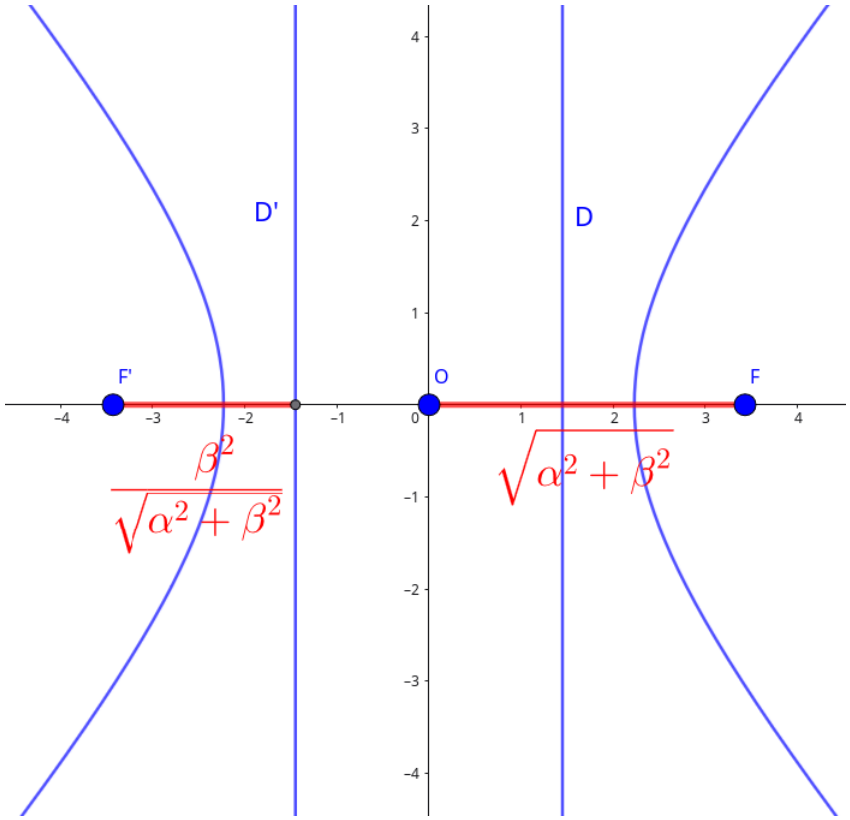
1. *Parabole.*



2. *Ellipse* (qui n'est pas un cercle). L'excentricité se calcule via la formule $e = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}$.



3. *Hyperbole.* L'excentricité se calcule via la formule $e = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}}$.



Description bifocale des coniques

Théorème 6.2.7 (Caractérisation bifocale des coniques)

1. Si F et F' sont deux points distincts de E et $\beta > \frac{FF'}{2}$ est un réel, alors l'ensemble:
$$\mathscr{C} = \{M \in E : MF + MF' = 2\beta\}$$
est une ellipse de grand-axe 2β. Réciproquement, si $\mathscr{C}$ est une ellipse de grand-axe 2β qui n'est pas un cercle, alors:
$$\mathscr{C} = \{M \in E : MF + MF' = 2\beta\}$$
où F et F' sont les foyers de $\mathscr{C}$.

2. Si F et F' sont deux points de E et $0 < \alpha < \frac{FF'}{2}$ est un réel, alors l'ensemble:
$$\mathscr{C} = \{M \in E : |MF - MF'| = 2\alpha\}$$
est une hyperbole d'axe transversal 2α. Réciproquement, si $\mathscr{C}$ est une hyperbole d'axe transversal 2α, alors:
$$\mathscr{C} = \{M \in E : |MF - MF'| = 2\alpha\}$$
où F et F' sont les foyers de $\mathscr{C}$.

Preuve. 1. On se donne deux points distincts F et F' de E et $\beta > \frac{FF'}{2}$ un réel. Soit O le milieu de $[FF']$. On se place dans un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2)$ avec $e_2 = \frac{\overrightarrow{OF}}{OF}$ et on note $(0, f)$ les coordonnées de F. On a alors $0 < f < \beta$ et, pour $M \in E$ de coordonnées (x, y):

$$\begin{aligned}
MF + MF' = 2\beta &\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-f)^2} + \sqrt{x^2 + (y+f)^2} = 2\beta \\
&\Rightarrow x^2 + (y+f)^2 = 4\beta^2 + x^2 + (y-f)^2 - 4\beta\sqrt{x^2 + (y-f)^2} \\
&\Rightarrow \beta\sqrt{x^2 + (y-f)^2} = \beta^2 - yf \\
&\Rightarrow \beta^2(x^2 + (y-f)^2) = (\beta^2 - yf)^2 \\
&\Rightarrow \beta^2 x^2 + (\beta^2 - f^2)y^2 = \beta^2(\beta^2 - f^2) \\
&\Rightarrow \frac{x^2}{\beta^2 - f^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.
\end{aligned}$$

L'égalité $\frac{x^2}{\beta^2-f^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ implique que $\beta^2-yf\geq 0$ et $2\beta-\sqrt{x^2+(y+f)^2}\geq 0$, donc toutes les implications précédentes sont des équivalences. On déduit que $\{M\in E : MF+MF'=2\beta\}$ est une ellipse de centre O, de petit-axe $2\sqrt{\beta^2-f^2}$ et de grand-axe 2β.

Réciproquement, soit $\mathscr{C}$ une ellipse de grand-axe 2β qui n'est pas un cercle. On se place dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$ dans lequel l'équation de $\mathscr{C}$ est:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

avec $\alpha<\beta$. Les calculs précédents montrent que, si $f=\sqrt{\beta^2-\alpha^2}$, alors:

$$\mathscr{C}=\{M\in E : MF+MF'=\beta\}$$

avec F et F' les points de coordonnées $(0,f)$ et $(0,-f)$ dans le repère $\mathscr{R}$. D'après la preuve du Théorème 6.2.3, les points F et F' sont les foyers de $\mathscr{C}$.

2. On se donne deux points distincts F et F' de E et $0<\alpha<\frac{FF'}{2}$ un réel. Soit O le milieu de $[FF']$. On se place dans un repère orthonormé $\mathscr{R}=(O,e_1,e_2)$ avec $e_1=\frac{\overrightarrow{OF}}{OF}$ et on note $(f,0)$ les coordonnées de F. Alors $\alpha<f$ et, pour $M\in E$ de coordonnées (x,y):

$$\begin{aligned}
|MF-MF'|=2\alpha &\Rightarrow \left|\sqrt{(x-f)^2+y^2}-\sqrt{(x+f)^2+y^2}\right|=2\alpha\\
&\Rightarrow x^2+y^2+f^2-\sqrt{((x-f)^2+y^2)((x+f)^2+y^2)}=2\alpha^2\\
&\Rightarrow (x^2+y^2+f^2-2\alpha^2)^2=((x-f)^2+y^2)((x+f)^2+y^2)\\
&\Rightarrow (f^2-\alpha^2)x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2(f^2-\alpha^2)\\
&\Rightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{f^2-\alpha^2}=1.
\end{aligned}$$

L'égalité $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{f^2-\alpha^2}=1$ implique que $x^2+y^2+f^2-2\alpha^2\geq 0$, donc toutes les implications précédentes sont des équivalences. On déduit que $\{M\in E : |MF-MF'|=2\alpha\}$ est une hyperbole de centre O, d'axe transverse 2α et d'axe conjugué $2\sqrt{f^2-\alpha^2}$.

Réciproquement, soit $\mathscr{C}$ une hyperbole d'axe transverse 2α. On se place dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$ dans lequel l'équation de $\mathscr{C}$ est:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

avec $\beta > 0$. Les calculs précédents montrent que, si $f = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, alors:

$$\mathscr{C} = \{M \in E : |MF - MF'| = 2\alpha\}$$

avec F et F' les points de coordonnées $(f,0)$ et $(-f,0)$ dans le repère $\mathscr{R}$. D'après la preuve du Théorème 6.2.3, les points F et F' sont les foyers de $\mathscr{C}$.

□

6.3 Quadriques

Dans cette section, on travaille dans un espace affine euclidien E de dimension 3. On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. Les quadriques sont les parties de E définies par des équations cartésiennes de degré 2. Plus précisément:

Définition 6.3.1

Une **quadrique** est un sous-ensemble $\mathscr{Q}$ de E qui est défini dans le repère $\mathscr{R}$ par une équation de la forme:

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5yz + a_6zx + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0,$$

avec $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls.

On introduit la forme quadratique

$$\begin{aligned} q : \vec{E} &\to \mathbb{R}, \\ (x,y,z) &\mapsto a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5yz + a_6zx, \end{aligned}$$

de matrice:

$$A_q := \begin{pmatrix} a_1 & a_4/2 & a_6/2 \\ a_4/2 & a_2 & a_5/2 \\ a_6/2 & a_5/2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

On note $\Delta = \det A_q$ le discriminant de q.

Soient maintenant $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices telles que $A_q = {}^tPDP$. Dans la base orthonormée $(\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3)$ dont P est matrice de passage depuis $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$, la forme quadratique q s'écrit:, la forme quadratique q s'écrit:

$$q(s,t) = \delta_1 r^2 + \delta_2 s^2 + \delta_3 t^2.$$

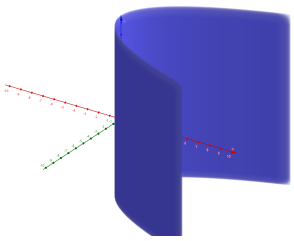
Du coup, dans le repère orthonormé $\mathscr{R}' = (O, \epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3)$, l'équation de la quadrique $\mathscr{Q}$ devient:

$$\delta_1 r^2 + \delta_2 s^2 + \delta_3 t^2 + b'_1 r + b'_2 s + b'_3 t + c = 0 \tag{6.3}$$

pour certains $b'_1, b'_2, b'_3 \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent alors:

1. Si q est de rang nul, c'est-à-dire $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, alors $\mathscr{Q}$ est décrite par l'équation $b'_1 r + b'_2 s + b'_3 t + c = 0$ dans le repère $\mathscr{R}'$. Du coup, $\mathscr{Q}$ est:
   (a) vide lorsque $b'_1 = b'_2 = b'_3 = 0$ et $c \neq 0$,
   (b) un plan affine lorsque $b'_1 \neq 0$, $b'_2 \neq 0$ ou $b'_3 \neq 0$.

2. Si q est de rang 1, on peut supposer que $\delta_1 = \delta_2 = 0$ et $\delta_3 \neq 0$ quitte à permuter ϵ'_1, ϵ'_2 et ϵ'_3. L'équation (6.1) se réécrit alors:
$$\delta_3 \left(t + \frac{b'_3}{2\delta_3} \right)^2 + b'_1 r + b'_2 s + c' = 0,$$
avec $c' = c - \frac{b'^2_3}{4\delta_3^2}$. Deux cas se présentent:
   (a) Si $b'_1 = b'_2 = 0$, alors $\mathscr{Q}$ est:
      i. vide lorsque $\delta_3 c' > 0$,
      ii. un plan affine lorsque $c' = 0$,
      iii. une réunion de deux plans parallèles lorsque $\delta_3 c' < 0$.
   (b) Si $(b'_1, b'_2) \neq (0,0)$, alors en se plaçant dans un repère orthonormé de la forme $\mathscr{R}'' = (O', \epsilon''_1, \epsilon''_2, \epsilon'_3)$ où ϵ''_2 est un vecteur unitaire normal au plan Π d'équation $b'_1 r + b'_2 s + c' = 0$ et où O' est un point dans l'intersection de ce plan avec le plan d'équation $t = -\frac{b'_3}{2\delta_3}$, l'équation de la quadrique $\mathscr{Q}$ peut se réécrire:
$$w^2 = 2pv,$$
avec $p \neq 0$. Ici les coodonnées dans le repère $\mathscr{R}''$ ont été notées (u, v, w). Bien sûr, quitte à remplacer ϵ''_2 par $-\epsilon''_2$, on peut supposer que $p > 0$. On remarque alors que la quadrique $\mathscr{Q}$ est le produit d'une droite et d'une parabole de paramètre p. On dit que $\mathscr{Q}$ est un **cylindre parabolique de paramètre** p.



3. Si q est de rang 2, on peut supposer que $\delta_1 = 0$, $\delta_2 \neq 0$ et $\delta_3 \neq 0$ quitte à permuter ϵ'_1, ϵ'_2 et ϵ'_3. L'équation (6.1) se réécrit alors:
$$\delta_2 \left(s + \frac{b'_2}{2\delta_2} \right)^2 + \delta_3 \left(t + \frac{b'_3}{2\delta_3} \right)^2 + b'_1 r + c' = 0, \tag{6.4}$$
avec $c' = c - \frac{b'^2_2}{2\delta_2^2} - \frac{b'^2_3}{2\delta_3^2}$. Deux cas se présentent:

(a) Si $b'_1 = 0$, on peut travailler dans le repère orthonormé $\mathscr{R}'' = (O', \epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3)$ où O' est le point de coordonnées $r = 0$, $s = -\frac{b'_2}{2\delta_2}$ et $t = -\frac{b'_3}{2\delta_3}$, et alors l'équation de la quadrique $\mathscr{Q}$ devient:

$$\eta_1 \frac{v^2}{\alpha^2} + \eta_2 \frac{w^2}{\beta^2} = \nu$$

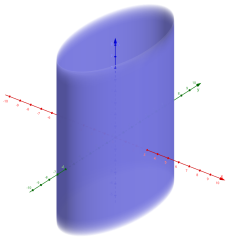
pour certains $\alpha, \beta > 0$, $\eta_1, \eta_2 \in \{-1, 1\}$ et $\nu \in \{0, 1\}$. Ici les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}''$ ont été notées (u, v, w). On déduit que $\mathscr{Q}$ est le produit d'une droite avec une conique de type non parabolique $\mathscr{C}$.

i. *Cas où q est de signature* $(2,0)$ *ou* $(0,2)$*:* cela signifie que $\eta_1 = \eta_2$. La conique $\mathscr{C}$ est alors de type elliptique.

A. Si $\nu = 0$, alors $\mathscr{C}$ est un point et $\mathscr{Q}$ est une droite.

B. Si $\eta_1 = \eta_2 = -1$ et $\nu = 1$, alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{Q}$ sont vides.

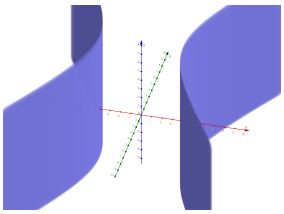
C. Si $\eta_1 = \eta_2 = \nu = 1$, alors $\mathscr{C}$ est une ellipse et on dit que $\mathscr{Q}$ est un **cylindre elliptique**. Si $\alpha \leq \beta$, on dit que 2α est le **petit-axe** de $\mathscr{Q}$ et que 2β est le **grand-axe** de $\mathscr{Q}$.



ii. *Cas où q est de signature* $(1,1)$*:* cela signifie que $\eta_1 = -\eta_2$. La conique $\mathscr{C}$ est alors de type hyperbolique.

A. Si $\nu = 0$, alors $\mathscr{C}$ est une réunion de deux droites sécantes et $\mathscr{Q}$ est une réunion de deux plans sécants.

B. Si $\nu = 1$, alors $\mathscr{C}$ est une **hyperbole** et on dit que $\mathscr{Q}$ est un **cyclindre hyperbolique**.

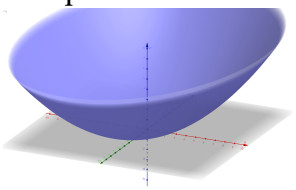


(b) Si $b'_1 \neq 0$, on peut travailler dans le repère orthonormé $\mathscr{R}'' = (O', \epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3)$ où O' est le point de coordonnées $r = -\frac{c'}{b'_1}$, $s = -\frac{b'_2}{2\delta_2}$ et $t = -\frac{b'_3}{2\delta_3}$, et alors l'équation de la quadrique $\mathscr{Q}$ devient:

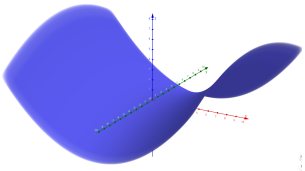
$$\eta_1 \frac{v^2}{\alpha^2} + \eta_2 \frac{w^2}{\beta^2} = u$$

pour certains $\alpha, \beta > 0$ et $\eta_1, \eta_2 \in \{-1, 1\}$. Deux cas se présentent alors:

i. *Cas où q est de signature* $(2,0)$ *ou* $(0,2)$*:* Cela signifie que $\eta_1 = \eta_2$. L'intersection de $\mathscr{Q}$ avec un plan de direction $(\Pi : u = 0)$ est toujours une conique de type elliptique, alors que l'intersection de $\mathscr{Q}$ avec un plan contenant la droite $O' + \Pi^\perp$ est toujours une parabole. On dit que $\mathscr{Q}$ est un **paraboloïde elliptique**.



ii. *Cas où q est de signature* $(1,1)$*:* Cela signifie que $\eta_1 = -\eta_2$. L'inter-section de $\mathscr{Q}$ avec un plan de direction $(\Pi : u = 0)$ est toujours une conique de type hyperbolique, alors que l'intersection de $\mathscr{Q}$ avec un plan parallèle à la droite $O' + \Pi^\perp$ est toujours une parabole. On dit que $\mathscr{Q}$ est un **paraboloïde hyperbolique**.



4. Si q est de rang 3, c'est-à-dire $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sont tous non nuls, alors l'équation (6.1) se réécrit:

$$\delta_1\left(r + \frac{b'_1}{2\delta_1}\right)^2 + \delta_2\left(s + \frac{b'_2}{2\delta_2}\right)^2 + \delta_3\left(t + \frac{b'_3}{2\delta_3}\right)^2 + c' = 0, \tag{6.5}$$

avec $c' = c - \frac{b'^2_1}{2\delta_1^2} - \frac{b'^2_2}{2\delta_2^2} - \frac{b'^2_3}{2\delta_3^2}$. On peut travailler dans le repère orthonormé $\mathscr{R}'' = (O', \epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3)$ où O' est le point de coordonnées $r = -\frac{b'_1}{2\delta_1}$, $s = -\frac{b'_2}{2\delta_2}$ et $t = -\frac{b'_3}{2\delta_3}$, et alors l'équation de la quadrique $\mathscr{Q}$ devient:

$$\eta_1\frac{u^2}{\alpha^2} + \eta_2\frac{v^2}{\beta^2} + \eta_3\frac{w^2}{\gamma^2} = \nu$$

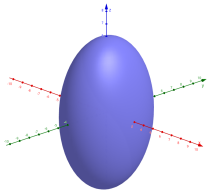
pour certains $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \{-1, 1\}$ et $\nu \in \{0, 1\}$.

(a) *Cas où q est de signature* $(3,0)$ *ou* $(0,3)$*:* cela signifie que $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$.

i. Si $\nu = 0$, alors $\mathscr{Q}$ est un point.

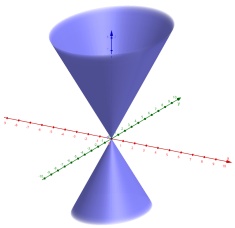
ii. Si $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -1$ et $\nu = 1$, alors $\mathscr{Q}$ est vide.

iii. Si $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 1$ et $\nu = 1$, alors toute intersection de $\mathscr{Q}$ avec un plan est une conique de type elliptique. On dit que $\mathscr{Q}$ est un **ellipsoïde d'axes** 2α**,** 2β **et** 2γ.

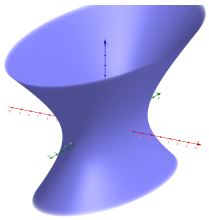


(b) *Cas où q est de signature* $(2,1)$ *ou* $(1,2)$*:* cela signifie que, quitte à permuter ϵ'_1, ϵ'_2 et ϵ'_3, on peut supposer que $\eta_1 = \eta_2 = -\eta_3$.

i. Si $\nu = 0$, alors pour chaque $w_0 \in \mathbb{R}^\times$, l'intersection de $\mathscr{Q}$ avec le plan d'équation $w = w_0$ est une ellipse $\mathscr{C}_{w_0}$ et $\mathscr{Q} = \bigcup_{M \in \mathscr{C}_{w_0}} (O'M)$. On dit que $\mathscr{Q}$ est un **cône à base elliptique**.



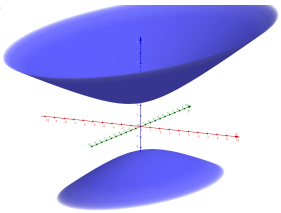
ii. Si $\eta_1 = \eta_2 = -\eta_3 = 1$ et $\nu = 1$, alors $\mathscr{Q}$ est connexe. De plus, l'intersection de $\mathscr{Q}$ avec un plan de direction $(\Pi : w = 0)$ est une ellipse alors que l'intersection de $\mathscr{Q}$ avec un plan contenant la droite $O' + \Pi^\perp$ est une hyperbole. On dit que $\mathscr{Q}$ est un **hyperboloïde à une nappe**.



iii. Si $\eta_1 = \eta_2 = -\eta_3 = -1$ et $\nu = 1$, alors $\mathscr{Q}$ a deux composantes connexes, à savoir:

$$\mathscr{Q}_1 = \mathscr{Q} \cap \{(u,v,w) : w > 0\} \quad \text{et} \quad \mathscr{Q}_2 = \mathscr{Q} \cap \{(u,v,w) : w < 0\}.$$

De plus, l'intersection de $\mathscr{Q}$ avec un plan de direction $(\Pi : w = 0)$ est une conique de type elliptique (parfois vide) alors que l'intersection de $\mathscr{Q}$ avec un plan contenant la droite $O' + \Pi^\perp$ est une hyperbole. On dit que $\mathscr{Q}$ est un **hyperboloïde à deux nappes**.



Pour conclure:

Théorème 6.3.2 (Classification des quadriques)

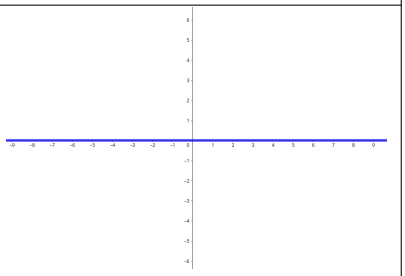
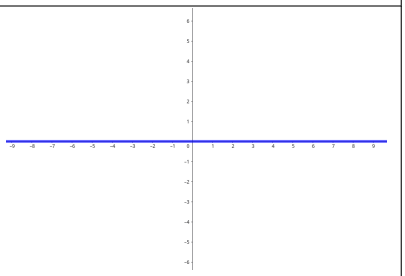
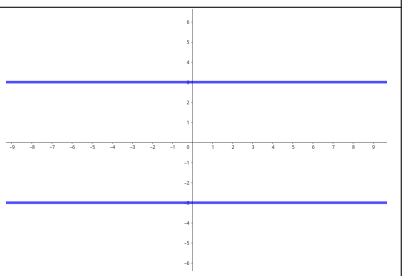
Une quadrique dans un espace affine euclidien de dimension 3 peut être:

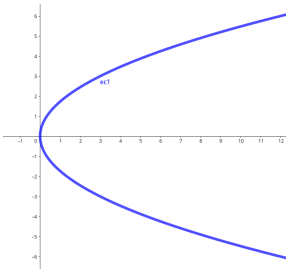
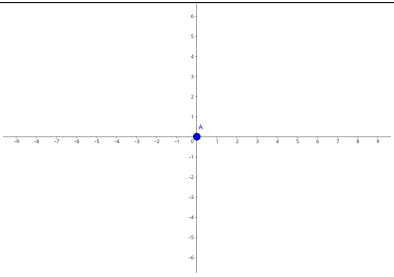
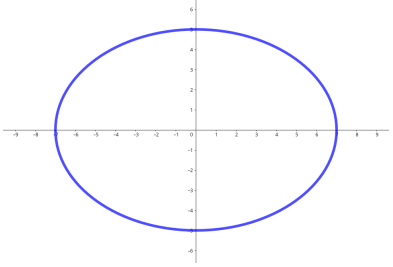
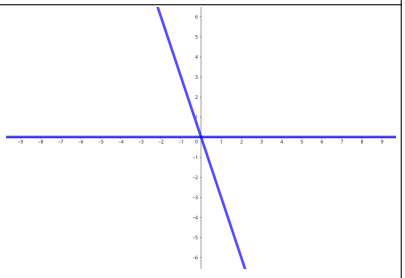
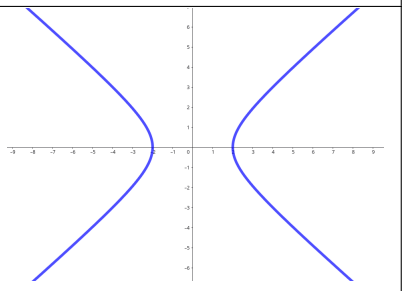
1. vide,
2. un point,
3. une droite,
4. un plan,
5. une réunion de deux plans sécants ou parallèles,
6. un cylindre parabolique, auquel cas elle a pour équation $y^2 = 2px$ avec $p > 0$ dans un repère orthonormé bien choisi,

7. un cylindre elliptique, auquel cas elle a pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ avec $0<\alpha<\beta$ dans un repère orthonormé bien choisi,
8. un cylindre hyperbolique, auquel cas elle a pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ avec $\alpha,\beta>0$ dans un repère orthonormé bien choisi.
9. un paraboloïde elliptique, auquel cas elle a pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=z$ avec $0<\alpha<\beta$ dans un repère orthonormé bien choisi,
10. un paraboloïde hyperbolique, auquel cas elle a pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=z$ avec $\alpha,\beta>0$ dans un repère orthonormé bien choisi,
11. un cône à base elliptique, auquel cas elle a pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0$ avec $\alpha,\beta,\gamma>0$ dans un repère orthonormé bien choisi,
12. un ellipsoïde, auquel cas elle a pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ avec $\alpha,\beta,\gamma>0$ dans un repère orthonormé bien choisi,
13. un hyperboloïde à une nappe, auquel cas elle a pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ avec $\alpha,\beta,\gamma>0$ dans un repère orthonormé bien choisi,
14. un hyperboloïde à deux nappes, auquel cas elle a pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=-1$ avec $\alpha,\beta,\gamma>0$ dans un repère orthonormé bien choisi.

Annexe A

Tableau récapitulatif des coniques

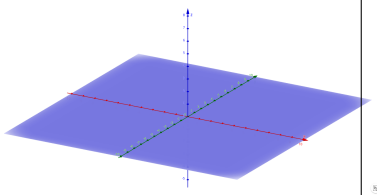
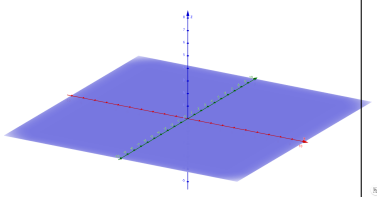
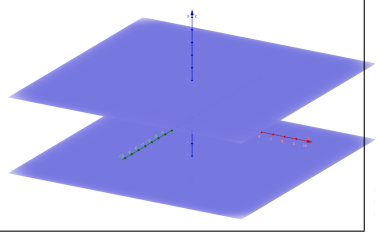
q		Coniques	Équation[1]	Dessin
Rang	Sign.			
0	(0,0)	Vide	$1 = 0$	$\emptyset$
		Droite	$y = 0$	
1	(1,0) ou (0,1)	Vide	$1 = 0$	$\emptyset$
		Droite	$y = 0$	
		Deux droites parallèles	$y^2 - a^2 = 0$, $a > 0$	

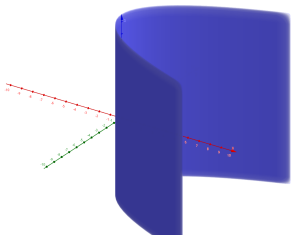
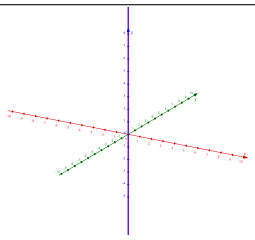
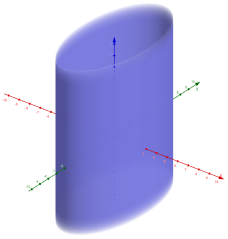
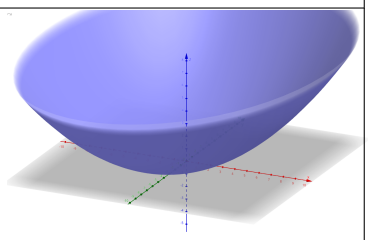
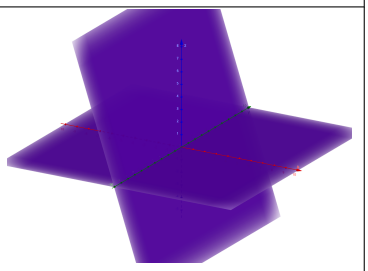
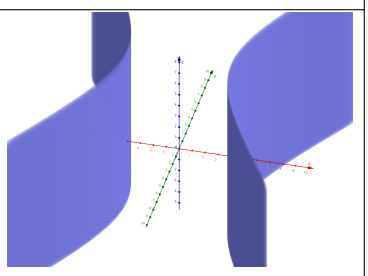
<table>
<tr><td></td><td></td><td>Parabole</td><td>$y^2 = 2px$,
$p > 0$</td><td>  </td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="3">(2,0)
ou
(0,2)</td><td>Vide</td><td>$1 = 0$</td><td>$\emptyset$</td></tr>
<tr><td>Point</td><td>$x = y = 0$</td><td>  </td></tr>
<tr><td>Ellipse</td><td>$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,
$\alpha, \beta > 0$</td><td>  </td></tr>
<tr><td>(1,1)</td><td>Deux droites sécantes</td><td>$y(ax+by) = 0$,
$a \neq 0$</td><td>  </td></tr>
<tr><td></td><td>Hyperbole</td><td>$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,
$\alpha, \beta > 0$</td><td>  </td></tr>
</table>

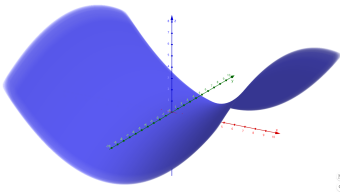
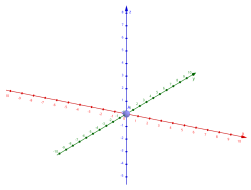
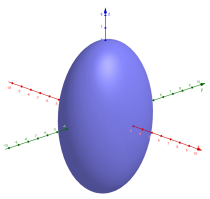
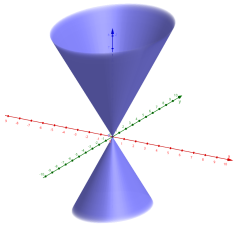
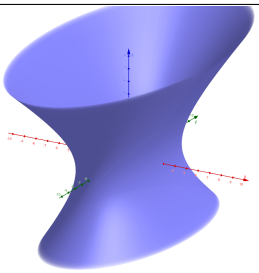
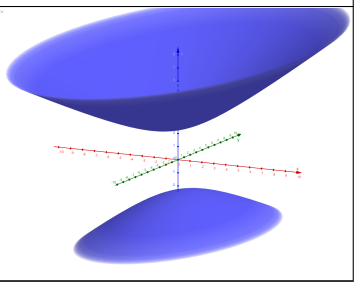
[1] dans un repère orthonormé bien choisi.

Annexe B

Tableau récapitulatif des quadriques

q		Quadriques	Équation[1]	Dessin
Rang	Sign.			
0	(0,0)	Vide	$1 = 0$	$\emptyset$
		Plan	$z = 0$	
1	(1,0) ou (0,1)	Vide	$1 = 0$	$\emptyset$
		Plan	$z = 0$	
		Deux plans parallèles	$z^2 - a^2 = 0,\ a > 0$	

		Cylindre parabolique	$y^2 = 2px,\ p > 0$	
2	(2,0) ou (0,2)	Vide	$1 = 0$	$\emptyset$
		Droite	$x = y = 0$	
		Cylindre elliptique	$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$ $\alpha, \beta > 0$	
		Paraboloïde elliptique	$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = z,$ $\alpha, \beta > 0$	
	(1,1)	Deux plans sécants	$z(ax + bz) = 0,$ $a \neq 0$	
		Cylindre hyperbolique	$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$ $\alpha, \beta > 0$	

		Paraboloïde hyperbolique	$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = z,$ $\alpha, \beta > 0$	
3	(3,0) ou (0,3)	Vide	$1 = 0$	$\emptyset$
		Point	$x = y = z = 0$	
		Ellipsoïde	$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$ $\alpha, \beta, \gamma > 0$	
	(1,2) ou (2,1)	Cône à base elliptique	$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0,$ $\alpha, \beta, \gamma > 0$	
		Hyperboloïde à une nappe	$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$ $\alpha, \beta, \gamma > 0$	
		Hyperboloïde à deux nappes	$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = -1,$ $\alpha, \beta, \gamma > 0$	

[1] dans un repère orthonormé bien choisi.