Induction et cohomologie de Dirac des modules de Harish-Chandra

Paris, septembre 2004,

David Renard, Centre de mathématiques Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique

sur un travail en cours avec

Pavle Pandzić, Université de Zagreb, Croatie

http://daphne.math.polytechnique.fr/~renard/

I. Introduction.

G groupe de Lie réductif réel, connexe.

$\mathfrak{g}_0 := \mathrm{Lie}G, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

K : sous-groupe compact maximal de $\mathfrak{g}$, involution de Cartan θ.

$\mathcal{C}$: catégorie de représentations de G (ou de $\mathfrak{g}$).

Problème fondamental de la théorie des représentations : classifier et construire les irréductibles de $\mathcal{C}$, à équivalence près.

Stratégie :

A un irréductible dans $\mathcal{C}$, on attache un "invariant", ne dépendant que de la classe d'équivalence de celui-ci. Cet invariant est une représentation d'un sous-groupe réductif de G (ou bien d'une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$).

On peut alors parfois :

- classifier les irreductibles admettant un invariant donné,

- construire ces irréductibles de manière fonctorielle, en partant de l'invariant.

Exemple : catégorie des modules de Harish-Chandra $\mathcal{M}(g, K)$.

Classification des irréductibles : Langlands, Vogan-Zuckerman, Vogan...

Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$: sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, avec $\mathfrak{m}$ définie sur $\mathbb{R}$, $\theta-$stable

$V \in \mathcal{M}(g, K)$, $H^i(\mathfrak{n}, V)$ est dans $\mathcal{M}(\mathfrak{m}, (M \cap K)_0)$.

Si $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$ parabolique minimal dans $\mathfrak{g}_0$, $H^*(\mathfrak{n}, V) \rightsquigarrow$ classification de Langlands.

Si $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ parabolique θ-stable $H^*(\mathfrak{u}, V) \rightsquigarrow$ classification de Vogan-Zuckerman.

autre invariant : K-type minimal de $V \rightsquigarrow$ classification de Vogan

II. Exemple : représentations de dimension finie

$\mathfrak{g}$ algèbre de Lie semi-simple complexe,

$\mathfrak{h}$: sous-algèbre de Cartan,

$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}$: sous-algèbre de Borel,

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^-$.

Théorème : Soit (V, π) une représentation de dimension finie irréductible de $\mathfrak{g}$. Alors les opérateurs $\pi(h)$, $h \in \mathfrak{h}$ sont simultanément diagonalisables dans V. Un seul des sous-espaces propres simultanés possède la propriété d'être annulé par l'action de $\mathfrak{u}$ (le sous-espace de "plus haut poids"). Il est de dimension 1. On a $V = \mathbb{C}v \oplus \pi(\mathfrak{u}^-) \cdot V$, où v est un vecteur de plus haut poids non nul..

- La représentation (V, π) est caractérisée par son plus haut poids.

- Ce sous-espace de plus haut poids est une représentation de $\mathfrak{h}$.

On note λ (le "plus haut poids") l'élément de $\mathfrak{h}^*$ tel que $\pi(h).v = \lambda(h)v$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$, pour tout vecteur de plus haut poids v. On note V_λ la représentation irreductible de plus haut poids λ.

$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$: système de racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

$R^+ = R(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$: racines positives.

$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$.

$W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$: groupe de Weyl

Choix de $\mathfrak{u}$: on peut remplacer $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}$ par $\mathfrak{b}^w = \mathfrak{h} \oplus w \cdot \mathfrak{u}$, $w \in W$. Le plus haut poids devient alors $w \cdot \lambda$.

$W \cdot \lambda$: poids extremaux.

Sous-espace de plus haut poids :

$$\mathbb{C}v = V^{\mathfrak{u}} = H^0(\mathfrak{u}, V)$$

où $H^*(\mathfrak{u}, V)$ est la cohomologie du complexe de Koszul :

$$\cdots \mathbf{Hom}(\wedge^i \mathfrak{u}, V) \xrightarrow{d} \mathbf{Hom}(\wedge^{i+1} \mathfrak{u}, V) \to \cdots$$

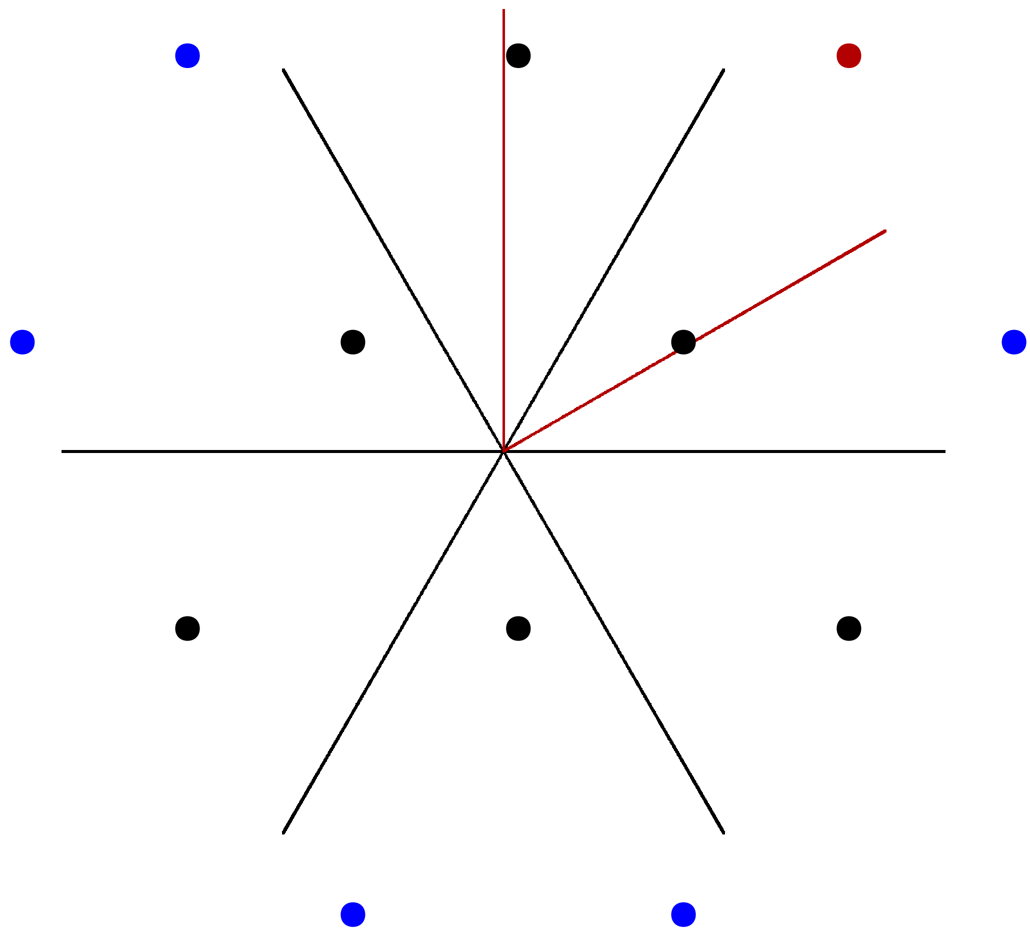
ou encore :

$$\mathbb{C}v \simeq V/\pi(\mathfrak{u}^-) \cdot V = H_0(\mathfrak{u}^-, V)$$

où $H_*(\mathfrak{u}^-, V)$ est l'homologie du complexe

$$\cdots \wedge^{i+1} \mathfrak{u}^- \otimes V \xrightarrow{\delta} \wedge^i \mathfrak{u}^- \otimes V \cdots$$

Théorème : (Kostant) En tant que representation de $\mathfrak{h}$, $H^k(\mathfrak{u}, V)$ est la somme de toutes les representations de dimension 1 de poids $w \cdot (\lambda + \rho) - \rho$ pour tous les $w \in W$ tels que $l(w) = k$. Elles sont obtenues à partir des sous-espaces poids extrémaux de V.



Le théorème de Borel-Weil-Bott

G : groupe compact connexe simplement connexe, complexification $G_{\mathbb{C}}$.

$\mathfrak{g} := \mathbf{Lie}G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

T : tore maximal, $\mathfrak{h} := \mathbf{Lie}T \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$ = représentations de dimension finie de G

$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}$, $B \subset G_{\mathbb{C}}$ sous-groupe de Borel.

On a $B \cap G = T$ et $G/T \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}/B$ ouverte, donc G/T variété complexe.

$\mathbb{C}_{\lambda}$: representation de T de poids λ

$$G \times_T \mathbb{C}_{\lambda} \to G/T$$

fibré en droite holomorphe.

$$\begin{aligned} T(G/T)_{\mathbb{C}} &= T(G/T)^{1,0} \oplus T(G/T)^{0,1} \\ &\simeq G \times_T \mathfrak{u}^{-} \oplus G \times_T \mathfrak{u} \end{aligned}$$

$\bar{\partial}$: opérateur de Dolbeault.

$$C^q(\mathbb{C}_\lambda) \ := \mathcal{E}(G \times_T ((\wedge^q \mathfrak{u})^* \otimes \mathbb{C}_\lambda))$$

$$\bar{\partial}_{\mathbb{C}_\lambda} \ : C^{q-1}(\mathbb{C}_\lambda) \to C^q(\mathbb{C}_\lambda)$$

$H^\bullet(\mathbb{C}_\lambda)$= cohomologie de $C^\bullet, \bar{\partial}_{\mathbb{C}_\lambda}(\mathbb{C}_\lambda)$

Théorème (Borel-Weil-Bott)

(a) Si $\lambda + \rho$ est singulier alors $H^j(\mathbb{C}_\lambda) = 0$ pour tout j.

(b) Si $\lambda + \rho$ est régulier, soit $w \in W$ tel que $w \cdot (\lambda + \rho)$ est dominant. Posons $\mu = w \cdot (\lambda + \rho) - \rho$. Alors

$$H^j(\mathbb{C}_\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq l(w) \\ V_\mu \text{ si } j = l(w) \end{cases}$$

L'opérateur de Dirac cubique et son noyau

κ : forme quadratique $\mathfrak{g}$-invariante non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ (forme de Killing).

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$$

$\kappa_{|\mathfrak{s}}$ non-dégénérée

$C(\mathfrak{s})$ algèbre de Clifford, S : module des spineurs.

$\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}^-$: sous-espace isotropes maximaux (en dualité).

En tant qu'espace vectoriel $S \simeq \wedge \mathfrak{u}^-$.

En tant que $\mathfrak{h}$-module $S \simeq \wedge \mathfrak{u}^- \otimes \mathbb{C}_\rho$.

$\{u_i\}$ base de $\mathfrak{u}$, $\{u_i^-\}$ base duale de $\mathfrak{u}^-$

Définition : Dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{s})$, considérons les éléments :

$$A = \sum_i u_i^- \otimes u_i, \quad A^- = \sum_i u_i \otimes u_i^-$$

$$1 \otimes a = -\frac{1}{4} \sum_{i,j} 1 \otimes [u_i^-, u_j^-] u_i u_j$$

$$1 \otimes a^- = -\frac{1}{4} \sum_{i,j} 1 \otimes [u_i, u_j] u_i^- u_j^-$$

$$C = A + 1 \otimes a, \quad C^- = A^- + 1 \otimes a^-$$

$$D = C + C^-, \quad E = -\frac{1}{2} \sum_i 1 \otimes u_i u_i^-$$

Remarques : Tous ces éléments sont invariants sous l'action de $\mathfrak{h}$.

D, l'opérateur de Dirac cubique de Kostant, ne dépend que de $\mathfrak{s} = \mathfrak{h}^\perp$ et non du choix de $\mathfrak{u}$.

C, C^-, E et D^2 engendrent une superalgèbre de Lie de dimension 4 ($\mathfrak{gl}(1,1)$).

V : représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$.

$V \otimes S$ est un $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{s})$-module.

$$V \otimes S \simeq V \otimes \wedge \mathfrak{u}^- \simeq \mathbf{Hom}(\wedge \mathfrak{u}, V)$$

$(\mathbf{Hom}(\wedge^\bullet \mathfrak{u}, V), d)$ complexe calculant $H^*(\mathfrak{u}, V)$

$(V \otimes \wedge^\bullet \mathfrak{u}^-, \partial)$ complexe calculant $H_*(\mathfrak{u}^-, V)$

Proposition : L'opérateur d est induit par l'action de $C^- = A^- + 1 \otimes a^-$ sur $V \otimes S$. L'opérateur $\delta = -2\partial$ est induit par l'action de $C = A + 1 \otimes a$. L'action de l'opérateur de Dirac cubique D est donc donnée par $d + \delta$. L'élément E agit sur $\wedge^k \mathfrak{u}^-$ par le scalaire $N - k$ ($N = \dim \mathfrak{u}$).

On peut munir $\boldsymbol{V \otimes S}$ d'un produit hermitien $\langle .,. \rangle$ de telle sorte que que les opérateurs $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{C^-}$ soient adjoints.

L'opérateur de Dirac est donc auto-adjoint pour $\langle .,. \rangle$. Il agit donc semi-simplement sur $\boldsymbol{V \otimes S}$.

Théorème :

$(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{V \otimes S = \ker D \oplus \mathrm{Im} C \oplus \mathrm{Im} C^-}$

$(\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{\ker C = \ker D \oplus \mathrm{Im} C}$

$(\boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{\ker C^- = \ker D \oplus \mathrm{Im} C^-}$

En particulier, en tant que $\mathfrak{h}$-modules :

$$\boldsymbol{\ker D \simeq H^\bullet(\mathfrak{u}, V) \otimes \mathbb{C}_\rho \simeq H_\bullet(\mathfrak{u}^-, V) \otimes \mathbb{C}_{-\rho}}$$

$S = S^e \oplus S^o$ ($\dim \mathfrak{s}$ est paire)

$$D \ : V \otimes S^e \leftrightarrow V \otimes S^o$$

Théorème : (Kostant et al.) En tant que représentation virtuelle de $\mathfrak{h}$, on a l'égalité :

$$V \otimes S^e - V \otimes S^o = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} \mathbb{C}_{w \cdot (\lambda + \rho)}$$

Corollaire: (Formule du caractère de Weyl)

$$\mathrm{ch}(V)\ \mathrm{ch}(S^e - S^o) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w \cdot (\lambda + \rho)}$$

Realisation géométrique

On fixe $\mathbb{C}_{\lambda}$ comme précédemment.

L'opérateur de Dirac cubique induit un opérateur différentiel (elliptique, homogène):

$$D \; : \mathcal{E}(G \times_T (\mathbb{C}_{\lambda} \otimes S^e)) \longrightarrow \mathcal{E}(G \times_T (\mathbb{C}_{\lambda} \otimes S^o))$$

Théorème : (Landweber.) L'indice G-equivariant de D est égal à

$$(-1)^{l(w)} V_{w \cdot \lambda - \rho}$$

s'il existe $w \in W$ tel que $w \cdot \lambda - \rho$ est dominant, et à 0 sinon.

Corollaire : (Landweber.) Le noyau de

$$D \; : \mathcal{E}(G \times_T (\mathbb{C}_{\lambda} \otimes S)) \longrightarrow \mathcal{E}(G \times_T (\mathbb{C}_{\lambda} \otimes S))$$

est égal à

$$V_{w \cdot \lambda - \rho}$$

s'il existe $w \in W$ tel que $w \cdot \lambda - \rho$ est dominant, et à 0 sinon.

II. Opérateurs de Dirac cubiques.

$\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ sous-algèbre réductive telle que $\kappa_{|\mathfrak{r}}$ non-dégénérée

$\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$ où $\mathfrak{s}$ supplémentaire orthogonal.

$C(\mathfrak{s})$: algèbre de Clifford, S :module des spineurs

Pour l'exposé : $\dim \mathfrak{s}$ paire.

$\{x_i\}$ base de $\mathfrak{s}$, $\{x_i^*\}$ base duale.

Dans la superalgèbre $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{s})$, on définit :

$$D = \sum_i x_i \otimes x_i^* - \frac{1}{2} \sum_{i<j<k} \kappa([x_i^*, x_j^*], x_k^*)\, x_i \wedge x_j \wedge x_k$$

$D \in (\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{s}))^{\mathfrak{r}}$

$$\boldsymbol{\alpha} \;:\; \mathfrak{r} \hookrightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{s}) \hookrightarrow C(\mathfrak{s})$$

$$\boldsymbol{\Delta} \;:\; x \in \mathfrak{r} \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes \alpha(x) \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{s})$$

se prolonge en un morphisme d'algèbres

$$\boldsymbol{\Delta} \;:\; \mathfrak{U}(\mathfrak{r}) \hookrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{s})$$

Proposition

$$D^2 = \Omega_{\mathfrak{g}} \otimes 1 + \Delta(\Omega_{\mathfrak{r}}) + c\,(1 \otimes 1)$$

où $\Omega_{\mathfrak{g}}$, $\Omega_{\mathfrak{r}}$: opérateurs de Casimir, c constante.

D^2 central dans la superalgèbre $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{s}))^{\mathfrak{r}}$

$d = \mathrm{ad} D$ dans $\mathcal{A}_{\mathfrak{s}} := (\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{s}))^{\mathfrak{r}}$.

$d^2 = 0$, donc $(\mathcal{A}_{\mathfrak{s}}, d)$ superalgèbre différentielle.

Théorème (Huang-Pandzic, Kostant, Alekseev-Meinrenken) :

$$\ker d = \mathrm{Im} d \oplus \Delta(\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}))$$

La cohomologie de $(\mathcal{A}_{\mathfrak{s}}, d)$ est isomorphe à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{r})$.

Définition

V représentation de $\mathfrak{g}$.

$D \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{s})$ agit sur $V \otimes S$.

$H^D(V) \ := \ker D/(\mathrm{Im} D \cap \ker D)$,

"Cohomologie de Dirac" de V : c'est un $\mathfrak{r}$-module.

Exemple historique : Parthasarathy et les séries discrètes.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \overset{\theta}{\oplus} \mathfrak{p}$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{p}$

$D = \sum_a e_a \otimes e_a^*$

X : module de Harish-Chandra unitaire $\rightsquigarrow X \otimes S_{\mathfrak{p}}$ muni d'un produit hermitien.

D anti-autodadjoint, laisse stable les composantes $\tilde{K}$-isotypiques (de dimension finie) : D est diagonalisable.

λ : caractère infinitésimal de X

D^2 autoadjoint négatif $\rightsquigarrow$ si δ_μ est un $\tilde{K}$-type de $X \otimes S_{\mathfrak{p}}$, alors

$$||\lambda|| \leq ||\mu + \rho_c||$$

assez bon critère d'unitarisabilité

$\ker D^2 = \ker D = H^D(X) =$ composantes $\tilde{K}$-isotypiques δ_μ telles que $||\lambda|| = ||\mu + \rho_c||$

En fait HP-K-AM donne $\lambda = \mu + \rho_c \mod W$.

Remarques :

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes 1$ central dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{s})$ en particulier commute avec D et agit sur $H^D(V)$.

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes 1 \subset \ker d$ donc si $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$,

$$z \otimes 1 = \Delta(\eta(z)) + Da - aD$$

$\eta(z) \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{r})$, $a \in \mathcal{A}_{\mathfrak{s}}$.

Si z agit par un scalaire sur V, $z \otimes 1$ agit par ce scalaire sur $H^D(V)$, et $\eta(z) \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{r})$ agit par ce même scalaire.

$\eta\ : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{Z}(\mathfrak{r})$ morphisme d'algèbres. Si $\mathfrak{r}$ est une sous-algèbre de Levi, $\eta =$ morphisme d'Harish-Chandra.

Pour les représentations de dimension finie, tous les résultats précédemment énoncés pour la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$ se genéralisent à une décomposition quelconque $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$.

Les démonstration sont faciles en utilisant le théorème précédent (HPKAM).

III. Représentations de dimension infinie

Séries discrètes :

G semi-simple, K sous-groupe compact maximal.

$\mathbf{rk}G = \mathbf{rk}K$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

D : opérateur de Dirac (dans ce cas, comme $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$, pas de terme cubique).

$C(\mathfrak{p})$, S comme ci-dessus...

E_μ representation irreductible de $\mathfrak{k}$ de plus haut poids μ telle que $E_\mu \otimes S$ est une représentation de K.

Théorème : (Parthasarathy, Atiyah-Schmid) Le noyau de

$$D\ : L^2(G \times_K (E_\mu \otimes S)) \longrightarrow L^2(G \times_K (E_\mu \otimes S))$$

est égal à la série discrète de G de paramètre de Harish-Chandra $\mu + \rho_c$ si $\mu + \rho_c$ est régulier, 0 sinon.

Tentative de généralisation de cette méthode avec R de même rang que G quelconque : Mehdi-Zierau.

Problème : le noyau de D est loin d'être irréductible.

Autre approche : (PR)

$$V \mapsto H^D(V)$$

foncteur de la catégorie des $(\mathfrak{g}, K)$-modules dans la catégorie des représentations de $\tilde{K}$.

On voudrait un adjoint : il n'y en a pas, il faut changer la définition de $H^D(V)$.

$\mathcal{I}$=idéal bilatère engendré par D dans $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}(\mathfrak{p}))^{\mathfrak{k}}$.

$\mathcal{J} = \mathcal{I} \oplus \mathbb{C}.1$

$H^D(X) :=$ invariants de $\mathcal{I}$ dans $X \otimes S_{\mathfrak{p}}$.

$H_D(X) :=$ coinvariants de $\mathcal{I}$ dans $X \otimes S_{\mathfrak{p}}$.

Adjoint à gauche de H^D : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}(\mathfrak{p})) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{k}_\Delta) \otimes \mathcal{J}} V$.

Ce foncteur envoie un irréductible sur un module de longueur finie, admettant un caractère infinitésimal.

Espoirs : - comprendre la structure de $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}(\mathfrak{p}))^{\mathfrak{k}}$ (contient $\mathcal{J}$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{k}_\Delta)$, $\mathcal{C}(\mathfrak{p})^K$... et quoi d'autre ?).

Analyser les représentations $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}(\mathfrak{p})) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{k}_\Delta) \otimes \mathcal{J}} V$: doivent avoir V dans leur H^D.

Obtient-on toutes celles-ci ainsi ? Unitarisabilité...

Remarques : beaucoup de représentations unipotentes admettent de la cohomologie de Dirac.

Cohomologie de Dirac et $\mathfrak{u}$-cohomologie :

$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ sous-algèbre parabolique θ-stable de $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^- = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$

V-module de Harish-Chandra.

Quelles sont les relations entre $H^D(V)$, $H^\bullet(\mathfrak{u}^-, V)$, $H_\bullet(\mathfrak{u}, V)$?

Dans certain cas (hermitien symétrique), les résultats de la dimension finie se généralisent (aux représentations unitaires).

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$.