Table des matières

CHAPITRE 1

Construction des représentations du groupe de Weyl, d'après W. Rossmann

L'objet de ce chapitre est de donner une construction due à Rossmann de la correspondance de Springer.

1. La résolution de Grothendieck-Springer

1.1. On introduit les notations suivantes :

$\mathfrak{g}$: algèbre de Lie semi-simple complexe.

G : groupe adjoint de $\mathfrak{g}$.

$\mathcal{B}$: variété des drapeaux de G réalisée comme l'ensemble des sous-algèbres de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$. Posons $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B} = n$.

$\mathcal{B}^* = T^*\mathcal{B}$: fibré cotangent de $\mathcal{B}$, identifié canoniquement à

$$\{(\mathfrak{b}, \nu) \in \mathcal{B} \times \mathfrak{g}^* | \nu \in \mathfrak{b}^{\perp}\}.$$

κ : forme de Killing sur $\mathfrak{g}$. On utilise κ pour identifier $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$. Si $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ où la restriction de κ est non dégénérée, ceci permet d'obtenir une injection $\mathfrak{q}^* \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$.

Nous allons maintenant faire des choix dont dépendront en partie les constructions.

U : forme réelle compacte de G, τ l'involution de Cartan correspondante. On pose bien sûr $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}(U)$, de sorte que la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ s'écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$.

$\mathfrak{h}$: sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, H sous-groupe de Cartan correspondant, que l'on suppose τ-stable et dont la décomposition de Cartan est $H = TA$ ($T = H \cap U$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, où $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{u}$ et $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap i\mathfrak{u}$).

W : groupe de Weyl du système de racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{b}_1$: sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$; B_1 son normalisateur dans G. On considère $\mathfrak{b}_1$ comme un point-base de $\mathcal{B}$, de sorte que $\mathcal{B} \simeq G/B_1$.

κ_τ : forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{g}$ (vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel) donnée par

$$\kappa_\tau(X, Y) = -\kappa(X, \tau(Y)).$$

C'est un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$. On note $\| \ \|$ la norme associée. on note de la même manière le produit scalaire et la norme sur $\mathfrak{g}^*$ obtenu grâce à l'identification $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$.

1.2. Nous allons utiliser le résultat suivant :

LEMME. *L'action de U sur $\mathcal{B}$ est transitive.*

Démonstration. Soit $G = UAN$ une décomposition d'Iwasawa de G, où $A = \exp \mathfrak{a}$ et $N \subset B_1$. Alors il vient $G = UAN \subset UB_1 \subset G$. On en déduit que U agit transitivement sur $G/B_1 \simeq \mathcal{B}$. □

Comme $U \cap B_1 = U \cap H = T$, on en déduit :

COROLLAIRE. *$\mathcal{B} \simeq U/T$ et l'intersection de tout sous-groupe de Borel B avec U est un tore maximal de U.*

De ceci, il découle que l'ordre des choix aurait pu être fait de façon légèrement différente : on choisit B_1 et U indépendamment l'un de l'autre. Leur intersection T est toujours un tore maximal de U. On choisit enfin H contenant T et contenu dans B_1.

1.3. Le quotient coadjoint. Considérons l'application quotient, au sens de la géométrie algébrique :

$$\mathfrak{g}^* \xrightarrow{q} G\backslash\!\backslash\mathfrak{g}^*$$

donnée par l'inclusion $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$. En tant qu'ensemble, le membre de droite est l'ensemble des orbites coadjointes fermées (c'est-à-dire semi-simple par l'identification $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$). D'après le théorème de Chevalley, la restriction des fonctions de $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{h}^*$ définit une application $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ qui est en fait un isomorphisme. De manière plus concrète, $G\backslash\!\backslash\mathfrak{g}^*$ peut donc être identifié en tant que variété affine avec $W\backslash\mathfrak{h}^*$. La fibre de q au-dessus d'un élément $W \cdot \lambda \in W\backslash\mathfrak{h}^*$ est la variété

$$\Omega_\lambda = \{\xi \in \mathfrak{g}^* | \, (\forall p \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G), \, p(\xi) = p(\lambda)\}.$$

Quand λ est régulier, ceci est juste l'orbite $G \cdot \lambda$. A l'opposé, lorsque $\lambda = 0$, cette fibre est le cône nilpotent $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}^*$ (voir [**Kostant**]).

1.4. Notons $\mathfrak{g}^*_{sr}$ (resp. $\mathfrak{h}^*_r$) l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}^*$ (resp. $\mathfrak{h}^*$). La restriction de q à $\mathfrak{g}^*_{sr}$ fournit une fibration localement triviale

$$\mathfrak{g}^*_{sr} \xrightarrow{q} W\backslash\mathfrak{h}^*_r$$

de fibre isomorphe à G/H.

1.5. Le diagramme commutatif ci-dessous occupe une place centrale dans la théorie des groupes réductifs complexes. Ceci s'explique par le fait qu'il réalise une résolution simultanée des singularités de l'application q. Nous noterons $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ le radical d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$. Posons

$$\tilde{\mathfrak{g}}^* := \{(\mathfrak{b}, \nu) | \nu \in \mathfrak{n}^\perp\} \simeq G \times_{B_1} \mathfrak{n}_1^\perp.$$

C'est une variété algébrique lisse complexe. L'isomorphisme est donné par

$$(g, \nu) \in G \times_{B_1} \mathfrak{n}_1^\perp \mapsto (g \cdot \mathfrak{b}_1, g \cdot \nu) \in \tilde{\mathfrak{g}}^*.$$

La résolution simultanée est donnée par la seconde projection $\rho : \ \tilde{\mathfrak{g}}^* \to \mathfrak{g}$, et s'inscrit dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{g}}^* & \xrightarrow{\rho} & \mathfrak{g}^* \\ {\scriptstyle \tilde{q}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{\pi} & W\backslash\mathfrak{h}^* \end{array} \tag{1.5.1}$$

L'application $\tilde{q}$ est définie de la manière suivante. Soit $(g, \nu) \in G \times_{B_1} \mathfrak{n}_1^\perp$. La décomposition $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_1$ donne par passage au dual une décomposition $\mathfrak{n}_1^\perp = \mathfrak{h}^* \oplus \mathfrak{b}_1^\perp$. On projette alors ν sur $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ selon cette décomposition et l'on pose $\tilde{q}(g, \nu) = \lambda$. On vérifie facilement que $\tilde{q}$ est bien définie, en utilisant le fait que B_1 agit trivialement sur $\mathfrak{b}_1/[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1]$.

1.6. Nous donnons maintenant quelques propriétés de ce diagramme. Tout d'abord l'application $\tilde{q}$ est une fibration topologiquement globalement triviale. On construit une trivialisation de la manière suivante. La fibre au-dessus de 0 est

$$\mathcal{B}^* = \{(\mathfrak{b}, \nu) \in \mathcal{B} \times \mathfrak{g}^* | \nu \in \mathfrak{b}^\perp\} \simeq G \times_{B_1} \mathfrak{b}_1^\perp.$$

Comme nous l'avons vu précédemment, tout élément $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ peut s'écrire $u(\mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{b}_1$, où $u(\mathfrak{b})$ est un élément de U défini à translation à droite par T près.

Lemme. *La fibration $\tilde{q} : \tilde{\mathfrak{g}}^* \to \mathfrak{h}^*$ admet une trivialisation $\mathbb{R}$-analytique et U équivariante*

$$\mathcal{B}^* \times \mathfrak{h}^* \overset{U}{\simeq} \tilde{\mathfrak{g}}^*,$$
$$(\mathfrak{b}, \nu, \lambda) \mapsto (\mathfrak{b}, u(\mathfrak{b}) \cdot \lambda + \nu),$$

ou de manière équivalente :

$$(G \times_{B_1} \mathfrak{b}_1^\perp) \times \mathfrak{h}^* \simeq (U \times_T \mathfrak{b}_1^\perp) \times \mathfrak{h}^* \simeq U \times_T \mathfrak{n}_1^\perp \simeq G \times_{B_1} \mathfrak{n}_1^\perp$$
$$(u, \nu, \lambda) \mapsto (u, \lambda + \nu)$$

Démonstration. Il résulte de 1.2 que $\mathcal{B}^* \simeq U \times_T \mathfrak{b}_1^\perp$ et $\tilde{\mathfrak{g}}^* \simeq U \times_T \mathfrak{n}_1^\perp$. Tout n'est alors qu'une suite de vérifications triviales, où l'on utilise principalement le fait que $\mathfrak{n}_1^\perp = \mathfrak{h}^* \oplus \mathfrak{b}_1^\perp$. □

1.7. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on pose

$$\tilde{\Omega}_\lambda = \tilde{q}^{-1}(\lambda) \subset \tilde{\mathfrak{g}}^*.$$

On note $\tilde{p}_\lambda$ l'homéomorphisme entre la fibre $\tilde{\Omega}_0 = \tilde{p}^{-1}(0) = \mathcal{B}^*$ et la fibre $\tilde{\Omega}_\lambda$ donnée par la trivialisation précédente, c'est-à-dire

$$\tilde{p}_\lambda : (\mathfrak{b}, \nu) \in \mathcal{B}^* \mapsto (\mathfrak{b}, u(\mathfrak{b}) \cdot \lambda + \nu) \in \tilde{\Omega}_\lambda,$$

ou encore

$$(u, \nu) \in U \times_T \mathfrak{b}_1^\perp \mapsto (u, \lambda + \nu) \in U \times_T \mathfrak{n}_1^\perp$$

1.8. Nous continuons l'étude du diagramme (1.5.1). Remarquons tout d'abord que :

Proposition. *(a) L'application de projection π est continue, surjective, à fibre finie, et $\pi^{-1}(0) = 0$. Sa restriction à $\mathfrak{h}_r^*$ est un revêtement de groupe de Galois W.*

(b) L'application ρ est propre. Si $\lambda \in \mathfrak{h}_r^*$, elle induit un homéomorphisme $\tilde{q}^{-1}(\lambda) \simeq q^{-1}(\pi(\lambda))$. Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ quelconque, l'application $\tilde{q}^{-1}(\lambda) \to q^{-1}(\pi(\lambda))$ induite par ρ est surjective.

Démonstration. Le a) est bien connu, et nous le laissons au lecteur. Le fait que ρ soit propre résulte du fait qu'elle est la restriction de la seconde projection $\mathcal{B} \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$, et que $\mathcal{B}$ est une variété complexe projective. La seconde assertion de (b) est plus subtile. On utilise le résultat suivant.

LEMME. *([CG] Lemmes 3.1.43, 3.1.44) Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ son radical, et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan contenue dans $\mathfrak{b}$, de sorte que $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$.*

- Soit $x \in \mathfrak{h}$ régulier. Alors $B \cdot x = x + \mathfrak{n}$. En particulier tout élément de la forme $x + y$ avec $y \in \mathfrak{n}$ est semi-simple régulier.

- Pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$, pour tout $x \in \mathfrak{h}$, p est constant sur $x + \mathfrak{n}$.

Revenons à la démonstration de la proposition. Soit $\lambda \in \mathfrak{h}_r^*$. On a

$$\tilde{q}^{-1}(\lambda) = \{(\mathfrak{b}, \nu) \in \tilde{\mathfrak{g}}^* |\, u(\mathfrak{b})^{-1} \cdot \nu - \lambda \in \mathfrak{b}_1^\perp\}$$

En utilisant l'isomorphisme $\tilde{\mathfrak{g}}^* \simeq U \times_T \mathfrak{n}_1^\perp$, on identifie $\tilde{q}^{-1}(\lambda)$ à l'ensemble des $(u, \nu) \in U \times_T \mathfrak{n}_1^\perp$ tels que la composante de ν sur $\mathfrak{h}^*$ dans la décomposition $\mathfrak{n}_1^\perp = \mathfrak{b}_1^\perp \oplus \mathfrak{h}^*$ soit λ, c'est-à-dire qu'il existe $\mu \in \mathfrak{b}_1^\perp$ tel que $\nu = \lambda + \mu$. Du lemme, retraduit en utilisant l'isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$, on déduit qu'un élément de la forme $\lambda + \mu$ avec $\mu \in \mathfrak{b}_1^\perp$ est semi-simple régulier et conjugué à λ. On en conclut que ν est conjugué à λ, et réciproquement, pour tout ν conjugué à λ, on écrit $\nu = g \cdot \lambda$ pour un certain $g \in G$, que l'on décompose en $g = ub$, avec $u \in U$ et $b \in B_1$. L'élément $(u, b \cdot \lambda) \in U \times_T \mathfrak{n}_1^\perp$ est alors dans $\tilde{q}^{-1}(\lambda)$, et l'on vérifie que $\nu \mapsto (u, b \cdot \lambda)$ définit un isomorphisme entre $\Omega_\lambda = q^{-1}(\pi(\lambda)) = G \cdot \lambda$ et $\tilde{q}^{-1}(\lambda)$ donné par (l'inverse de) la restriction de ρ. □

On notera $\tilde{\mathfrak{g}}_{sr}^*$ l'image réciproque de $\mathfrak{g}_{sr}^*$ par ρ.

1.9. Définissons une application p_λ (dépendant du choix de $\mathfrak{b}_1$) de $\mathcal{B}^*$ dans Ω_λ par $p_\lambda = \rho \circ \tilde{p}_\lambda$, c'est-à-dire :

$$p_\lambda : \ u \cdot (\mathfrak{b}_1, \nu) \mapsto u \cdot (\lambda + \nu)$$

pour tout $u \in U$, $\nu \in \mathfrak{b}_1^\perp$. On vérifie immédiatement que p_λ est bien définie sur $\mathcal{B}^*$. Le fait que p_λ soit à valeurs dans Ω_λ n'est pas évident sur la formule. Cela peut être vu comme une conséquence du deuxième point du lemme précédent.

Lorsque λ est régulier, p_λ est un homéomorphisme. En général, cette application p_λ n'est ni holomorphe, ni G-équivariante (seulement U-équivariante). En revanche, elle satisfait ces deux propriétés si $\lambda = 0$.

$$\begin{aligned} p_0 : \mathcal{B}^* &\to \Omega_0 = \mathcal{N} \\ (\mathfrak{b}, \nu) &\mapsto \nu \end{aligned}$$

1.10. Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ régulier. Définissons l'application $\pi_\lambda : \ \Omega_\lambda \to \mathcal{B} \quad g \cdot \lambda \mapsto g \cdot \mathfrak{b}_1$. On vérifie facilement que $\pi_\lambda \circ p_\lambda = \pi : \ \mathcal{B}^* \to \mathcal{B}$, la projection canonique. Ceci est G-équivariant et holomorphe, alors que p_λ n'est en général ni l'un ni l'autre.

2. Construction de représentations de W

On reprend les notations de la section précédente.

2.1. Supposons $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ régulier. L'application $p_\lambda : \mathcal{B}^* \to \Omega_\lambda$ est alors bijective et pour tout $w \in W$ on pose :

$$a_\lambda(w) = p_{w \cdot \lambda}^{-1} \circ p_\lambda \ : \ \mathcal{B}^* \to \mathcal{B}^*.$$

Il est évident que l'on a la relation de cocycle :

$$a_\lambda(wy) = a_{y \cdot \lambda}(w) a_\lambda(y). \tag{2.1.1}$$

Si l'on pouvait passer à la limite lorsque λ tend vers 0 dans cette équation, on obtiendrait une action de W sur $\mathcal{B}^*$ laissant l'application p_0 invariante, de sorte que W permuterait les fibres de p_0. Ceci est bien sûr impossible, car de telles fibres sont génériquement des singletons. L'application p_0 est l'application de Springer, qui est une désingularisation $p_0 : \mathcal{B}^* \to \mathcal{N} = \Omega_0$ du cône nilpotent $\mathcal{N}$ de $\mathfrak{g}^*$. Au lieu de cela, Rossmann, suivant une idée de Kazdhan-Lusztig ([**KazdhanLusztig80**]), va définir un homomorphisme de W dans le groupe des classes d'homotopies inversibles d'applications propres de $\mathcal{B}^*$ dans lui-même. Précisons que dans ([**KazdhanLusztig80**]), les auteurs ne parviennent pas à montrer que leur construction définit un tel homomorphisme. La construction de Rossmann utilisant les $a_\lambda(w)$ est différente a priori, mais on peut montrer qu'elle coïncide avec ([**KazdhanLusztig80**]).

2.2. Soit X et Y deux variétés (réelles). Notons $\mathcal{H}_c^{tp}(X,Y)$ l'ensemble des classes d'homotopies propres d'applications continues propres de X dans Y. On abrégera $\mathcal{H}_c^{tp}(X) = \mathcal{H}_c^{tp}(X,X)$ et on notera $\mathcal{H}_c^{tp,*}(X)$ le groupe des inversibles.

2.3. Écrivons explicitement la définition de $a_\lambda(w)$:

$$a_\lambda(w)(u\cdot(\mathfrak{b}_1,\nu)) = u'\cdot(\mathfrak{b}_1,\nu') \text{ où } u'\cdot(w\cdot\lambda+\nu') = u\cdot(\lambda+\nu).$$

D'où

$$u'\cdot\nu' - u\cdot\nu = u\cdot\lambda - u'\cdot(w\lambda),$$

et donc U étant compact, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u'\cdot\nu' - u\cdot\nu\| \leq C\|\lambda\|.$$

Pour λ suffisamment proche de 0 (mais régulier), les applications $a_\lambda(w)$ laissent ainsi l'application de Springer p_0 presque invariante, dans le sens où

$$\|p_0(a_\lambda(w)(\mathfrak{b},\nu)) - p_0((\mathfrak{b},\nu))\| \leq C\|\lambda\|. \tag{2.3.1}$$

2.4. Pour toute partie $V \in \mathcal{N}$, soit $\mathcal{B}^*(V) := p_0^{-1}(V) \subset \mathcal{B}^*$. On voudrait construire un homomorphisme de W dans $\mathcal{H}_c^{tp,*}(\mathcal{B}^*(V))$. Pour cela, certaines hypothèses de régularité sur V vont être nécessaires. Pour $\epsilon > 0$, posons

$$V_\epsilon = \{\nu \in \mathcal{N} \mid \exists \nu' \in V;\ \|\nu - \nu'\| < \epsilon\}.$$

On impose à la partie V de vérifier la propriété suivante :
$(*)$ pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, la classe dans $\mathcal{H}_c^{tp}(\mathcal{B}^*(V), \mathcal{B}^*(V_\epsilon))$ de l'inclusion

$$i : \mathcal{B}^*(V) \hookrightarrow \mathcal{B}^*(V_\epsilon)$$

admet un inverse, c'est-à-dire qu'il existe $p : \mathcal{B}^*(V_\epsilon) \to \mathcal{B}^*(V)$ tel que la classe d'homotopie de $p \circ i$ dans $\mathcal{H}_c^{tp}(\mathcal{B}^*(V))$ est celle de l'application identique de $\mathcal{B}^*(V)$, et celle de $i \circ p$ est celle de l'application identique de $\mathcal{B}^*(V_\epsilon)$.

Nous verrons plus bas que cette propriété est partagée par une classe très large de parties de $\mathcal{N}$, du moins suffisamment pour toutes les applications que nous envisageons. Nous supposerons désormais que V vérifie $(*)$, et nous fixons un ϵ convenable.

2.5. Il est clair d'après 2.3.1 que pour λ assez petit,

$$a_\lambda(w)(\mathcal{B}^*(V)) \subset \mathcal{B}^*(V_\epsilon).$$

En particulier l'application,

$$a_{\lambda,V}(w) : \ p \circ a_\lambda(w) \circ i$$

de $\mathcal{B}^*(V)$ dans lui-même est définie pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ régulier et suffisamment proche de 0. L'ensemble des tels λ étant connexe, la classe $a_V(w)$ de $a_{\lambda,V}(w)$ dans $\mathcal{H}_c^{tp}(\mathcal{B}^*(V))$ ne dépend pas de λ, comme le suggère la notation, et l'équation (2.1.1) implique

$$a_V(wy) = a_V(w)a_V(y).$$

On a donc définit ainsi un homomorphisme de W dans le groupe des inversibles de $\mathcal{H}_c^{tp}(\mathcal{B}^*(V))$. Ceci donne en particulier une représentation de W dans $H_*(\mathcal{B}^*(V))$.

2.6. Rossmann donne deux conditions suffisantes pour que V vérifie (*).

(a) V est un sous-polyèdre fini d'une triangulation de $\mathcal{N}$.

(b) V est un sous-ensemble constructible de $\mathcal{N}$, stable par multiplication scalaire.

3. Spécialisation

3.1. On choisit $V = \{\nu\}$ dans la construction précédente, de sorte que $\mathcal{B}^*(\{\nu\})$ peut s'identifier à

$$\mathcal{B}^\nu := \{\mathfrak{b} \in \mathcal{B} |\ \nu \in \mathfrak{b}^\perp\}.$$

Ceci est le groupe des points fixes du sous-groupe à un paramètre engendré par ν lorsqu'on identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ par la forme de Killing. On a donc construit dans les paragraphes précédents une action du groupe de Weyl W dans $H_*(\mathcal{B}^\nu)$.

Posons $A_G(\nu) = G^\nu/(G^\nu)_0$. Ce groupe aussi agit sur $H_*(\mathcal{B}^\nu)$.

Lemme. *Soit $\nu \in \mathcal{N}$. Il existe ν' dans l'orbite de ν tel que tout élément de $A_G(\nu')$ admet un représentant dans U.*

Démonstration. Ceci résulte des résultats sur les classes de conjugaison de $\mathfrak{sl}_2$ triplets et leur centralisateurs, voir par exemple [**Vogan98**], Proposition 4.4 et 4.5.

Corollaire. *L'action de W dans $H_*(\mathcal{B}^\nu)$ commute avec celle de $A_G(\nu)$*

Démonstration. Les opérateurs $a_\lambda(w) = p_{w\cdot\lambda}^{-1} \circ p_\lambda$ commutent avec l'action de U sur $\mathcal{B}^*$, les p_λ étant U-équivariants. □

3.2. Le groupe W agit sur la variété des drapeaux $\mathcal{B} \simeq U/T$ par

$$a(w) \cdot (u \cdot \mathfrak{b}_1) = u \cdot (w^{-1} \cdot \mathfrak{b}_1) \ \ (u \in U).$$

Lemme. *(Voir [**HottaSpringer77**].) L'inclusion $i :\ \mathcal{B}^\nu \hookrightarrow \mathcal{B}$ induit une application W-équivariante*

$$H_*(\mathcal{B}^\nu) \to H_*(\mathcal{B}).$$

Cette application se factorise par la projection

$$H_*(\mathcal{B}^\nu) \to H_*(\mathcal{B}^\nu)^{A_G(\nu)}$$

sur les $A_G(\nu)$-invariants.

Démonstration. Il suffit de montrer que la classe d'homotopie $a_\nu(w)$ construite ci-dessus admet un représentant $a^\nu : \mathcal{B}^\nu \to \mathcal{B}^\nu$ vérifiant

$$i \circ a^\nu(w) \sim a(w) \circ i$$

Choisissons un voisinage V de $\mathcal{B}^\nu$ dans $\mathcal{B}$ pour lequel l'inclusion $k : \mathcal{B}^\nu \to V$ admet un inverse en homotopie $q : V \to \mathcal{B}^\nu$, c'est-à-dire $q \circ k$ est homotope à l'identité de $\mathcal{B}^\nu$ et $k \circ q$ est homotope à l'identité de V. Soit

$$U := \{(\mathfrak{b}, \nu'); \mathfrak{b} \in V, \|\nu'\| \leq R\}$$

pour un certain $R > \|\nu\|$ fixé. Définissons

$$j : \mathcal{B}^\nu \to U, \quad \mathfrak{b} \mapsto (k(\mathfrak{b}), \nu) = (\mathfrak{b}, \nu) \qquad p : U \to \mathcal{B}^\nu, \quad (\mathfrak{b}, \nu') = q(\mathfrak{b}).$$

Montrons que $p \circ j \sim 1$ sur $\mathcal{B}^\nu$ et $j \circ p \sim 1$ sur U. La première relation est claire puisque $p \circ j(\mathfrak{b}) = q \circ k(\mathfrak{b})$ et $q \circ k \sim 1$ sur $\mathcal{B}^\nu$. Pour la seconde relation, utilisons le fait que $k \circ q \sim 1$ sur V pour choisir une homotopie $q_s : V \to V$, $0 \leq s \leq 1$ de $q_0 = 1_V$ à $q_1 = k \circ q$. Appliquons successivement les homotopies suivantes :

(1) $(\mathfrak{b}, \nu') \mapsto (\mathfrak{b}, s\nu')$, de $s = 1$ à $s = 0$,
(2) $(\mathfrak{b}, \nu') \mapsto (q_s(\mathfrak{b}), 0)$, de $s = 0$ à $s = 1$,
(3) $(\mathfrak{b}, \nu') \mapsto (k \circ q(\mathfrak{b}), s\nu)$, de $s = 0$ à $s = 1$.

Ceci donne une homotopie de 1_U à $j \circ p$, comme voulu.

Pour λ proche de 0, $a_\lambda(w)(j(\mathcal{B}^\nu))$ reste inclus dans le voisinage U de $j(\mathcal{B}^\nu)$. Ce qui précède montre que l'on peut utiliser j et p pour construire la classe d'homotopie $a^\nu(w)$. Pour un tel λ, $a^\nu(w)$ est donc représentée par

$$p \circ a_\lambda(w) \circ j : \mathcal{B}^\nu \to \mathcal{B}^\nu.$$

Pour $0 \leq s \leq 1$, définissons

$$j_s : \mathcal{B}^\nu \to U \quad \mathfrak{b} \mapsto (\mathfrak{b}, s\nu), \qquad p_s : U \to V, \quad (\mathfrak{b}, \nu') \mapsto q_s(\mathfrak{b})),$$

avec q_s comme ci-dessus. Considérons la famille d'applications

$$p_s \circ a_\lambda(w) \circ j_s : \mathcal{B}^\nu \to V \qquad (0 \leq s \leq 1).$$

Pour $s = 0$, nous obtenons

$$p_0 \circ a_\lambda(w) \circ j_0(\mathfrak{b}) = q_0 \circ a_\lambda(w)((\mathfrak{b}, 0)) = a(w)(\mathfrak{b})$$

parce que $a_\lambda(w)$ et $a(w)$ coïncident sur $\mathcal{B}$ (vu comme la section nulle de $\mathcal{B}^*$), comme on le vérifie facilement à partir de la définition de $a_\lambda(w)$. D'autre part, pour $s = 1$,

$$p_1 \circ a_\lambda(w) \circ j_1(\mathfrak{b}) = p \circ a_\lambda(w)((\mathfrak{b}, \nu)) = p \circ a_\lambda(w) \circ j(\mathfrak{b}) = a^\nu(w)(\mathfrak{b}).$$

On a donc construit l'homotopie voulue entre $i \circ a^\nu(w)$ et $a(w) \circ i$. La seconde assertion du lemme se montre en remarquant que l'action du stabilisateur de ν dans U, qui induit celle de $A(\nu)$ sur $H_*(\mathcal{B}^\nu)$, est triviale sur $H_*(\mathcal{B})$ car U est connexe. $\square$

4. Action d'un sous-groupe analytique et variété conormale

4.1. Notations. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et V^* son dual. On notera $V_\mathbb{R}$ l'espace V considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $(V_\mathbb{R})^*$ son dual. On notera $\langle\ ,\ \rangle$ la dualité entre V et V^*, et par $(\ ,\ )$ celle entre $V_\mathbb{R}$ et $(V_\mathbb{R})^*$. On peut aussi regarder

V^* comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et noter cela $(V^*)_{\mathbb{R}}$. On a alors une identification entre $(V^*)_{\mathbb{R}}$ et $(V_{\mathbb{R}})^*$ donnée par

$$\phi \in (V^*)_{\mathbb{R}} \mapsto \phi_{\mathbb{R}} \in (V_{\mathbb{R}})^*$$

où pour tout $v \in V_{\mathbb{R}}$,

$$\phi_{\mathbb{R}}(v) = \mathrm{Re}\langle \phi, v \rangle$$

Ceci nous permet d'abandonner les indices $_{\mathbb{R}}$ dans les notations.

Ceci s'applique à notre algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{q}$ une sous-algèbre réelle de $\mathfrak{g}$ et Q le sous-groupe analytique correspondant. Notons $R_{\mathfrak{q}}$ la restriction de $\mathfrak{g}^* \simeq (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^*$ à $\mathfrak{q}^*$ et $\mathfrak{q}^{\perp}$ son noyau. On considère la famille de supports de $\mathfrak{g}^*$ formée des parties fermées contenues dans des bandes de la forme :

$$\|R_{\mathfrak{q}}(\xi)\| \le C_1, \qquad \|q(\xi)\| \le C_2, \tag{4.1.1}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives. Ces conditions définissent aussi des familles de supports sur $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ et sur les fibres Ω_λ et $\tilde{\Omega}_\lambda$. On notera ‘$H_*(.)$ les homologies correspondantes. Remarquons que le seconde condition de (4.1.1) est vide sur une fibre Ω_λ (ou $\tilde{\Omega}_\lambda$) donnée. En particulier, comme $\mathcal{B}^* = \tilde{\Omega}_0$ la définition de ‘$H_*(\mathcal{B}^*)$ ne fait pas intervenir la seconde condition.

4.2. La variété conormale. La variété conormale à la Q-action sur $\mathcal{B}$ est :

$$\mathcal{S} := \{(\mathfrak{b}, \nu) \in \mathcal{B}^* : \ \nu \in \mathfrak{q}^{\perp}\}.$$

On dispose de deux applications naturelles :

$$\begin{array}{ll} \pi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}, & \rho : \mathcal{S} \to \mathfrak{g}^* \\ (\mathfrak{b}, \nu) \mapsto \mathfrak{b} & (\mathfrak{b}, \nu) \mapsto \nu. \end{array}$$

Ceci mène à deux façons différentes de voir $\mathcal{S}$, premièrement comme union des fibrés conormaux aux Q-orbites dans $\mathcal{B}$, et deuxièmement comme image inverse $\rho^{-1}(\mathcal{N} \cap \mathfrak{q}^{\perp})$ pour la résolution de Springer $\rho : \ \mathcal{B}^* \to \mathcal{N}$.

Dans la première interprétation, on identifie $\mathcal{B}^*$ avec le fibré cotangent réel de la variété différentiable $\mathcal{B}^*$ par la dualité $(X, \nu) = \mathrm{Re}\langle X, \nu \rangle$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{b} \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$. Une autre manière intéressante de voir $\mathcal{S}$ qui est parfois utile est de définir

$$\rho_{\mathfrak{q}} : \mathcal{B}^* \to \mathfrak{q}^*; \qquad (\mathfrak{b}, \nu) \mapsto R_{\mathfrak{q}}(\nu).$$

Ceci est l'application moment pour l'action de Q sur la variété (réelle) $\mathcal{B}^*$. On a alors $\mathcal{S} = \rho_{\mathfrak{q}}^{-1}(\{0\})$.

4.3. L'importance de $\mathcal{S}$ dans le présent contexte vient du résultat suivant.

PROPOSITION. *L'inclusion $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{B}^*$ induit un isomorphisme de $H_*(\mathcal{S}) \simeq$ ‘$H_*(\mathcal{B}^*)$, où $H_*(\mathcal{S})$ désigne l'homologie de Borel-Moore avec supports arbitraires.*

Démonstration. Pour tout $c > 0$, soit $V_c = \{(\mathfrak{b}, \nu) \in \mathcal{B}^* | \ \|R_{\mathfrak{q}}(\nu)\| \le c\}$. Alors

$$‘H_*(\mathcal{B}^*) = \lim_{c \to \infty} H_*(V_c),$$

la limite inductive des homologies des V_c avec supports arbitraires (**[BorelMoore60]**, Thm 3.4). Pour tout $t > 0$, l'application $V_c \to V_{tc}$, $(\mathfrak{b}, \nu) \mapsto (\mathfrak{b}, t\nu)$ induit un isomorphisme

$$H_*(V_c) \simeq H_*(V_{tc}).$$

Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, le voisinage fermé V_ϵ de $\mathcal{S}$ se rétracte par déformation propre sur $\mathcal{S}$: il suffit de choisir une triangulation de la variété projective $\overline{\mathcal{B}}^*$ qui contient l'adhérence de $\mathcal{S}$ comme un sous-complexe. On a donc

$$H_*(V_\epsilon) \simeq H_*(\mathcal{S})$$

pour un tel ϵ. On obtient donc l'isomorphisme voulu en combinant les deux isomorphismes obtenus ci-dessus. □

4.4. Nous supposerons maintenant que le nombre d'orbites de Q dans $\mathcal{B}$ est fini. Il est donc clair que $\mathcal{S}$ admet une structure de variété analytique réelle de dimension

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}^* = 2n,$$

où $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}$. L'homologie en degré maximal peut être décrite de manière assez explicite, comme suit. Notons $\mathcal{S}_\infty$ la variété des points lisses de $\mathcal{S}$. On dira qu'une composante connexe C de $\mathcal{S}_\infty$ est une composante de $\mathcal{S}$. Muni d'une orientation, une telle composante définit une $2n$-chaîne $[C]$ dans $\mathcal{S}$.

Proposition. *Tout $2n$-cycle Γ dans $\mathcal{S}$ peut s'écrire sous la forme*

$$\Gamma = \sum_C m_C\, [C] \qquad (m_C \in \mathbb{Q}),$$

où la somme est prise sur les composantes connexes de $\mathcal{S}_\infty$.

Remarque. - On a choisi ici de prendre l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$, car c'est celle qui interviendra naturellement par la suite.

- Les chaînes $[C]$ ne sont elles-mêmes pas des cycles en général, sauf si $\mathcal{S}$ est muni d'une structure complexe.

La démonstration sera donnée un peu plus loin dans un cadre plus général.

4.5. Les principaux exemples que nous considérerons sont : $Q = B, G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{C}}$, où B est un sous-groupe de Borel de G, $G_{\mathbb{R}}$ une forme réelle de G, et $K_{\mathbb{C}}$ la complexification d'un compact maximal K d'une forme réelle $G_{\mathbb{R}}$ de G. En fait les cas $Q = G_{\mathbb{R}}$ et $Q = K_{\mathbb{C}}$ sont des cas particuliers de :

Définition. Une sous-algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de points fixes $\mathfrak{g}^\iota$ où ι est une involution de $\mathfrak{g}$ en tant qu'algèbre de Lie réelle.

On supposera toujours que ι commute avec τ, l'involution de Cartan de G définissant la forme compacte U, puisque l'on peut toujours s'y ramener par conjugaison.

Proposition. *Dans le cas où Q provient d'une sous-algèbre symétrique, le nombre d'orbites de Q dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{N}(\mathfrak{q}^\perp) = \mathcal{N} \cap \mathfrak{q}^\perp$ est fini ainsi que le nombre de composantes connexes des groupes d'isotropie.*

La première assertion est un résultat de [**Rossman79**] (voir aussi [**RichardsonSpringer**]) et la seconde est due à Kostant-Rallis ([**KostantRallis**]) et Sekiguchi.

5. Généralités topologiques

5.1. Si X est un espace topologique quelconque, on notera $H_*(X)$ son homologie de Borel-Moore à supports arbitraires ; les coefficients sont pris dans $\mathbb{Q}$, sauf mention du contraire. Lorsque X est une variété analytique réelle, l'homologie de Borel-Moore peut être réalisée comme celle d'un complexe de chaînes subanalytiques (voir [**KashiwaraShapira**]).

LEMME. *Soit X une variété analytique réelle de dimension m.*

a) Pour toute partie fermée Z de X, l'inclusion $i : Z \hookrightarrow X$ induit une injection $H_m(Z) \hookrightarrow H_m(X)$.

b) Soit X_∞ la variété des points lisses de X. L'application

$$H_m(X) \to H_m(X_\infty)$$

induite par le plongement ouvert $X_\infty \to X$ est injective. En particulier tout m-cycle $\Gamma \in H_m(X)$ peut s'écrire comme une somme

$$\Gamma = \sum_C m_C\,[C], \qquad (m_C \in \mathbb{Q})$$

la somme portant sur les composantes connexes C de X_∞, et $[C]$ est le cycle fondamental dans $H_m(X_\infty)$ donné par une orientation de C.

Démonstration. L'assertion a) découle de la suite exacte

$$0 = H_{m+1}(X \backslash Z) \to H_m(Z) \to H_m(X)$$

provenant de la suite exacte longue en homologie associée à la partie fermée Z.

Pour démontrer b), considérons la partie suivante de la suite exacte longue associée à la sous-partie fermée $X_{sing} := X \backslash X_\infty$:

$$H_m(X_{sing}) \to H_m(X) \to H_m(X_\infty).$$

Comme $\dim(X_{sing}) < m$, $H_m(X_{sing}) = 0$ et on obtient l'injection voulue. De plus X_∞ étant une variété réelle de dimension m, ses composantes connexes munies d'une orientation forment une base de $H_m(X_\infty)$, ce qui termine de montrer l'assertion. □

5.2. Le résultat suivant sera crucial :

LEMME. *Soit G un groupe de Lie réel et $f : X \to Y$ une application surjective G-équivariante entre deux G-variétés analytiques réelles. Supposons que $Y = G\cdot y \simeq G/H$ soit un espace homogène, et soit $F := f^{-1}(\{y\})$. Posons $m = \dim X$, et $e = \dim F$. Fixons une orientation de Y. Alors pour tout p, il existe une correspondance biunivoque $\gamma \leftrightarrow \Gamma$, donnée par $\Gamma = G\cdot\gamma$ et $\gamma = \Gamma \cap F$ entre les $(e-p)$-chaînes H-invariantes γ sur F, et les $(m-p)$-chaînes G-invariantes sur X. Cette correspondance commute avec les opérateurs de bords. En degré maximum, cela induit un isomorphisme en homologie*

$$H_m(X) \simeq H_e(F)^A$$

où $A = H/H_0$ est le groupe des composantes connexes de H.

Démonstration. La correspondance au niveau ensembliste, telle qu'elle est donnée dans l'énoncé du lemme, induit clairement une correspondance au niveau des chaînes. En degré maximal, les composantes connexes de X_∞ correspondent aux A-orbites sur les composantes connexes de F_∞. Ceci donne $H_m(X_\infty) \simeq H_e(F_\infty)^A$ qui se restreint en $H_m(X) \simeq H_e(F)^A$.

5.3. Notations. Soit G un groupe de Lie réel, et soit Y une variété analytique réelle (pas nécessairement lisse), munie d'une action de G. On suppose que G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans Y. On identifiera les parties de $G\backslash Y$ aux sous-ensembles G-stables de Y.

On définit un ordre partiel sur $G\backslash Y$ en posant

$$\mathcal{O} < \mathcal{Q} \text{ si } \mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{Q}} \backslash \mathcal{Q}$$

où $\overline{\mathcal{Q}}$ est l'adhérence de $\mathcal{Q}$ dans Y.

Pour tout sous-ensemble A de $G\backslash Y$, définissons $\partial A \subset G\backslash Y$ par

$$\partial A = \{\mathcal{O} \in A : \ \exists \mathcal{Q} \in A | \ \mathcal{O} < \mathcal{Q}\}.$$

On notera aussi parfois $A' = \partial A$, surtout lorsque le symbole ∂ a d'autres utilisations.

Pour tout $A \subset G\backslash Y$, posons $A^0 = A \backslash \partial A$. Donc A^0 est constitué des orbites $\mathcal{O}$ dans A qui ne sont pas dans l'adhérence d'une autre orbite dans A. Celles-ci sont précisément les orbites ouvertes dans A, et seront appelées les orbites dominantes de A.

Pour tout $A \subset G\backslash Y$, considérons la suite de parties de A :

$$\dots A^{(k+1)} \subset A^{(k)} \subset \dots A'' \subset A' \subset A$$

obtenue en répétant l'opération $B \mapsto B' = \partial B$. On obtient ainsi une filtration sur $G\backslash Y$, en prenant $A = G\backslash Y$, que l'on appellera la G-filtration de $G\backslash Y$.

Soit $f : X \to Y$ une surjection G-équivariante entre variétés analytiques réelles. Pour toute partie $A \subset G\backslash Y$, posons $X_A := f^{-1}(A)$. La G-filtration de Y induit alors une filtration sur X :

$$\dots X^{(k+1)} \subset X^{(k)} \subset \dots X'' \subset X' \subset X$$

où $X^{(k)} = f^{-1}(Y^{(k)})$.

5.4. Hypothèses. Nous allons maintenant étudier un type particulier d'applications $f : X \to Y$, G-équivariante. Soit f comme ci-dessus ayant les propriétés suivantes :

a) G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans Y.

b) pour tout $y \in Y$, le groupe des composantes connexes $A_G(y) = G^y/(G^y)_0$ du centralisateur de y dans G est fini,

c) Toutes les variétés $X_{\mathcal{O}} = f^{-1}(\mathcal{O})$ ont la même dimension $m = \dim X$,

d) pour tout $y \in Y$, $(f^{-1}(\{y\}))_{sing}$ a une codimension dans $f^{-1}(\{y\})$ au moins égale à deux,

e) pour tout $y \in Y$, $H_{e_y-1}(f^{-1}(\{y\})) = 0$, où $e_y = \dim f^{-1}(\{y\})$.

5.5.

THÉORÈME. *a) La G-filtration de $G\backslash Y$ induit une filtration*

$$\{0\} \subset \dots H_m(X^{(k+1)}) \subset H_m(X^{(k)}) \subset \dots H_m(X') \subset H_m(X)$$

dont le gradué est

$$\mathrm{gr} H_m(X) = \sum_{\mathcal{O} \in G\backslash Y} H_m(X_{\mathcal{O}}). \tag{5.5.1}$$

b) Pour toute orbite $\mathcal{O} = G \cdot y \in G\backslash Y$, on a

$$H_m(X_{\mathcal{O}}) = H_{e_y}(f^{-1}(\{y\}))^{A_G(y)}. \tag{5.5.2}$$

c) Pour toute partie $A \subset G\backslash Y$, les inclusions

$$X_{A'} \to X_A \leftarrow X_{A-A'}$$

induisent une suite exacte

$$0 \to H_m(X_{A'}) \to H_m(X_A) \to H_m(X_{A-A'}) \to 0. \tag{5.5.3}$$

et des isomorphismes

$$H_m(X_A)/H_m(X_{A'}) \simeq H_m(X_{A-A'}) \simeq \sum_{\mathcal{O}\in A-A'} H_m(X_{\mathcal{O}}). \tag{5.5.4}$$

Démonstration. Commençons par montrer c), puisque a) en est un cas particulier. Soit $A \subset G\backslash Y$ et soit $\mathcal{O}$ une orbite fermée dans A. La suite exacte en homologie associée à l'inclusion de la partie fermée $X_{\mathcal{O}} \hookrightarrow X_A$ est

$$H_{m+1}(X_{A-\mathcal{O}}) \to H_m(X_{\mathcal{O}}) \to H_m(X_A) \to H_m(X_{A-\mathcal{O}}) \to H_{m-1}(X_{\mathcal{O}}). \tag{5.5.5}$$

D'une part, on a trivialement $H_{m+1}(X_{A-\mathcal{O}}) = 0$, d'autre part, on va montrer que la dernière flèche de la suite est nulle elle aussi. Tout élément de $H_m(X_{A-\mathcal{O}})$ peut être représenté par une m-chaîne $\Gamma \in X$, contenue dans $X_{A-\mathcal{O}} = X_A - X_{\mathcal{O}}$, qui vue comme une chaîne dans X_A à la propriété que $\partial\Gamma \subset X_{\mathcal{O}}$. Comme précédemment, Γ peut s'écrire comme combinaison linéaire de composantes connexes orientées C de $(X_{A-\mathcal{O}})_\infty$, et donc $\partial\Gamma$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des $(m-1)$-chaînes ∂C de $X_{\mathcal{O}}$. En particulier, $\partial\Gamma$ est un $(m-1)$-cycle G-stable sur $X_{\mathcal{O}}$. Fixons $y \in \mathcal{O}$, soit $F = f^{-1}(\{y\})$ et soit $H = G^y$ le centralisateur de y dans G. Le Lemme 5.2 fournit d'une $(e-1)$-chaîne H-invariante β sur F de sorte que $\partial\Gamma = G\cdot\beta$ (où $e = \dim F$). Par hypothèse $H_{e-1}(F) = 0$, donc $\beta = \partial\alpha$ pour une certaine e-chaîne α sur F. Soit $S = \mathrm{supp}\beta$. C'est une partie fermée sous-analytique de F, de dimension $(e-1)$. Il s'ensuit que α détermine une classe dans $H_e(F-S)$, car $\partial\alpha = \beta$ a son support dans S. Comme F_{sing} a codimension plus grande où égale à deux dans F, on a $H_e(F-S) = H_e(F_\infty - S\cap F_\infty)$, donc tout élément dans $H_e(F-S)$ peut-être représenté par une combinaison linéaire de composantes connexes orientées de $F_\infty - S\cap F_\infty$. Ces composantes sont stables sous l'action de H_0, la composante neutre de H, car S est stable sous H. On peut donc trouver une e-chaîne α H_0-stable dans F, de sorte que $\partial\alpha = \beta$. Comme β est stable sous H, et que $A = H/H_0$ est fini, on peut remplacer α par $|A|^{-1}\sum_{a\in A} a\cdot\alpha$ pour obtenir une e-chaîne H-stable α vérifiant toujours $\alpha = \partial\beta$. La m-chaîne G-stable $G\cdot\alpha$ sur $X_{\mathcal{O}}$ correspondant à α par le Lemme 5.2 vérifie alors $\partial(G\cdot\alpha) = G\cdot\partial\alpha = G\cdot\beta = \partial\Gamma$, donc $\partial\Gamma \simeq 0$ dans $H_{m-1}(X_{\mathcal{O}})$.

Il s'en suit que (5.5.5) se réduit à

$$0 \to H_m(X_{\mathcal{O}}) \to H_m(X_A) \to H_m(X_{A-\mathcal{O}}) \to 0. \tag{5.5.6}$$

Cette opération se répète : si $\mathcal{Q}$ est une orbite relativement fermée dans $X_{A-\mathcal{O}}$, on obtient :

$$0 \to H_m(X_{\mathcal{Q}}) \to H_m(X_{A-\mathcal{O}}) \to H_m(X_{A-(\mathcal{O}\cup\mathcal{Q})}) \to 0. \tag{5.5.7}$$

L'image inverse de $H_m(X_{\mathcal{Q}}) \subset H_m(X_{A-\mathcal{O}})$ par l'application $H_m(X_A) \to H_m(X_{A-\mathcal{O}})$ est égale à $H_m(X_{\mathcal{O}\cup\mathcal{Q}}) \subset H_m(X_A)$ (remarquons que $\mathcal{O}\cup\mathcal{Q}$ est fermé dans A). On déduit de (5.5.6) et (5.5.7) :

$$0 \to H_m(X_{\mathcal{O}\cup\mathcal{Q}}) \to H_m(X_A) \to H_m(X_{A-(\mathcal{O}\cup\mathcal{Q})}) \to 0. \tag{5.5.8}$$

En soustrayant successivement les orbites dans A', de sorte qu'a chaque étape l'orbite enlevée est relativement fermée dans l'ensemble d'où on la retire, on trouve :

$$0 \to H_m(X_{A'}) \to H_m(X_A) \to H_m(X_{A-A'}) \to 0. \tag{5.5.9}$$

Par définition de A', les orbites dans $A-A'$ sont ouvertes dans $A-A'$, donc $X_{A-A'}$ est l'union disjointe des ouverts $X_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O} \in A-A'$. Ceci entraîne que :

$$H_m(X_{A-A'}) = \sum_{\mathcal{O}\in A-A'} H_m(X_{\mathcal{O}}),$$

et ceci démontre le c) du théorème. L'assertion a) en découle en utilisant le Lemme 5.1 et l'assertion b) provient du lemme 5.2 appliqué à $f : X_{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$.

5.6. Nous faisons maintenant quelques observations en relation avec ce qui précède. Notons tout d'abord que dans le théorème, on peut remplacer A' par un sous-ensemble B tel que $A' \subset B \subset A$, et l'on obtient :

$$0 \to H_m(X_B) \to H_m(X_A) \to H_m(X_{A-B}) \to 0. \tag{5.6.1}$$

Ceci est clair lorsqu'on regarde la démonstration.

$$0 \to H_m(X_{A'}) \to H_m(X_A) \to H_m(X_{A-A'}) \to 0. \tag{5.6.2}$$

Dans a) du théorème, on peut remplacer la filtration $Y^{(k)}$ sur Ypar une filtration G-stable vérifiant pour tout k :

$$Y^{(k+1)} - Y^{(k)}$$

est une union d'orbites relativement ouvertes. Par exemple on peut prendre pour $Y^{(k)}$ l'union des orbites de codimension k dans X. La filtration définie précédemment est la plus grossière vérifiant la propriété voulue, et donc celle qui donne l'assertion la plus forte dans a) du théorème.

La démonstration du théorème exige que $|A|$, l'ordre du groupe, soit inversible dans l'anneau des coefficients. C'est pour cela que l'on prend $\mathbb{Q}$ plutôt que $\mathbb{Z}$.

5.7. Nous définissons une notion de support asymptotique :

Définition. Pour toute m-chaîne Γ sur X, on posera $A(\Gamma) = \overline{f(\mathrm{supp}\Gamma)} \subset G\backslash Y$

5.8. Nous avons le

Lemme. *Soit $\Gamma \in H_m(X)$.*

a) Il existe une décomposition unique

$$\Gamma = \sum_{\mathcal{O}\in G\backslash Y} \Gamma_{\mathcal{O}}$$

où $\Gamma_{\mathcal{O}}$ est une m-chaîne G-invariante sur $X_{\mathcal{O}}$.

b) $A(\Gamma)$ est la plus petite partie fermée A de $G\backslash Y$ telle que $\Gamma \in H_m(X_A)$.

c) Si $\mathcal{O} = G\cdot y \in G\backslash Y$ est une orbite dominante dans $A(\Gamma)$, alors $\Gamma_{\mathcal{O}}$ est un m-cycle dans $X_{\mathcal{O}}$, et $\Gamma_y := \Gamma_{\mathcal{O}} \cap f^{-1}(\{y\})$ est un e_y-cycle dans $f^{-1}(\{y\})$, où $e_y = \mathrm{dim} f^{-1}(\{y\})$.

Démonstration. Soit $Z = \mathrm{supp}\Gamma$. L'union disjointe $X = \coprod_{\mathcal{O}\in G\backslash Y} X_{\mathcal{O}}$ donne une décomposition $Z = \coprod_{\mathcal{O}\in G\backslash Y} Z_{\mathcal{O}}$, et comme $\mathrm{dim} X_O = m$ pour toute orbite $\mathcal{O}$, ceci induit une unique décomposition $\Gamma = \sum_{\mathcal{O}\in G\backslash Y} \Gamma_{\mathcal{O}}$ où $\Gamma_{\mathcal{O}}$ est une m-chaîne sur $X_{\mathcal{O}}$ avec support $Z_{\mathcal{O}}$. Comme tout m-cycle sur X est une combinaison linéaire de composantes connexes orientées de X_∞, il est nécessairement G-invariant, et donc il en est de même des m-chaînes $\Gamma_{\mathcal{O}}$. Ceci montre *a*). Le *b*) est évident. Soit $\mathcal{O}$ une orbite dominante de $A := A(\Gamma)$, alors $X_{\mathcal{O}}$ est ouvert dans X_A et $\Gamma_{\mathcal{O}}$ est l'image de Γ par l'application naturelle $H_m(X_A) \to H_m(X_{\mathcal{O}})$ du Lemme 5.5, a). La dernière assertion découle du lemme 5.2. □

5.9. Pour une orbite quelconque $\mathcal{O}$, la m-chaîne $\Gamma_{\mathcal{O}}$ n'est pas nécessairement un cycle. Mais si $A \subset G\backslash Y$ est fermé, si $\Gamma \in H_m(X_A)$, et si $\mathcal{O}$ est une orbite dominante dans A, alors $\Gamma_{\mathcal{O}}$ est un m-cycle dans $X_{\mathcal{O}}$: c'est l'image de Γ par l'application naturelle

$$0 \to H_m(X_{A-\mathcal{O}}) \to H_m(X_A) \to H_m(X_{\mathcal{O}}) \to 0$$

6. Homologie de $\mathcal{S}$ et représentations de W

6.1. Revenons à la situation de la Section 4 : $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre de Lie symétrique réelle de $\mathfrak{g}$ et Q est le sous-groupe analytique correspondant. L'application Q-équivariante $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ vérifie alors les hypothèses 5.4. En effet, nous avons déjà vu a) et b) (Proposition 4.5). La propriété c) provient du fait que $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ est le fibré conormal à l'orbite $\mathcal{O}$, et donc de dimension réelle $2n$. La fibre $\pi^{-1}(\{y\})$ d'un élément $y \in \mathcal{B}$ est un espace vectoriel, donc les propriétés d) et e) sont vérifiées.

6.2. Considérons maintenant l'application $\rho : \mathcal{S} \to \mathcal{N}(\mathfrak{q}^\perp) = \mathcal{N} \cap \mathfrak{q}^\perp$

Lemme. *Les hypothèses 5.4 sont vérifiées pour $\rho : \mathcal{S} \to \mathcal{N}(\mathfrak{q}^\perp)$.*

Démonstration. Comme précédemment, a) et b) ont déjà été énoncés (Proposition 4.5). Soit $\mathcal{O} = Q \cdot \nu$ une Q-orbite dans $\mathcal{N}(\mathfrak{q}^\perp)$. l'application ρ se restreint au-dessus de $\mathcal{O}$ en une fibration Q-équivariante

$$\mathcal{B}^\nu \hookrightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}$$

où la fibre $\mathcal{B}^\nu$ est la variété de Springer

$$\mathcal{B}^\nu = \{\mathfrak{b} \in \mathcal{B} \,|\, \nu \in \mathfrak{b}^\perp.\}$$

On a donc $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}_{\mathcal{O}}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O} + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{B}^\nu$. Or d'après un résultat de Spaltenstein et Steinberg

$$\dim_{\mathbb{C}} G \cdot \nu + 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}^\nu = 2n.$$

De plus $\dim_{\mathbb{C}} G \cdot \nu = \dim_{\mathbb{R}} Q \cdot \nu$ ([**KostantRallis**]), donc

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}_{\mathcal{O}}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O} + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{B}^\nu = \dim_{\mathbb{C}} G \cdot \nu + 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}^\nu = 2n.$$

L'hypothèse d) est vérifiée car la fibre $\mathcal{B}^\nu$ est une variété algébrique complexe et l'hypothèse e) est un cas particulier du fait que $H_k(\mathcal{B}^\nu) = 0$ si k est impair ([**DeCLP**]).

6.3. Les résultats topologiques de la Section précédente, appliqués à $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ ont le corollaire suivant.

Théorème. *La dimension de $H_{2n}(\mathcal{S})$ est égale au nombre de Q-orbites dans $\mathcal{B}$:*

$$H_{2n}(\mathcal{S}) \overset{\mathbb{Q}}{\simeq} \mathbb{Q}[Q\backslash\mathcal{B}].$$

Démonstration. Toute $2n$-chaîne sur $\mathcal{S}$ s'écrit comme combinaison linéaire de composante connexes orientées $[C]$ de $\mathcal{S}_\infty$ (Théorème 5.1). Chaque fibré conormal $\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$ à une orbite $\mathcal{Q}$ défini une chaîne $[\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}]$, que d'après le Théorème 5.5, on peut compléter en un un cycle de la forme $[\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}]+\cdots$, où les points de suspension indiquent une combinaison linéaire de composantes connexes orientées $[C]$ de $\mathcal{S}_\infty \cap \mathcal{S}_{\overline{\mathcal{Q}}-\mathcal{Q}}$. Il est clair d'après le Théorème 5.5, a) que ces cycles forment une $\mathbb{Q}$-base de $H_{2n}(\mathcal{S})$. □

6.4. Nous redonnons maintenant le Théorème 5.5 appliqué à $\rho : \mathcal{S} \to \mathcal{N}(\mathfrak{q}^\perp)$.

Théorème. *a) La filtration naturelle sur $Q\backslash\mathcal{N}(\mathfrak{q}^\perp)$ induit une filtration sur $H_{2n}(\mathcal{S})$ dont le gradué est*

$$\mathrm{gr}H_{2n}(\mathcal{S}) \simeq \sum_{\mathcal{O}\in Q\backslash\mathcal{N}(\mathfrak{q}^\perp)} H_{2n}(\mathcal{S}_{\mathcal{O}}).$$

b) Pour toute orbite $\mathcal{O} = Q\cdot\nu \in Q\backslash\mathcal{N}(\mathfrak{q}^\perp)$, on a

$$H_{2n}(\mathcal{S}_{\mathcal{O}}) \simeq H_{e_\nu}(\mathcal{B}^\nu)^{A_Q(\nu)}.$$

6.5. On peut compléter un peu le théorème précédent. Rappelons que nous avons défini une action de W dans les groupes d'homologie apparaissant dans le Théorème 6.4.

Proposition. *Les applications du Théorème 6.4 sont W-équivariantes. De plus, on a une application canonique*

$$A_Q(\nu) = Q^\nu/(Q^\nu)_0 \to A_G(\nu) = G^\nu/(G^\nu)_0$$

donnée par l'inclusion $Q \hookrightarrow G$. Soit $\overline{A_Q(\nu)}$ son image. Alors

$$H_{2n}(\mathcal{S}_{\mathcal{O}}) \simeq H_{2e}(\mathcal{B}^\nu)^{A_Q(\nu)} \simeq H_{2e}(\mathcal{B}^\nu)^{\overline{A_Q(\nu)}}.$$

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de remarquer que l'action d'un élément $w \in W$ peut être réalisée par le même opérateur $a_\lambda(w)$ dans les deux membres de l'équation. La seconde assertion provient du fait que $H_{2e}(\mathcal{B}^\nu)$ est engendré par les cycles fondamentaux des composantes irréductibles de la variété $\mathcal{B}^\nu$, et que ces cycles sont stables sous l'action de $(G^\nu)_0$. L'action de A_ν sur $H_{2e}(\mathcal{B}^\nu)$ se factorise donc par $\overline{A_Q(\nu)}$. □

7. Un exemple fondamental : $G = G_0 \times G_0$, $Q = \mathrm{Diag}\, G_0$

7.1. On se place maintenant dans le cas particulier suivant. Soit $\mathfrak{g}_0$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et G_0 son groupe adjoint. Posons $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$, de sorte que $G_0 \times G_0$ est le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$. Supposons fixés une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_0$ et une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ (avec $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{b}_0$). Grâce à ce choix d'un point de base, la variété des drapeaux $\mathcal{B}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ s'identifie à G_0/B_0, et la variété des drapeaux $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{g}$ s'identifie à

$$G_0 \times G_0/B_0 \times B_0 \simeq \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0,$$

le point de base étant $\mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_0)$. On suppose aussi fixé une involution de Cartan τ de $\mathfrak{g}_0$, et l'on note U_0 le sous-groupe compact maximal correspondant de G_0. On notera encore τ l'involution de Cartan $\tau \times \tau$ de $\mathfrak{g}$. Le sous-groupe compact maximal correspondant de G est $U = U_0 \times U_0$. Notons $\mathcal{N}_0$ le cône nilpotent de $\mathfrak{g}_0^*$. Le cône nilpotent $\mathcal{N}$ de $\mathfrak{g}^*$ s'identifie alors à $\mathcal{N}_0 \times \mathcal{N}_0$.

7.2. On applique maintenant les résultats précédents au groupe $Q = \operatorname{Diag} G_0$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{q} = \operatorname{Diag} \mathfrak{g}_0$. Nous sommes dans le cas d'une algèbre symétrique d'involution σ donnée par $\sigma(x, y) = (y, x)$, $(x, y) \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$. Le groupe de Weyl W qui agit est celui de $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{h}_0$ dans $\mathfrak{g}$. Il est isomorphe à $W_0 \times W_0$ où $W_0 = W(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{g}_0)$.

LEMME. *(Bruhat) Les $Q = \operatorname{Diag} G_0$ orbites dans $\mathcal{B}$ sont paramétrées par W_0. Un système de représentants est donné par*

$$\{(\mathfrak{b}_0, w \cdot \mathfrak{b}_0)\}_{w \in W_0}$$

On notera $Q(w)$ l'orbite de $(\mathfrak{b}_0, w \cdot \mathfrak{b}_0)$ dans $\mathcal{B}$.

7.3. Avec les notations précédentes, on a

$$\mathfrak{q}^\perp = (\operatorname{Diag} \mathfrak{g}_0)^\perp = \{(\lambda, -\lambda) \mid \lambda \in \mathfrak{g}_0^*\}.$$

Donc $\mathcal{N}(\mathfrak{q}^\perp) = \{(\nu, -\nu) \mid \nu \in \mathcal{N}_0\} \simeq \mathcal{N}_0$. Dans cette identification, les Q-orbites dans $\mathcal{N}(\mathfrak{q}^\perp)$ correspondent naturellement aux G_0-orbites dans $\mathcal{N}_0$. Posons $n_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_0$ et $n = 2n_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}$. La variété conormale à la Q-action sur $\mathcal{B}$ est

$$\mathcal{S} = \{(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \nu, -\nu)) \mid \nu \in \mathfrak{b}^\perp \cap (\mathfrak{b}')^\perp\}.$$

On identifiera cette variété conormale $\mathcal{S}$ de manière canonique à la variété des triplets de Steinberg :

$$\mathcal{Z} = \{(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \nu)) \mid \nu \in \mathfrak{b}^\perp \cap (\mathfrak{b}')^\perp\}.$$

On notera $\iota^- : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, $\nu \mapsto (\nu, -\nu)$. Notons $\mathcal{S}_w$ le fibré conormal à l'orbite Q_w. Comme G_0 est complexe, son adhérence est une composante irréductible de $\mathcal{S}$. Notons $\mathcal{Z}_w$ la partie de $\mathcal{Z}$ correspondante, par l'isomorphisme entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Z}$. De manière explicite

$$\mathcal{Z}_w = \{(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \nu)) \mid (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}') \in Q_w,\ \nu \in \mathfrak{b}^\perp \cap (\mathfrak{b}')^\perp\}.$$

7.4. Les théorèmes 6.4 et 6.5 nous donnent un isomorphisme de W-modules :

$$H_{2n}(\mathcal{Z}) \simeq \bigoplus_\nu H_{4e}(\mathcal{B}^\nu)^{A_Q(\nu)} = \bigoplus_\nu [H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu) \otimes H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)]^{A_Q(\nu)}, \tag{7.4.1}$$

où ν décrit un système de représentants des orbites G_0-orbites dans $\mathcal{N}_0$ (identifiées aux orbites de Q dans $\mathcal{N}(\mathfrak{q}^\perp)$), et $e = \dim_{\mathbb{R}} G_0 \cdot \nu$. Comme $\mathcal{B}^\nu = \mathcal{B}_0^\nu \times \mathcal{B}_0^\nu$ on a bien

$$H_{4e}(\mathcal{B}^\nu) = H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu) \otimes H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu),$$

et l'action de $A_Q(\nu) = Q^\nu/(Q^\nu)_0 \simeq G_0^\nu/(G_0)_0^\nu$ sur le membre de droite de cette équation est l'action diagonale.

7.5. En tant qu'espace vectoriel, $H_{2n}(\mathcal{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[W_0]$ puisque W_0 paramètre les Q-orbites dans $\mathcal{B}$, et que les $\{[\mathcal{Z}_w]\}_{w\in W_0}$ forment une base de $H_{2n}(\mathcal{Z})$. D'autre part $W = W_0 \times W_0$ agit sur $\mathbb{Q}[W_0]$ par la représentation birégulière. Le résultat suivant est dû à Springer

THÉORÈME. *On a un isomorphisme de W-modules $H_{2n}(\mathcal{Z}) \simeq \mathbb{Q}[W_0]$ donné par $[\mathcal{Z}_w] \mapsto w$.*

Démonstration. La fibre de l'application $\mathcal{Z}_w \to Q_w$ au-dessus d'un élément $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}') \in Q_w$ est $\mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{b}'^\perp$. La fibre au-dessus de l'élément distingué $(\mathfrak{b}_0, w\cdot\mathfrak{b}_0)$ de Q_w est donc $\mathfrak{b}_0^\perp \cap w\cdot\mathfrak{b}_0^\perp$. D'autre part $Q_w = G_0\cdot(\mathfrak{b}_0, w\cdot\mathfrak{b}_0) \simeq G_0/(B_0\cap w\cdot B_0)$. On a donc

$$\mathcal{Z}_w \simeq G_0 \times_{(B_0\cap w\cdot B_0)} (\mathfrak{b}_0^\perp \cap w\cdot\mathfrak{b}_0^\perp)$$

en tant que fibré au-dessus de Q_w.

Soit V_w un système de représentants dans G_0 de $G_0/(B_0\cap w\cdot B_0)$. Pour tout élément $v \in G_0$, notons $\tilde v = (v, v) \in Q$. La décomposition du cycle $\mathcal{Z}_w$ selon les fibres de $\mathcal{Z}_w \to Q_w$ s'écrit donc

$$\mathcal{Z}_w = \coprod_{v\in V_w} \tilde v\cdot((\mathfrak{b}_0, w\cdot\mathfrak{b}_0), \mathfrak{b}_0^\perp\cap w\cdot\mathfrak{b}_0^\perp)).$$

Soit $\tilde\omega = (1,\omega)$ un représentant dans U de $(1, w) \in W_0\times W_0 = W$. Pour tout $g \in G$, notons $u(g)$ un élément de U (défini modulo T) donné par l'isomorphisme $\mathcal{B} = G/B = U/T$. On a donc pour tout $g\in G$, $g\cdot\mathfrak{b}_1 = u(g)\cdot\mathfrak{b}_1$. Rappelons que pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathfrak{h}_0^*\times\mathfrak{h}_0^* = \mathfrak{h}^*$, on a l'homéomorphisme $p_\lambda : \mathcal{B}^* \to \Omega_\lambda$ et l'on calcule

$$p_\lambda[\mathcal{S}_w] = \coprod_{v\in V_w} [u(\tilde v\tilde\omega)\cdot\lambda \dot{+} \iota^-(v\cdot(\mathfrak{b}_0^\perp\cap w\cdot\mathfrak{b}_0^\perp))]$$

où le $\dot{+}$ désigne l'addition point par point.

Pour l'orbite fermée Q_1, on obtient

$$p_{w\cdot\lambda}[\mathcal{S}_1] = \coprod_{v\in V_1} [u(\tilde v)\cdot(\tilde w\cdot\lambda) \dot{+} \iota^-(v\cdot\mathfrak{b}_0^\perp)].$$

Comme $G_0 = U_0B_0$, on peut prendre $V_1 \subset U_0$, donc $u(\tilde v) = \tilde v$ pour tout $v\in V_1$, et

$$p_{w\cdot\lambda}[\mathcal{S}_1] = \coprod_{v\in V_1} [\tilde v\cdot(\tilde w\cdot\lambda \dot{+} \iota^-(\mathfrak{b}_0^\perp))].$$

En outre, l'application $b \mapsto \tilde b\cdot(\tilde w\cdot\lambda)$ est bijective de B_0/H_0 sur $\tilde w\cdot\lambda \dot{+} \iota^-(\mathfrak{b}_0^\perp))$ (voir Lemme 1.8) , d'où

$$\begin{aligned} p_{w\cdot\lambda}[\mathcal{S}_1] &= \coprod_{v\in V_1} [\tilde v\cdot(\mathrm{Diag} B_0\cdot(\tilde w\cdot\lambda))] \\ &= [Q\cdot(\tilde w\cdot\lambda)] \\ &= \coprod_{v\in V_w} [\tilde v\cdot(\mathrm{Diag}(B_0\cap w\cdot B_0))\cdot(w\cdot\lambda)] \\ &= \coprod_{v\in V_w} [\tilde v\cdot(\tilde w\cdot\lambda \dot{+} \iota^-(\mathfrak{b}_0^\perp\cap w\cdot\mathfrak{b}_0^\perp))]. \end{aligned}$$

Notons la ressemblance entre les expressions obtenues pour $p_{w\cdot\lambda}[\mathcal{S}_1]$ et $p_\lambda[\mathcal{S}_w]$. Ces cycles ne sont pourtant pas les mêmes. Sur $\mathcal{B}^*$, le premier correspond (par p_λ) au cycle $[\mathcal{S}_w]$ et le deuxième à $[a_\lambda(w)\cdot\mathcal{S}_1]$. Le premier est un cycle de $\mathcal{S}$, mais pas le second. En revanche, on peut rétracter $[a_\lambda(w)\cdot\mathcal{S}_1]$ en un cycle de $\mathcal{S}$, comme dans la démonstration de la Proposition 4.3. Le cycle $[a_\lambda(w)\cdot\mathcal{S}_1]$ se projette sur Q_w, puisque

$$\pi(a_\lambda(w)\cdot\mathcal{S}_1)=\pi\circ p_\lambda^{-1}(Q\cdot w\cdot\lambda)=Q\cdot(\mathfrak{b}_0,w\cdot\mathfrak{b}_0)=Q_w$$

grâce à la G-équivariance de $\pi\circ p_\lambda^{-1}$ (1.10). Cette rétraction peut donc s'effectuer au-dessus de $\overline{Q}_w$. Il en découle que le résultat de cette rétraction est de la forme

$$\pm[\mathcal{S}_w]+\dots,$$

où les points de suspension indiquent un cycle sur la frontière de Q_w, c'est-à-dire une combinaison linéaire de $[\mathcal{S}'_w]$, avec $w'\leq w$ pour l'ordre de Bruhat. Les classes $[a_\lambda(w)\cdot\mathcal{S}_1]$, $w\in W_0$ forment une autre base de '$H_{2n}(\mathcal{B}^*)\simeq H_{2n}(\mathcal{S})$, de sorte que l'action par monodromie de $W_0\subset W$ soit équivalente à la représentation régulière $\mathbb{Q}[W_0]$, où $\mathcal{Z}_1$ correspond au générateur canonique $1\in\mathbb{Q}[W_0]$. On obtient de manière similaire l'assertion concernant l'autre facteur W_0 de W, ce qui finit la démonstration du théorème. □

7.6. Soit $\nu\in\mathcal{N}_0$ et $A_{G_0}(\nu)$ le groupe des composantes connexes du groupe d'isotropie de ν dans G_0. Nous avons défini dans la Section 3 une action de W_0 dans $H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)$ et nous avons vu (Corollaire 3.1) que cette action commute avec celle de $A_{G_0}(\nu)$.

Corollaire. *(Springer) La représentation de W_0 sur la composante isotypique $H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)_\phi$ de $H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)$ associée a un caractère irréductible ϕ de $A_{G_0}(\nu)$ est une représentation irréductible de W_0. Notons $\chi(\nu,\phi)$ son caractère. Alors tout caractère irréductible de W_0 est de la forme $\chi(\nu,\phi)$ pour un certain $\nu\in\mathcal{N}_0$ et un certain ϕ de $\widehat{A_{G_0}(\nu)}$. La paire (ν,ϕ) est unique à conjugaison près.*

Démonstration. Nous avons vu que nous avons un isomorphisme $H_{2n}(\mathcal{Z})\simeq\mathbb{Q}[W_0]$ de $W=W_0\times W_0$-modules. On a

$$H_{2n}(\mathcal{Z})\simeq\bigoplus_\nu[H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)\otimes H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)]^{A_{G_0}(\nu)}=\bigoplus_\nu\operatorname{Hom}_{A_{G_0}(\nu)}(H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu),H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)).$$

Or

$$H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)=\sum_{\chi\in\widehat{A_{G_0}(\nu)}}\chi\otimes(H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu))_\chi.$$

Donc

$$\begin{aligned}H_{2n}(\mathcal{Z})&=\bigoplus_\nu\operatorname{Hom}_{A_{G_0}(\nu)}\left(\sum_{\chi\in\widehat{A_{G_0}(\nu)}}\chi\otimes(H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu))_\chi,\ \sum_{\chi\in\widehat{A_{G_0}(\nu)}}\chi\otimes(H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu))_\chi\right)\\&=\bigoplus_{\nu,\chi,\phi}\operatorname{Hom}_{A_{G_0}(\nu)}(\chi,\phi)\otimes\operatorname{Hom}(H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)_\chi,H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)_\phi)\\&=\bigoplus_{\nu,\chi}\operatorname{End}(H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)_\chi)\end{aligned}$$

Décomposons le W_0-module $H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)_\chi$ en modules simples. Soit $(E_\alpha)_\alpha$ un système de représentants de W_0-modules simples. Écrivons

$$H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)_\chi=\sum n_{\nu,\chi}^\alpha E_\alpha.$$

Alors

$$\bigoplus_{\nu,\chi} \mathrm{End}(H_{2e}(\mathcal{B}_0^\nu)_\chi) = \bigoplus_{\nu,\chi} \bigoplus_{\alpha,\beta} n_{\nu,\chi}^\alpha n_{\nu,\chi}^\beta \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta).$$

Comparons avec la décomposition familière

$$\mathbb{Q}[W_0 \times W_0] \simeq \sum_{\alpha \in \hat{W}_0} \mathrm{End}(E_\alpha),$$

on obtient

$$\sum_{\nu,\chi} n_{\nu,\chi}^\alpha n_{\nu,\chi}^\beta = \delta_{\alpha,\beta},$$

d'où $n_{\nu,\chi}^\alpha = 1$ pour un unique $\alpha \in \widehat{W_0}$. □

CHAPITRE 2

Théorie de Spaltenstein-Steinberg

1. Cellules géométriques

1.1. Dans cette section, on s'intéresse au cas $Q = K$, où K est la composante neutre du groupe des points fixes d'une involution (algébrique) σ de G. On a donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \overset{\sigma}{\oplus} \mathfrak{p}, \qquad \mathcal{S} = \{(\mathcal{B}, \nu) \in \mathcal{B} \times \mathfrak{g}^* | \, \nu \in \mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{k}^\perp\}.$$

Lorsqu'on identifie $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}^\perp$ est identifié à $\mathfrak{p}$, et $\mathcal{N}(\mathfrak{k}^\perp)$ à l'ensemble des K-orbites nilpotentes dans $\mathfrak{p}$.

Soit $\mathrm{Irr}(\mathcal{S})$ l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{S}$. Comme K est un sous-groupe complexe de G, les composantes irréductibles de $\mathcal{S}$ sont exactement les adhérences des fibrés conormaux aux orbites $\mathcal{S}_Q$, $Q \in K\backslash\mathcal{B}$.

Considérons d'autres part les parties $\mathcal{S}_{\nu,C}$ formées comme suit. Soit $\nu \in \mathcal{N}(\mathfrak{k}^\perp$ et C une composante irréductible de la variété de Springer $\mathcal{B}^\nu$. Posons

$$\mathcal{S}_{\nu,C} = K \cdot (C, \nu), \qquad \overline{\mathcal{S}}_{\nu,C} = \overline{K \cdot (C, \nu)}.$$

Ce sont clairement des sous-variétés irréductibles de $\mathcal{S}$. Calculons leur dimension. Rappelons que la dimension de la variété de Springer $\mathcal{B}^\nu$ est

$$d_\nu := \dim \mathcal{B}^\nu = \frac{1}{2}(\dim G^\nu - \mathrm{rk} G),$$

et que celle-ci est de dimension pure. Il s'en suit que

$$\dim \mathcal{S}_{\nu,C} = \dim K \cdot \nu + d_\nu = \dim K - \dim K^\nu + d_\nu.$$

Un résultat bien connu de Kostant et Rallis ([**KostantRallis**]) affirme que

$$\frac{1}{2} \dim G^\nu - \dim K^\nu = \frac{1}{2} \dim G - \dim K.$$

On en déduit que

$$\dim \mathcal{S}_{\nu,C} = \frac{1}{2}(\dim G - \mathrm{rk} G) = \dim \mathcal{S}$$

Ceci prouve que les $\overline{\mathcal{S}}_{\nu,C}$ sont des composantes irréductibles de $\mathcal{S}$. Il est d'autre part clair que toute composante irréductible est de cette forme. Il reste à analyser les cas d'égalité. Posons comme précédemment $A_K(\nu) = K^\nu/(K^\nu)_0$. Deux composantes $\mathcal{S}_{\nu,C}$ et $\mathcal{S}_{\nu',C'}$ sont égales si et seulement si $\nu \in k \cdot \nu'$ pour un certain $k \in K$ et C et $k \cdot C'$ sont dans la même $A_K(\nu)$-orbite dans l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{B}^\nu$. Résumons ceci.

Proposition. *L'ensemble* $\mathrm{Irr}(\mathcal{S})$ *est paramétré par les* $K\backslash\mathcal{B}$ *et par les couples* $(\mathcal{O}, \tilde{C})$ *constitué d'une* K*-orbite* $\mathcal{O} = K \cdot \nu$ *dans* $\mathcal{N}(\mathfrak{k}^\perp)$ *et d'une* $A_K(\nu)$*-orbite* $\tilde{C}$ *dans l'ensemble des composantes irréductibles de* $\mathcal{B}^\nu$

1.2.

DÉFINITION. Soit $Q \in K\backslash\mathcal{B}$. Si $\overline{\mathcal{S}}_Q = \overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{O},\tilde{C}}$ pour un certain couple $(\mathcal{O},\tilde{C})$ comme ci-dessus, on définit

$$\rho_{orb}(Q) = \mathcal{O}, \qquad \rho_{orb} : Q \in K\backslash\mathcal{B} \to K\backslash\mathcal{N}(\mathfrak{k}^\perp).$$

Comme $\rho : \mathcal{S} \to \mathcal{N}(\mathfrak{k}^\perp)$ est propre et que $\mathcal{S}_Q$ est irréductible, on voit que $\rho(\mathcal{S}_Q)$ est une sous-variété irréductible K-équivariante dans $\mathcal{N}(\mathfrak{k}^\perp)$. Comme le nombre d'orbites dans $\mathcal{N}(\mathfrak{k}^\perp)$ est fini, $\rho(\mathcal{S}_Q)$ est nécessairement l'adhérence d'une K-orbite $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{N}(\mathfrak{k}^\perp)$. Cette orbite est $\rho_{orb}(Q)$.

1.3. Les cycles $[\mathcal{S}_Q]$, $Q \in K\backslash\mathcal{B}$, forment une base de $H_{2n}(\mathcal{S})$. Par analogie avec l'action du groupe de Weyl par continuation cohérente, on définit une cellule géométrique comme étant un sous-quotient de $H_{2n}(\mathcal{S})$ engendré par des $[\mathcal{S}_Q]$ et minimal pour cette propriété. Par glissement de terminologie, on appellera aussi cellule géométrique un sous-ensemble $\mathcal{C}^{geo}$ de $K\backslash\mathcal{B}$ tel que les $[\mathcal{S}_Q]$, $Q \in \mathcal{C}^{geo}$ engendrent une cellule géométrique, au sens premier du terme. Le résultat suivant est dû à Tanisaki ([**Tanisaki88**])

PROPOSITION. *Les cellules géométriques sont les* $\rho_{orb}^{-1}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \in K\backslash\mathcal{N}(\mathfrak{k}^\perp)$.

Démonstration....

2. Variétés orbitales

2.1. Il sera commode de se replacer dans le cadre de la section 7, c'est-à-dire que $G = G_0 \times G_0$, $Q = K = \mathrm{Diag}(G_0) \simeq G_0$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0$, etc. Dans la suite, nous identifierons G_0 et $\mathrm{Diag}(G_0)$. Rappelons que dans ce cadre, la variété conormale à l'action de G_0, $\mathcal{S}$, est canoniquement isomorphe à la variété des triplets de Steinberg $\mathcal{Z} := \{(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \nu) \in \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0 \times \mathfrak{g}_0^* | \, \nu \in \mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{b}'^\perp\}$.

DÉFINITION. Pour chaque orbite $\mathcal{O}$ de G_0 dans $\mathcal{N}_0$, l'intersection $\mathcal{O} \cap \mathfrak{b}_0^\perp$ est un sous-ensemble localement fermé de $\mathfrak{b}_0^\perp$, et peut donc s'écrire comme l'union de ses composantes irréductibles. Celles-ci sont appelées les variétés orbitales attachées à l'orbite $\mathcal{O}$. On notera $\mathcal{V}$ l'ensemble des variétés orbitales.

2.2. Énonçons le

THÉORÈME. *Pour tout $w \in W_0$, il existe une unique variété orbitale $V(w)$ dont l'adhérence coïncide avec $\overline{B \cdot (\mathfrak{b}_0^\perp \cap w \cdot \mathfrak{b}_0^\perp)}$. D'autre part, l'application $w \mapsto V(w)$ de W_0 dans l'ensemble des variétés orbitales $\mathcal{V}$ est surjective. Enfin, il existe une unique orbite nilpotente $\mathcal{O}(w)$ dont l'adhérence coïncide avec $\overline{G \cdot (\mathfrak{b}_0^\perp \cap w \cdot \mathfrak{b}_0^\perp)}$, et l'application $w \mapsto O(w)$ de W_0 dans l'ensemble des G_0-orbites dans $\mathcal{N}_0$ est surjective. On a donc*

$$W_0 \to \mathcal{V} \to G_0\backslash\mathcal{N}_0,$$

les variétés orbitales attachées à une orbite $\mathcal{O}$ étant les fibres de la seconde de ces applications, tandis que les fibres de la composition sont les cellules géométriques de W_0.

Les cellules géométriques ont été définies dans le cadre plus général de la Section 1. Ce sont des sous-ensemble de $G_0\backslash\mathcal{B}$, que l'on identifie ici à W_0.

Démonstration. Rappelons que nous disposons de l'application moment $\rho : \mathcal{Z} \to \mathcal{N}_0$. Soit $\mathcal{O}$ une G_0-orbite dans $\mathcal{N}_0$ et posons $\mathcal{Z}(\mathcal{O}) := \rho^{-1}(\mathcal{O})$. On a alors une décomposition

$$\mathcal{Z} = \coprod_{\mathcal{O}\in G_0\backslash\mathcal{N}_0} \mathcal{Z}(\mathcal{O}).$$

D'autre part, les G_0-orbites dans $\mathcal{B}$ sont paramétrées par W_0, l'orbite Q_w paramétrée par $w \in W_0$ étant $Q_w = G_0 \cdot (\mathfrak{b}_0, w \cdot \mathfrak{b}_0)$. Posons $\mathcal{Z}_w := \pi^{-1}(Q_w)$ (π est la projection $\mathcal{Z} \to \mathcal{B}$). Nous avons vu que les $\overline{\mathcal{Z}}_w$ sont exactement les composantes irréductibles de $\mathcal{Z}$. Pour tout $w \in W_0$ et toute orbite $\mathcal{O} \in G_0\backslash\mathcal{N}_0$, posons

$$\mathcal{Z}_w(\mathcal{O}) := \mathcal{Z}_w \cap \mathcal{Z}(\mathcal{O}), \qquad U_w := \mathfrak{b}_0^{\perp} \cap w \cdot \mathfrak{b}_0^{\perp}.$$

Les fibres de la projection $\mathcal{Z}_w(\mathcal{O}) \to Q_w$ sont toutes isomorphes à la fibre au-dessus de $(\mathfrak{b}_0, w \cdot \mathfrak{b}_0)$, c'est-à-dire $\mathcal{O} \cap U_w$, d'où :

$$\dim \mathcal{Z}_w(\mathcal{O}) = \dim Q_w + \dim(\mathcal{O} \cap U_w).$$

On a d'autre part une identification $Q_w \simeq G_0/(B_0 \cap w \cdot B_0)$, et

$$\dim(\mathcal{O} \cap U_w) \leq \dim U_w = \dim(\mathfrak{b}_0^{\perp} \cap w \cdot \mathfrak{b}_0^{\perp}) = \dim(B_0 \cap w \cdot B_0) - \dim \mathfrak{h}_0 = 2n_0,$$

d'où

$$\dim \mathcal{Z}_w(\mathcal{O}) \leq \dim G_0 - \mathrm{rk} G_0,$$

avec égalité si et seulement si $\mathcal{O} \cap U_w$ est dense dans U_w, où de manière équivalente $\overline{G \cdot U_w} = \overline{\mathcal{O}}$.

Avec les notations de la section précédente, on voit que l'ensemble des $w \in W_0$ tels que $\mathcal{O} \cap U_w$ est dense dans U_w est exactement l'ensemble $\rho_{orb}^{-1}(\mathcal{O})$ défini en 1.2 (on identifie ici W_0 et $G_0\backslash\mathcal{B}$). On peut paraphraser cela en disant que $\rho_{orb}(w) := \rho_{orb}(Q_w)$ est l'orbite nilpotente $\mathcal{O}$ telle que $\mathcal{O} \cap U_w$ est dense dans U_w. Dans ce cas $\mathcal{O} \cap U_w$ est irréductible.

Identifions $\mathcal{Z}_w(\mathcal{O})$ avec l'ensemble des translaté par G_0 de la fibre $\mathcal{O} \cap U_w$ au-dessus de $(\mathfrak{b}_0, w \cdot \mathfrak{b}_0)$. On suppose que $w \in \rho_{orb}^{-1}(\mathcal{O})$. Comme dans ce cas $\mathcal{O} \cap U_w$ est irréductible et qu'il en est évidemment de même pour G_0, on en déduit que $\mathcal{Z}_w(\mathcal{O})$ est irréductible. Son adhérence dans $\mathcal{Z}(\mathcal{O})$ (resp. $\mathcal{Z}$) est donc une composante irréductible de $\mathcal{Z}(\mathcal{O})$ (resp. $\mathcal{Z}$)).

Nous avions vu dans en 1.1 une autre paramétrisation des composantes irréductibles de $\mathcal{S}$, et donc de $\mathcal{Z}$. Soit $\nu \in \mathcal{N}_0$ et $\tilde{C}$ une orbite sous $A_{G_0}(\nu)$ dans l'ensemble des composantes irréductibles de la variété de Springer $\mathcal{B}^{\nu} = \mathcal{B}_0^{\nu} \times \mathcal{B}_0^{\nu}$. Une composante irréductible C de $\mathcal{B}^{\nu}$ est le produit de deux composantes irréductibles de $\mathcal{B}_0^{\nu}$. Rappelons que nous avions posé

$$\mathcal{Z}_{\nu,\tilde{C}} = G_0 \cdot (\tilde{C}, \nu).$$

La dimension de $\mathcal{Z}_{\nu,\tilde{C}}$ est égale à $\dim \mathcal{O} + \dim \tilde{C} = \dim \mathcal{O} + 2 \dim \mathcal{B}_0^{\nu}$, où $\mathcal{O} = G_0 \cdot \nu$ (ceci grâce à l'équidimensionalité de la variété de Springer). Il est clair que $\mathcal{Z}(\mathcal{O})$ est une union finie des $\mathcal{Z}_{\nu,\tilde{C}}$ et que les adhérences de celles-là sont les composantes irréductibles de celle-ci. Comme nous avons démontré précédemment que ces composantes ont pour dimension $\dim G_0 - \mathrm{rk} G_0$, on déduit de ceci que

$$2 \dim \mathcal{B}_0^{\nu} + \dim \mathcal{O} = \dim G_0 - \mathrm{rk} G_0. \tag{2.2.1}$$

Remarquons que ceci donne une formule pour $\dim \mathcal{B}_0^{\nu}$.

Résumons : pour toute orbite $\mathcal{O}$, nous avons obtenu deux descriptions des composantes irréductible de $\mathcal{Z}(\mathcal{O})$ d'une part comme ensemble des $\overline{\mathcal{Z}_w(\mathcal{O})}$, pour $w \in \rho_{orb}^{-1}(\mathcal{O})$, d'autre part comme ensemble des adhérences des $\mathcal{Z}_{\nu,\tilde{C}}$, où $\tilde{C}$ est une $A_{G_0}(\nu)$-orbite dans l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{B}^\nu$. Supposons que $\overline{\mathcal{Z}}_{\nu,\tilde{C}} = \overline{\mathcal{Z}_w(\mathcal{O})}$ pour un certain $\tilde{C}$ comme ci-dessus et un certain $w \in \rho_{orb}^{-1}(\mathcal{O})$. On a

$$\pi(Z_w(\mathcal{O})) \cap \mathcal{B}^\nu = \{(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}') \in Q_w, \nu \in \mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{b}'^\perp\}.$$

Projetons ceci sur le premier facteur de $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0$. On obtient l'ensemble $\mathcal{C}_w$ suivant :

$$\mathcal{C}_w = \{g \cdot \mathfrak{b}_0 \in \mathcal{B}_0 |\, \nu \in g \cdot (\mathfrak{b}_0^\perp \cap w \cdot \mathfrak{b}_0^\perp)\}.$$

On a aussi

$$\rho(\pi \mathcal{Z}_{\nu,\tilde{C}}) \cap \mathcal{B}^\nu = \tilde{C},$$

dont la projection sur le premier facteur de $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0$ est une orbite sous $A_{G_0}(\nu)$ dans l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{B}_0^\nu$. On en déduit que l'ensemble des orbites sous $A_{G_0}(\nu)$ dans l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{B}_0^\nu$ est en bijection avec l'ensemble des $\mathcal{C}_w$, $w \in \rho_{orb}^{-1}(\mathcal{O})$ (ceux-ci ne sont généralement pas distincts).

Soient $V_1, \ldots, V_n$ les composantes irréductibles de $\mathcal{O} \cap \mathfrak{b}_0^\perp$ (ce sont les variétés orbitales attachées à $\mathcal{O} = G_0 \cdot \nu$ et $C_1, \ldots, C_m$ les composantes irréductibles de $\mathcal{B}_0^\nu$. Considérons les applications :

$$\begin{aligned} \pi_1 : G_0 &\to \mathcal{O}, & \qquad \pi_2 :\ G_0 &\to \mathcal{B}_0 \\ g &\mapsto g^{-1} \cdot \nu & g &\mapsto g \cdot \mathfrak{b}_0 \end{aligned}$$

On a alors $\pi_2^{-1}(\mathcal{B}_0^\nu) = \{g \in G_0 |\, \nu \in g \cdot \mathfrak{b}_0\}$ et $\pi_1^{-1}(\mathcal{O} \cap \mathfrak{b}_0^\perp) = \{g \in G_0 |\, g^{-1} \cdot \nu \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{b}_0^\perp\}$. Comme $g^{-1} \cdot \nu$ est toujours dans $\mathcal{O}$, on voit que $\pi_2^{-1}(\mathcal{B}_0^\nu) = \pi_1^{-1}(\mathcal{O} \cap \mathfrak{b}_0^\perp)$. En identifiant $\mathcal{B}_0$ et G_0/B_0, $\pi_2^{-1}(C_i)$ s'identifie à $C_i B_0$, et est donc irréductible. Les $\pi_2^{-1}(C_i)$ sont donc les composantes irréductibles de $\pi_2^{-1}(\mathcal{B}_0^\nu)$. Il en découle que les parties $\pi_1(\pi_2^{-1}(C_i))$ sont des composantes irréductibles de $\mathcal{O} \cap \mathfrak{b}_0^\perp$, c'est-à-dire parmi les V_j, et que tout les V_j sont obtenus ainsi. En outre, $\pi_1(\pi_2^{-1}(C_i))$ est indépendant du choix de C_i dans une $A_{G_0}(\nu)$-orbite de composantes irréductibles de $\mathcal{B}_0^\nu$. Les V_j sont donc parmi les adhérences des $\pi_1(\pi_2^{-1}(\mathcal{C}_w)) = B_0 \cdot (\mathcal{O} \cap U_w)$. D'après la définition de π_1 et π_2, on a

$$\dim C_i + \dim \mathcal{B}_0 = \pi_1(\pi_2^{-1}(C_i)) + \dim G_0^\nu.$$

En utilisant (2.2.1), on obtient

$$\dim(\mathcal{O} \cap \mathfrak{b}_0^\perp) = \dim \mathcal{B}_0^\nu + \dim B_0 + \dim G_0^\nu = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition $\square$

2.3. En fait, nous avons obtenu un peu plus.

THÉORÈME. *Soit $\mathcal{O}$ une orbite dans $\mathcal{N}_0$. Les composantes irréductibles de $\mathcal{O} \cap \mathfrak{b}_0^\perp$ sont des sous-variétés Lagrangiennes de $\mathcal{O}$ et sont de la forme $V(w)$: $\overline{B_0 \cdot (\mathcal{O} \cap U_w)}$, $w \in \rho_{orb}^{-1}(\mathcal{O})$.*

Il est fait référence ici à la structure symplectique de l'orbite coadjointe $\mathcal{O}$. Nous n'entrerons pas dans les détails, mais comme $V(w)$ est de la bonne dimension ($\frac{1}{2}\dim\mathcal{O}$), il suffit de montrer qu'elle est isotrope, et ceci est dû au fait qu'elle est dans $\mathfrak{b}_0^{\perp}$.

Bibliographie

[BorelMoore60] , A. Borel et J.C. Moore *Homology theory for locally compact spaces*, Michigan Math. J. 7 (1960), p. 137-159.

[CG] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex analysis*, Birkhaüser.

[DeCLP] C. De Concini, G. Lusztig and C. Procesi *Homology of a nilpotent vector field on the flag manifold*, J. of A.M.S. 1, Nř1 (1988), p. 15-34.

[HottaKashiwara84] R. Hotta and M. Kashiwara, *The invariant holonomic system on a complex semi-simple Lie algebra*, Inv. Math. 75 (1984), p. 327-358.

[HottaSpringer77] , R. Hotta and T. Springer, *A specialization theorem for certain Weyl group representations and a application to the Green polynomials of unitary groups*, Inv. Math. 41 (1977), p. 113-127.

[KashiwaraShapira] , M. Kashiwara et P. Shapira, *Sheaves on Manifolds.*

[KazdhanLusztig80] D. Kazdhan and G. Lusztig, *A topological approach to Springer's representations*, Invent. Math. 38 (1980), p. 222-228.

[Kostant] B. Kostant, *Lie groups representations on polynomial rings*

[KostantRallis] B. Kostant et S. Rallis, *Orbits and representation associated with symmetric spaces*

[RichardsonSpringer] R.W. Richardon et T.A. Springer , *The Bruhat order on symmetric varieties* Preprint.

[Rossman79] W. Rossmann, *The structure of semi-simple symmetric spaces*, Can. J. Math. 31, , p. 157-180 (1979).

[Rossman90] W. Rossmann, *Nilpotent orbital integral in a real semisimple Lie algebra and representations of Weyl groups*, in Operator Algebras, Unitary Representations, Envelopping Algebras and Invariant Theory, Actes du colloque en l'honneur de J. Dixmier, Progress in Math. 92, Birkhauser, p. 263-287 (1990).

[Rossmann91] W. Rossmann, *Invariant eigendistributions on a complex Lie algebra and homology classes on the conormal variety I : an integral formula ; II : representations of Weyl groups*, J. Functional Analysis 96 (1991), p. 130-193.

[Rossmann95a] W. Rossmann, *Picard-Lefschetz theory for the coadjoint quotient of a semi-simple Lie algebra*, Inv. Math. 121 (1995), p. 531-578.

[Rossmann95b] W. Rossmann, *Picard-Lefschetz theory and characters of a semi-simple Lie group*, Inv. Math. 121 (1995), p. 579-611.

[Tanisaki88] T. Tanisaki, *Characteristic Varieties of Highest Weights Modules and Primitive Quotients*, Advanced Studies In Pure Mathematics 14 (1988).

[Vogan98] D. A. Vogan, *The Method of coadjoint orbits*, IAS-Park City lectures (1998).