Sur les paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires non quasi-déployés

Colette Moeglin
CNRS, Institut Mathématique de Jussieu
colette.moeglin@imj-prg.fr

David Renard
Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique
david.renard@polytechnique.edu

20 mars 2018

Résumé

Nous étendons aux groupes orthogonaux et unitaires non quasi-déployés sur un corps local des résultats de J. Arthur et de la première auteure établis dans le cas quasi-déployé. En particulier, nous obtenons une classification de Langlands complète pour les représentations tempérées dans le cas p-adique. Nous en déduisons en utilisant l'involution d'Aubert-Schneider-Stuhler un résultat de multiplicité un dans les paquets unipotents, et par des méthodes globales, le même résultat pour les paquets unipotents dans le cas archimédien.

Abstract

We extend to non quasi-split orthogonal and unitary groups over a local field some results of J. Arthur and the first author established in the quasi-split case. In particular, we obtain a full Langlands classification for tempered representations in the p-adic case. Using Aubert-Schneider-Stuhler involution, we deduce from this a multiplicity one result for unipotent packets, and by global methods, the same result for unipotent packets in the archimedean case.

1 Introduction

Soient G un groupe réductif défini sur un corps local F et G^* sa forme intérieure quasi-déployée. En suivant Arthur, on définit les A-morphismes de $W_F' \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ dans ${}^LG$ que l'on note génériquement ψ, ici W_F' est le groupe de Weil-Deligne de F. Dans le cas p-adique qui occupe une bonne place dans ces notes, W_F' est le produit de W_F par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tandis que si F est un corps archimédien, W_F' est le groupe de Weil de F.

Bien que la théorie d'Arthur soit générale, on se limite ici au cas des groupes orthogonaux et unitaires. Le cas des groupes unitaires est d'ailleurs déjà largement fait dans [8]. Précisons tout de suite que l'on ne regarde que les formes intérieures pures des groupes orthogonaux ou unitaires quasi-déployés. Comme c'est le cas aux places archimédiennes, si on regarde des formes intérieures plus générales, le groupe $A(\psi)$ qui intervient ci-dessous n'est pas celui qu'il faut prendre. Ce seul point ne serait pas très grave, mais il y a une autre difficulté expliquée par Arthur : c'est l'automorphisme venant du groupe orthogonal dans le cas des groupes spéciaux orthogonaux pairs qui pose des problèmes. Ainsi le groupe G vient avec le choix d'une forme bilinéaire non dégénérée soit orthogonale soit hermitienne suivant les cas.

On note $A(\psi)$ le groupe des composantes du centralisateur de ψ dans la composante neutre du L-groupe de G. Ce groupe est commutatif, c'est même un 2-groupe. Quand ψ est fixé, on définit s_ψ comme l'image par ψ de l'élément non trivial du centre de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

On appelle paquet d'Arthur pour G associé à ψ une combinaison linéaire à coefficients complexes de représentations de $G \times A(\psi)$, notée $\pi_G^A(\psi)$ qui vérifie les propriétés énoncées ci-dessous, pour lesquelles il faut quelques notations.

Pour tout s dans le centralisateur de ψ vérifiant $s^2 = 1$, on note $\pi^A_G(\psi)(s)$ l'évaluation de $\pi^A_G(\psi)$ en s, c'est-à-dire que l'on remplace les représentations de $A(\psi)$ par leur trace en l'image de s dans $A(\psi)$; il s'agit ici d'évaluer en s une combinaison linéaire de caractères de $A(\psi)$. La première des propriétés est que $\pi^A_{G^*}(\psi)(s_\psi)$ est une représentation virtuelle stable.

On note $\underline{H}_s$ la donnée endoscopique de G de la forme (s, H, ξ_H) telle que ψ soit inclus dans l'image de ξ_H ; il est facile de vérifier que cette donnée est uniquement déterminée et qu'elle est elliptique. Considérons $\pi^A_H(\psi)$ associée à ψ et à H et son évaluation en s_ψ, $\pi^A_H(\psi)(s_\psi)$: c'est une représentation virtuelle stable de H. On normalise les facteurs de transfert en fixant un modèle de Whittaker pour G^* et en supposant que G est une forme intérieure pure de G^* ou en utilisant les travaux de Kaletha. On demande que $e^K(G)\pi^A_G(\psi)(s_\psi s)$ soit le transfert de $\pi^A_H(\psi)(s_\psi)$, où $e^K(G)$ est le signe de Kottwitz de G. En particulier si $s = 1$, cette propriété dit que $\pi^A_G(\psi)(s_\psi)$ est le transfert de $\pi^A_{G^*}(\psi)(s_\psi)$ au signe de Kottwitz près.

Lorsque G est quasi-déployé, c'est-à-dire $G = G^*$, les définitions précédentes ne suffisent pas à déterminer $\pi^A_G(\psi)$. Pour les groupes classiques (*cf.* Arthur et Mok pour les groupes unitaires), il faut aussi utiliser l'endoscopie tordue pour compléter la définition. Il est alors démontré que $\pi^A_{G^*}(\psi)$ est une représentation unitaire de $G^* \times A(\psi)$ c'est-à-dire une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de représentations unitaires irréductibles de $G^* \times A(\psi)$.

Il n'est pas très difficile de vérifier pour les groupes classiques non quasi-déployés que $\pi^A_G(\psi)$ est effectivement aussi uniquement déterminée par les propriétés d'endoscopie décrites. Mais il n'est évidemment pas clair que $\pi^A_G(\psi)$ soit une représentation unitaire de $G \times A(\psi)$, comme dans le cas quasi-déployé. L'un des buts très modeste de cette note est de vérifier que ceci reste vrai pour les groupes classiques non nécessairement quasi-déployés. En fait plus précisément, on le fait si ψ est tempéré, c'est-à-dire trivial sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, cas connu sur les corps archimédiens mais pas entièrement pour les corps p-adiques. Dans ce cas, on complète totalement la classification, en particulier on montre que l'on a, comme attendu, une classification de Langlands et que la description des représentations cuspidales est analogue à celle du cas quasi-déployé faite par exemple en [13]. La méthode est une copie conforme de celle d'Arthur et s'appuie sur deux idées : par voie globale on montre que les coefficients sont nécessairement des entiers positifs et par voie locale avec l'aide du produit scalaire elliptique on montre que ces entiers sont de valeur absolue un. Ces résultats dans le cas tempéré sont l'objet de la section 3.1.

Ensuite dans la section 4, on passe au cas des morphismes unipotents. Dans le cas p-adique ce sont les morphismes triviaux sur le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ et dans le cas archimédien ce sont ceux dont l'image du sous-groupe $\mathbb{C}^*$ de W_F est centrale. On traite d'abord le cas p-adique en utilisant l'involution d'Aubert-Schneider-Stuhler. Ce cas se ramène au cas tempéré car Hiraga a montré que cette involution commute à des signes explicites près à l'endoscopie. Le seul problème est donc de prendre en compte ces signes, ce qui est fait en 4.1. Puis par voie globale, on traite ensuite le cas archimédien en 4.2 ; on s'appuie sur [12] qui ne traite pas le cas des groupes unitaires, on supposera donc que le groupe est orthogonal, le cas unitaire peut se faire facilement directement comme on le vérifiera dans un article ultérieur. On obtient en particulier un résultat de multiplicité 1 dans le cas unipotent archimédien (théorème 4.2) dont on espère qu'il se généralise aux paramètres quelconques (voir [16] pour l'énoncé de nos résultats sur les paquets d'Arthur généraux des groupes classiques dans le cas archimédien et en particulier cette question de la multiplicité un).

On ne va pas plus loin, c'est-à-dire que dans cet article, on ne traite pas le cas des morphismes généraux. Cela se fait facilement par voie locale en utilisant les descriptions locales qui sont faites pour les places p-adiques et que l'on fera dans un article en cours pour les archimédiennes. Mais le résultat final est bien que $\pi^A_G(\psi)$ est une représentation unitaire de $G \times A(\psi)$.

Les méthodes de cet article sont très fortement inspirées (voire copiées) de celles que J. Arthur a introduites pour stabiliser la formule des traces. Cette stabilisation introduit des objets locaux et globaux, les objets locaux sont des combinaisons linéaires finies de traces de représentations et on transfère ces objets locaux. Il est donc indispensable de savoir que le transfert local d'une combinaison linéaire stable finie de caractères est une combinaison linéaire finie de caractères. C'est le transfert local spectral. Il a été démontré par Arthur dans le cas des groupes p-adiques en

[2]. La référence dans le cas des places archimédiennes est plus difficile à trouver car cela ne résulte pas du transfert tempéré démontré par Shelstad. Or [18] nécessite ce résultat dans le cadre plus général du transfert endoscopique tordu : le transfert local spectral pour les groupes p-adiques y est redémontré (suivant [2]) en [18] XI.2.11 (cas des représentations elliptiques) et XI.3.1 (où le cas général est ramené au cas des représentations elliptiques), et dans le cas archimédien la démonstration est en IV.3.3. Le transfert local spectral est donc établi en toute généralité.

Remerciements. Les auteurs remercient le référé pour sa relecture attentive du texte. C. Moeglin a bénéficié d'excellentes conditions de travail au CIRM dans le cadre de la Chaire Morlet ; elle remercie le CIRM, D. Prasad et V. Heiermann pour cela. D. Renard bénéficie de l'ANR FERPLAY -13-BS01-0012 et remercie le CNRS et les membres de cette ANR pour cette aide.

2 A-paquets ou plutôt A-représentations

2.1 Au sujet de la définition des A-paquets

On reprend sans les répéter les notations et définitions de l'introduction, en particulier, on se limite au cas des groupes orthogonaux et unitaires qui sont des formes intérieures pures de leur forme quasi-déployée. On apporte une précision nécessaire sur le fait que $\pi_G^A(\psi)$ est bien défini. On fixe s dans le centralisateur de ψ. On peut supposer que $s^2=1$, ce que l'on fait. On a une description évidente du commutant dans la composante neutre du groupe dual en utilisant les valeurs propres de s. Et la donnée endoscopique associée est alors elliptique mais des éléments distincts s, s' peuvent avoir même image dans $A(\psi)$. Cela ne se produit que si ψ composé avec la représentation standard du L-groupe a de la multiplicité. On reprend sans insister la notion de bonne parité (cf. par exemple [13]). Le seul réel problème est quand des sous-représentations de ψ de bonne parité interviennent avec multiplicité. Les éléments du commutant de ψ de carré 1 séparent ces composantes en deux sous-ensembles. Soient s, s' comme ci-dessus de même image dans $A(\psi)$ alors, il est facile de voir que même si les données endoscopiques ne sont pas les mêmes, elles diffèrent par le fait qu'un nombre pair de copies d'une même représentation est séparé différemment par s et s'. Le transfert de la représentation virtuelle stable correspondante est bien le même puisque le transfert commute à l'induction parabolique.

Cela permet donc de définir de façon unique $\pi_G^A(\psi)(s)$ en tout élément s de $A(\psi)$ et ainsi $\pi_G^A(\psi)$ est une combinaison linéaire de représentations de G à coefficients dans les fonctions sur $A(\psi)$. Comme $A(\psi)$ est un 2-groupe, ceci est équivalent à dire que $\pi_G^A(\psi)$ est une combinaison linéaire à coefficients complexes de représentations de $G \times A(\psi)$.

Soit ϵ un caractère de $A(\psi)$, on définit $\pi(\psi)_\epsilon$ par la formule d'inversion

$$\pi(\psi)_\epsilon := |A(\psi)|^{-1} \sum_{s\in A(\psi)} \epsilon(s)\pi_G^A(\psi)(s).$$

On simplifiera un peu en 2.2 (*) ci-dessous.

2.2 Invariant de Hasse et action de $Z(\widehat{G})^\Gamma$

Les formes intérieures des groupes orthogonaux (resp. unitaires) sont classifiées par les formes bilinéaires symétriques (resp. hermitiennes) non dégénérées.

A une forme bilinéaire symétrique est associé un invariant de Hasse, de façon classique cet invariant n'est pas un pour un plan hyperbolique. On le normalise pour remédier à cela de la façon suivante : on fixe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée maximalement isotrope sur un espace vectoriel de même dimension. L'invariant de Hasse normalisé de toute forme symétrique non dégénérée de même dimension est alors, par définition, le produit de l'invariant de Hasse classique par l'invariant de Hasse classique de la forme fixée. Et c'est cet invariant de Hasse normalisé que l'on appelle invariant de Hasse. Il vérifie la formule de produit local/global quand tout est défini sur un corps de nombres. Sur les corps p-adiques, les formes orthogonales sont classifiées par leur dimension, leur discriminant et leur invariant de Hasse avec une exception en dimension deux. En dimension deux, on a la forme orthogonale déployée correspondant au discriminant un et à l'invariant de Hasse un et pour chaque discriminant non trivial, il y a deux formes orthogonales l'une d'invariant de Hasse un et l'autre d'invariant de Hasse moins un. Sur le corps des réels, les formes orthogonales sont classifiées par leur signature ce qui est plus fin que le discriminant et l'invariant de Hasse. Même si cela n'est sans doute pas indispensable, on suppose comme c'est légitime que la forme quasi-déployée G^* correspond à une forme orthogonale d'invariant de Hasse un.

Pour les formes hermitiennes, la notion d'invariant de Hasse est moins classique. Notons E l'extension quadratique du corps de base qui définit les groupes unitaires de la situation. Pour tout élément de E on définit sa partie réelle comme la demi-somme de cet élément avec son conjugué. L'invariant de Hasse associé à une forme unitaire est, par définition, l'invariant de Hasse de la forme bilinéaire symétrique associée à la partie réelle de la forme hermitienne. On a donc aussi une formule de produit local/global quand on part d'un corps de nombres. On suppose aussi que G^* est le groupe unitaire d'une forme hermitienne d'invariant de Hasse un.

Un invariant de Hasse est un signe et il définit donc un caractère de $\{\pm 1\}$ que l'on note ϵ_G, c'est un peu abusif car cet invariant dépend de la forme bilinéaire qui définit le groupe et de la forme intérieure fixée représentant G^*.

On fixe ψ et on a donc défini $\pi^A_G(\psi)$ comme une combinaison linéaire à coefficients complexes de représentations de $G \times A(\psi)$. On remarque aussi que dans les cas qui nous occupent (groupes orthogonaux) $Z(\widehat{G})^\Gamma = Z(\widehat{G}) \simeq \{\pm 1\}$, où $Z(\widehat{G})^\Gamma$ désigne le sous-groupe de $Z(\widehat{G})$ des éléments invariants sous l'action du groupe de Galois utilisée pour définir ${}^LG$.

Proposition. *Pour tout $z \in Z(\widehat{G})^\Gamma$, et pour tout $s \in A(\psi)$, on a $\pi^A_G(\psi)(sz) = \epsilon_G(z)\pi^A_G(\psi)(s)$.*

Démonstration. On fixe s dans le centralisateur de ψ tel que $s^2 = 1$ et on note z l'élément non trivial de $Z(\widehat{G})^\Gamma$. A s et ψ correspond l'unique donnée endoscopique elliptique de G, $\underline{H}_s$. A sz et ψ correspond une donnée endoscopique équivalente. Mais l'action de z entraîne pour le transfert la multiplication par un signe (cf. [3], fin de l'introduction, le résultat est plutôt dû à Kottwitz et Shelstad). Et on doit vérifier que ce signe est trivial exactement quand l'invariant de Hasse l'est aussi. Cela vient de la normalisation des facteurs de transfert pour les formes intérieures pures de G^*. □

Corollaire. *Soit ϵ un caractère de $A(\psi)$. Alors $\pi(\psi)_\epsilon$ vérifie la formule d'inversion*

$$\pi(\psi)_\epsilon := |A(\psi)/Z(\widehat{G})^\Gamma|^{-1} \sum_{s \in A(\psi)/Z(\widehat{G})^\Gamma} \epsilon(s)\pi^A_G(\psi)(s). \qquad (*)$$

Ici, il y a un abus de notation, il faut comprendre que l'on somme sur un système de représentants de $A(\psi)/Z(\widehat{G})^\Gamma$ dans $A(\psi)$ et la proposition montre que les termes de la somme ne dépendent pas du choix de ces représentants.

2.3 Conséquences de la formule des traces

On rappelle la stabilisation de la partie discrète spectrale de la formule des traces. Cela a été fait en [4] et repris en [18]. Ici la situation est globale et G, G^* sont des groupes réductifs définis sur un corps de nombres, F, et on suppose que G^* est la forme quasi-déployée de G. On note n^* la dimension de la représentation standard du L-groupe de G.

On fixe V un ensemble fini de places de F qui contient les places dites "ramifiées", c'est-à-dire les places archimédiennes, les places de petites caractéristiques et les places où il y a de la ramification. On note $G(F^V)$ le groupe des points de G sur les adèles de F hors les places dans V et $G(F_V)$ le groupe produit des points de G en les complétés de F en les places dans V. On considère l'algèbre de Hecke sphérique pour $G(F^V)$ et un caractère c^V de cette algèbre de Hecke. On considère $I^G_{disc}(c^V)$ la partie spectrale discrète sur laquelle les fonctions non ramifiées hors de V agissent par le caractère c^V. Cette distribution vue comme distribution sur $G(F_V)$ a été stabilisée avec les références déjà données et il n'est pas difficile de voir que cette distribution est nulle sauf si le transfert endoscopique tordu de c^V au groupe linéaire $\mathrm{GL}(n^*)$ est un caractère de l'algèbre de Hecke sphérique hors de V de ce groupe correspondant à un paramètre global d'Arthur. En d'autres termes, il existe un paramètre global ψ d'Arthur tel qu'en toute place v, on obtienne par localisation un paramètre local ψ_v. On dit que ψ le paramètre global est régulier s'il ne se factorise pas par un sous-groupe de Levi de G^*. On note $\epsilon^A(\psi)$ le caractère de $A(\psi)$ associé à ψ par Arthur. On fixe aussi un caractère infinitésimal à toutes les places archimédiennes. Si G est un groupe spécial orthogonal pair et si ψ est une somme de paramètres élémentaires tous orthogonaux pairs, on suppose qu'en une place archimédienne, le caractère infinitésimal n'est pas stable sous l'action du groupe orthogonal.

Pour un ensemble de caractères ϵ_v de $A(\psi_v)$, $v \in V$ on considère la restriction de $\prod \epsilon_v$ à $A(\psi)$ et on dit que l'ensemble des caractères $\{\epsilon_v\}$ est admissible si cette restriction à $A(\psi)$ est le caractère $\epsilon^A(\psi)$.

Théorème. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus,*

$$\sum_{\{\epsilon_v\}} \otimes_{v\in V}\ \pi(\psi_v)_{\epsilon_v}$$

où la somme porte sur l'ensemble des caractères admissibles, est une représentation unitaire de $G(F_V)$.

Le résultat est donc que la somme qui a priori est une combinaison linéaire à coefficients complexes de représentations de $G(F_V)$ est en fait une combinaison linéaire à coefficients des entiers positifs de représentations unitaires irréductibles de $G(F_V)$. Ce théorème, comme on va le voir, est évidemment copié des résultats de [5]. Bien sûr, cela ne montre pas la même propriété en chaque place locale ce qui est pourtant ce qui nous intéresse. Pour avoir cette propriété il faudra pouvoir isoler une place et savoir que les coefficients aux autres places sont 1.

Démonstration. On écrit la stabilisation de $I^G_{disc}(c^V)$. On a une somme sur toutes les données endoscopiques elliptiques non ramifiées hors de V, donc un nombre fini. De plus seules interviennent les données endoscopiques elliptiques ayant un caractère de l'algèbre de Hecke sphérique hors de V qui se transfère en c^V. Cela force le s de la donnée endoscopique à être (à conjugaison près) dans le centralisateur de ψ ; on suppose dès le départ, comme c'est loisible que $s^2 = 1$. Comme on fixe ψ, on suppose que s est dans le centralisateur de ψ. On a donc une somme avec des coefficients explicites des $SI^{\underline{H}_s}_{disc}(c^V)$.

L'hypothèse de régularité sur ψ simplifie les formules car elle évite les termes venant des sous-groupes de Levi et les opérateurs d'entrelacement associés. Sous cette hypothèse simplificatrice, ces termes stables ont été calculés par Arthur dans [5] et récrits par Taïbi en [19] : les constantes explicites ne dépendent que de ${}^LG$ et de $\underline{H}_s$ donc sont les mêmes que pour le groupe déployé et on a donc le même calcul qu'Arthur mais c'est plus simple d'aller regarder le calcul explicite fait par Taïbi où le caractère infinitésimal ne joue aucun rôle. Le transfert local a été défini ci-dessus en termes précisément des $\pi(\psi)_{\epsilon_v}$ et on trouve que la distribution $I^G_{disc}(c^V)$ est la formule de l'énoncé (cf. [19] 4.0.1). Pour les groupes spéciaux orthogonaux pairs, quand le paramètre n'est pas stable sous le groupe orthogonal, on utilise l'hypothèse sur le caractère infinitésimal pour séparer aussi les représentations sous l'action du groupe orthogonal. D'où le résultat. □

3 Paramètres tempérés p-adiques

3.1 Classification des séries discrètes des groupes orthogonaux non quasi-déployés aux places p-adiques

On revient à la situation locale et on s'intéresse aux morphismes de Langlands discrets qui sont des cas particuliers des morphismes d'Arthur. Ici le problème est le cas des groupes p-adiques non quasi-déployés puisque tous les autres cas sont connus. En particulier aux places archimédiennes, à toute série discrète (et même à toute représentation tempérée) est associée un morphisme de Langlands discret et un caractère du groupe des composantes du centralisateur du morphisme de Langlands associé. Cette application est injective mais n'est pas surjective, pour avoir une application surjective, il faut regarder toutes les formes intérieures pures. Et la restriction de ce caractère à $Z(\widehat{G})^\Gamma$ correspond à l'invariant de Hasse (c'est-à-dire est trivial exactement quand l'invariant de Hasse est trivial).

Aux places p-adiques quand G est quasi-déployé, on a une bijection entre les séries discrètes et les couples formés d'un paramètre de Langlands discret et un caractère du centralisateur de ce paramètre dont la restriction à $Z(\widehat{G})^\Gamma$ est triviale (cf.[5], dès l'introduction et aussi [13] qui donne une construction explicite du morphisme de Langlands). On va démontrer le même résultat dans le cas non quasi-déployé. Commençons par les énoncés :

Théorème. *(Arthur dans le cas quasi-déployé [5] 6.5) Avec les notations précédentes, $\pi(\phi_v)_\epsilon$ est une représentation irréductible (en particulier non nulle) et l'application $(\phi_v, \epsilon) \mapsto \pi(\phi)_\epsilon$ est bijective.*

Proposition. *Soit G_v un groupe spécial orthogonal ou unitaire non nécessairement quasi-déployé et soit ϕ_v un morphisme de Langlands borné et discret. Alors la représentation de $G_v \times A(\phi_v)$ associée est de la forme :*

$$\epsilon^K(G_v) \sum_\epsilon \pi(\phi_v)_\epsilon \otimes \epsilon,$$

où ϵ parcourt l'ensemble des caractères de $A(\phi_v)$ de restriction fixée à $Z(\widehat{G})^\Gamma$ par l'invariant de Hasse et où $\pi(\phi_v)_\epsilon$ est une série discrète irréductible.

La preuve est la même que dans le cas quasi-déployé et donc grandement due à Arthur. La méthode est la suivante : on commence par démontrer par voie globale que les $\pi(\phi_v)_\epsilon$ sont des sommes à coefficients entiers positifs de représentations. Ensuite on utilise les relations d'orthogonalité. Détaillons cela en plusieurs sous-sections. Pour simplifier les notations on se limite au cas des groupes orthogonaux. Le cas des groupes unitaires est déjà connu (cf. [8]).

3.2 Positivité

Cette partie nécessite de globaliser la situation. On commence par fixer un paramètre ϕ_v borné (tempéré) pour le groupe local G_v. Donc on ne suppose pas que le paramètre local est discret. Montrons alors le lemme :

Lemme. *Les représentations $\pi(\phi_v)_\epsilon$ sont des combinaisons linéaires à coefficients positifs de représentations irréductibles.*

On décompose ϕ_v en somme de représentations irréductibles de $W_{F_v} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Chaque composante irréductible est une représentation symplectique si G_v est un groupe orthogonal impair et une représentation orthogonale sinon. Notons m la dimension d'une telle composante irréductible. On va globaliser chacune de ces composantes irréductibles en construisant une représentation cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A}_F)$ ayant en la place v la série discrète définie par cette composante irréductible et on veut aussi des conditions aux places archimédiennes.

On construit un corps global F avec une place v où F se localise en F_v et un nombre de places réelles grand par rapport au nombre de sous-représentations irréductibles incluses dans ϕ.

En chaque place réelle on suppose que le caractère infinitésimal est formé de demi-entiers si G est un groupe orthogonal de dimension impair et d'entiers sinon et on suppose que ces nombres sont tous distincts et ils seront distincts pour chaque construction : pour faire cela, il faut commencer par regarder un groupe classique quasi-déployé de même nature que G sur un espace vectoriel de dimension m. Le paramètre local définit un paquet de séries discrètes pour ce groupe, avec une toute petite difficulté dans le cas où m est un entier impair, il faut supposer que le morphisme composé avec le déterminant soit trivial. On s'y ramène en tordant par un caractère de W_{F_v}. On prend une série discrète dans ce paquet local. Aux places à l'infini on construit une série discrète pour le groupe réel avec un caractère infinitésimal que l'on choisit comme on veut et on sait que l'on peut globaliser ces constructions, c'est-à-dire construire une représentation cuspidale du groupe sur les adèles de F ayant en la place finie et en les places archimédiennes les constructions faites. La théorie d'Arthur associe à cette représentation un paramètre qui est symplectique en toute place si la composante irréductible fixée était symplectique et qui est orthogonal sinon et un transfert tordu à $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A}_F)$. Si on a tordu par un caractère quadratique le paramètre local on retord globalement. Cela ne change pas le caractère infinitésimal aux places archimédiennes.

En faisant cela pour toutes les composantes irréductibles de ϕ_v, on obtient bien un paramètre global ϕ tel que $A(\phi)$ s'envoie surjectivement sur $A(\phi_v)$. Ce paramètre ϕ est globalement discret, il a un caractère infinitésimal régulier c'est-à-dire que les représentations cuspidales des $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A})$ construites sont toutes distinctes. En toute place w, le déterminant de ϕ_w (la localisation de ϕ en la place w) fixe le discriminant de la forme orthogonale que l'on va considérer. Ce discriminant est un si G_v est un groupe orthogonal impair. On n'a pas encore fixé l'invariant de Hasse de la forme orthogonale non quasi-déployée qui va nous intéresser, elle dépend des choix que l'on va faire maintenant.

On fixe aussi un caractère ϵ_v de $A(\phi_v)$, où v est la place fixée p-adique qui nous intéresse. On a construit les objets aux places archimédiennes de sorte que l'application de $A(\phi)$ dans l'analogue en ces places soit injectif. On peut ainsi trouver en ces places, w, un caractère ϵ_w tel que l'ensemble qu'ils forment avec ϵ_v soit admissible c'est-à-dire ici trivial en restriction à $A(\phi)$ (le caractère d'Arthur est trivial pour les morphismes globaux triviaux sur le $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ dit de Lefschetz, mais peu importe ici). En toute place w comme précédemment, on considère une forme orthogonale dont l'invariant de Hasse est la restriction à $Z(\widehat{G})^\Gamma$ du caractère ϵ_w. En la place v et en les places archimédiennes, on a donc le discriminant et l'invariant de Hasse d'une forme orthogonale, le produit des invariants de Hasse vaut 1. Cela ne fixe pas encore la forme orthogonale aux places archimédiennes, et on en fixe une de sorte que le caractère ϵ_w corresponde bien à une représentation tempérée du groupe orthogonal associé. On complète aux autres places finies en prenant des formes orthogonales déployées avec le discriminant déjà fixé, ce qui est loisible puisque le produit des invariants de Hasse vaut bien 1.

On utilise maintenant 2.3 où ψ est ϕ prolongé trivialement à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (on garde la notation ϕ). On voit que dans la somme on a un terme $\pi(\phi_v)_{\epsilon_v} \otimes \Pi^v$, où Π^v est un produit en toute place dans V sauf v de représentations irréductibles, plus d'autres termes de la forme $\pi(\phi_v)_{\epsilon'_v} \otimes \Pi'^v$ mais où les Π'^v sont eux aussi irréductibles mais non isomorphes à Π^v, c'est le point important et ceci est dû au fait que pour toutes les places autres que v on sait que le caractère du centralisateur détermine au plus une représentation irréductible. Ainsi il ne peut y avoir de simplification entre $\pi_{\epsilon_v} \otimes \Pi^v$ et les autres termes. Cela force π_{ϵ_v} à être une somme de représentations unitaires avec des coefficients entiers positifs. Et cela termine la preuve. $\square$

3.3 Multiplicité un

On se replace dans le cas local p-adique. On fixe encore un morphisme de Langlands, que l'on suppose ici discret, ϕ de W'_F dans ${}^LG$. A ce morphisme correspond une somme stable de séries discrètes pour G^* et on a montré que son transfert à G est, au signe de Kottwitz près, une somme à coefficients entiers positifs de représentations unitaires, $\pi_G^A(\phi)(1)$ où 1 est l'unité de $A(\phi)$. Comme le transfert commute au module de Jacquet, le critère de Casselman pour caractériser les séries discrètes s'applique à tous les termes de $\pi_G^A(\phi)(1)$ et cette représentation est donc une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de séries discrètes. On rappelle qu'à tout caractère ϵ du centralisateur de ϕ dont la restriction à $Z(\widehat{G})^\Gamma$ est l'invariant de Hasse, on a associé une représentation $\pi(\phi)_\epsilon$ qui est une combinaison linéaire à coefficients positifs de représentations unitaires et la somme de ces représentations est $\pi_G^A(\phi)(1)$. Chacune de ces représentations $\pi(\phi)_\epsilon$ est donc une combinaison linéaire de séries discrètes.

On va maintenant utiliser les relations d'orthogonalité pour le produit scalaire elliptique pour prouver l'irréductibilité des représentations $\pi(\phi)_\epsilon$ et le fait que ces représentations sont inéquivalentes.

On reprend [5] 6.5 bien que le cas qui y est traité soit plus compliqué que ce que l'on fait ici car il utilise aussi l'endoscopie tordue. On fait aussi remarquer au lecteur que le fait que l'on ait démontré directement que les représentations qui nous intéressent sont des séries discrètes, facilite l'usage du produit scalaire, car la norme elliptique d'une série discrète est un, ce qui n'est pas vrai pour une représentation elliptique générale. Pour le produit scalaire elliptique, on renvoie à [9] 4.6 qui reprend en détail ces questions.

On commence par inverser les formules donnant $\pi(\phi)_\epsilon$. On remarque que pour s fixé dans $A(\phi)$, en notant s_0 un élément de $Z(\widehat{G})^\Gamma$, on a montré l'égalité

$$\epsilon(s)\,\text{transfert}\left(\pi_{st}^{s,H,\xi}(\phi_s)\right) = \epsilon(ss_0)\,\text{transfert}\left(\pi_{st}^{ss_0,H,\xi}(\phi_{ss_0})\right),$$

où l'on a noté ϕ_s et ϕ_{ss_0} les factorisations de ϕ par les L-groupes venant de la donnée endoscopique.

On a donc la formule d'inversion

$$e^K(G)\pi(\phi)_\epsilon = n(\phi)^{-1} \sum_{s\in A(\phi)/Z(\widehat{G})} \epsilon(s)\,\text{transfert}\left(\pi_{st}^{s,H,\xi}(\phi_s)\right),$$

où $n(\phi)$ est le cardinal du groupe $A(\phi)/Z(\widehat{G})$.

Soit ϵ, ϵ' deux caractères de $A(\phi)$ de restrictions à $Z(\widehat{G})^\Gamma$ égales à l'invariant de Hasse. On calcule le produit scalaire elliptique

$$\langle \pi(\phi)_\epsilon, \pi(\phi)_{\epsilon'}\rangle_{ell}. \tag{1}$$

Les distributions obtenues par transfert pour deux données endoscopiques inéquivalentes sont orthogonales et (1) vaut donc

$$n(\phi)^{-2} \sum_{s\in A(\phi)/Z(\widehat{G})} \epsilon(s)\epsilon'(s)\langle \text{transfert}\left(\pi_{st}^{s,H,\xi}(\phi_s)\right), \text{transfert}\left(\pi_{st}^{s,H,\xi}(\phi_s)\right)\rangle_{ell}. \tag{2}$$

On rappelle que le transfert commute au produit scalaire elliptique. Ainsi dans (2) ci-dessus, on peut remplacer $\langle \text{transfert}\left(\pi_{st}^{s,H,\xi}(\phi_s)\right), \text{transfert}\left(\pi_{st}^{s,H,\xi}(\phi_s)\right)\rangle_{ell}$ par son analogue en enlevant le mot transfert. Le calcul se fait alors dans le cas quasi-déployé et ce produit scalaire vaut exactement le nombre de séries discrètes dans le transfert pour le cas quasi-déployé, c'est-à-dire encore le nombre de séries discrètes dans le paquet associé à ϕ dans le cas quasi-déployé, c'est-à-dire encore $n(\phi)$. Ainsi (2) est nul si $\epsilon \neq \epsilon'$ et si $\epsilon = \epsilon'$ (2) vaut un. On a donc les conséquences suivantes : les $\pi(\phi)_\epsilon$ sont des représentations disjointes quand ϵ varie. Et leur norme est aussi la norme est un. Il n'est pas non plus difficile de voir que $\pi(\phi)_\epsilon$ est orthogonal à $\pi(\phi')_\eta$ si ϕ' est non conjugué de ϕ pour les mêmes raisons.

Il reste à montrer que toute série discrète de G est bien l'une des représentations $\pi(\phi)_\epsilon$ que nous venons d'étudier. Pour cela on utilise encore la stabilisation de l'espace des fonctions $I_{cusp}(G)$ identifiée à l'espace des pseudo-coefficients des séries discrètes de G. Soit π une série discrète pour G. Un argument de Waldspurger déjà utilisé en [13] 2.4, montre que la projection orthogonale sur la partie stable de $I_{cusp}(G)$ d'un pseudo-coefficient de π est non nulle. Ainsi il existe un paquet stable de représentations elliptiques de G^* dont le transfert à G n'est pas orthogonal à π pour le produit scalaire elliptique. Les paquets stables de représentations elliptiques pour G^* sont des sommes de séries discrètes et il existe donc ϕ un paramètre de Langlands comme ceux étudiés ci-dessus, tel que π ne soit pas orthogonal au transfert du paquet stable de G^* associé à ϕ. Or ce transfert n'est autre que $\sum_\epsilon \pi(\phi)_\epsilon$. Ainsi π est l'une des représentations $\pi(\phi)_\epsilon$. Cela termine la preuve du théorème et de la proposition 3.1.

3.4 Au sujet des modules de Jacquet des séries discrètes

Ce paragraphe ne nous servira pas pour le but principal de ce papier mais est mis ici par souci de complétion.

Dans [10] et [17], on avait montré, avec M. Tadic, que les modules de Jacquet des séries discrètes des groupes classiques p-adiques donnaient des renseignements précis sur les paramètres de Langlands. Et en particulier que ces propriétés de modules de Jacquet ramenaient la paramétrisation de ces séries discrètes au cas cuspidal et on décrivait les paramètres des représentations cuspidales sans montrer dans ces références que tous ces paramètres potentiels correspondaient bien à une représentation cuspidale. Cela a été fait ultérieurement (cf. [13]) en utilisant les méthodes de [2] (qui sont celles utilisées ici aussi). Comme [13] utilisait le fait que les groupes soient quasi-déployés, on va ici redonner l'argument pour les groupes non quasi-déployés pour que ceux que cela intéresse puissent avoir une référence complète même si il n'y a rien de nouveau.

On fixe ϕ un paramètre de Langlands discret pour G et on reprend la notation $Jord(\phi)$ pour les sous-représentations irréductibles de $W_F \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ incluses dans ϕ. On identifie les éléments de $Jord(\phi)$ à des couples (ρ, a) où ρ est la représentation cuspidale unitaire d'un groupe $GL(d_\rho, F)$ (ce qui définit d_ρ) qui correspond à la représentation irréductible de W_F et a la dimension de la représentation irréductible de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Pour ρ comme ci-dessus, $x \in \mathbb{C}$ et π une représentation irréductible de G, on reprend la notation $Jac_{\rho||^x}\pi$ pour noter la composante $\rho||^x$ isotypique pour l'action de $GL(d_\rho, F)$ dans le module de Jacquet de π pour le parabolique (standard) maximal de G ayant un sous-groupe de Levi contenant un facteur $GL(d_\rho, F)$, s'il en existe ; sinon $Jac_{\rho||^x}\pi$ est par définition 0. Ainsi $Jac_{\rho||^x}(\pi)$ est une représentation du groupe $\mathrm{GL}(d_\rho, F) \times G'$ où G' est un groupe de même type que G mais de rang plus petit dont tous les sous-quotients irréductibles sont de la forme $\rho||^x \times \sigma$ où σ est une représentation cuspidale d'un sous-groupe de Levi de G'. Quand la représentation $Jac_{\rho||^x}\pi$ est irréductible, on la voit simplement comme une représentation de G'.

Soit ϕ comme ci-dessus et soit ϵ un caractère de $A(\phi)$ dont la restriction à $Z(\widehat{G})^\Gamma$ correspond à l'invariant de Hasse de la forme orthogonale que G préserve. Et on note π_ϵ la série discrète correspondant à ϕ et ϵ, comme ϕ est fixé, on ne le met pas dans la notation. On identifie ϵ à une application de $Jord(\phi)$ dans $\{\pm 1\}$.

Théorème. *Soit ρ et x comme ci-dessus. Alors $Jac_{\rho||^x}\pi_\epsilon = 0$ sauf éventuellement si $x > 0$ et il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $(\rho, a) \in Jord(\phi)$ avec $x = (a-1)/2$ (d'où nécessairement $a \geq 2$).*

Si ces conditions sont remplies alors on a effectivement $Jac_{\rho||^x}\pi_\epsilon \neq 0$ exactement quand l'une des conditions ci-dessous est satisfaite :
$a > 2$ et $(\rho, a-2) \notin Jord(\phi)$
ou $(\rho, a-2) \in Jord(\phi)$ et $\epsilon((\rho, a)) = \epsilon((\rho, a-2))$
ou $a = 2$ et $\epsilon((\rho, a)) = +1$.

<u>*Démonstration*</u>. On écrit

$$\pi_\epsilon = (|A(\phi)/Z(\widehat{G})|)^{-1} \sum_{s \in A(\phi)/Z(\widehat{G})} \epsilon(s)\, \mathrm{transfert}(\pi(\phi_s)(1)),$$

où on a noté $\pi(\phi_s)(1)$ la distribution stable pour la donnée endoscopique elliptique associée à s et à ϕ. On utilise le fait que le transfert commute au module de Jacquet pour écrire avec les notations de l'énoncé :

$$Jac_{\rho||^x}\pi_\epsilon = (|A(\phi)/Z(\widehat{G})|)^{-1} \sum_{s \in A(\phi)/Z(\widehat{G})} \epsilon(s)\, \mathrm{transfert}(Jac_{\rho||^x}\pi(\phi_s)(1)). \qquad (1)$$

Les représentations $Jac_{\rho||^x}\pi(\phi_s)(1)$ sont connues puisque l'on est dans le cas quasi-déployé. Toutes ces représentations sont nulles sauf éventuellement si $x = (a-1)/2$ avec $a > 1$ tel que $(\rho, a) \in Jord(\phi)$. Et si ces conditions sont satisfaites, ces représentations sont stables, associées au morphisme ϕ_- où ϕ_- se déduit de ϕ en remplaçant (ρ, a) par $(\rho, a-2)$ dans la décomposition de ϕ en sous-représentations irréductibles. En particulier si $(\rho, a-2) \notin Jord(\phi)$ et $a > 2$, ϕ_- est un paramètre de séries discrètes pour le groupe qui se déduit de G^* en diminuant le rang par d_ρ et $A(\phi_-)$ est naturellement isomorphe à $A(\phi)$. Dans ce cas, par définition, on a alors $Jac_{\rho||^x}\pi_\epsilon = \pi(\phi_-)_\epsilon$ si $x = (a-1)/2$.

Il reste donc à voir le cas où soit $a = 2$ soit $(\rho, a-2) \in Jord(\phi)$ avec $x = (a-1)/2$. Si $a = 2$, ϕ_- s'obtient en enlevant (ρ, a). Dans les deux cas, l'application naturelle de $A(\phi)$ dans $A(\phi_-)$ est surjective mais non injective. On note T le noyau, il a deux éléments. On remarque que dans (1), on a une sous-somme sur les éléments de T et que (1) est non nul, seulement si le caractère ϵ est trivial sur T, c'est-à-dire si $\epsilon(\rho, a) = \epsilon(\rho, a-2)$ avec la convention que $\epsilon(\rho, a-2) = +1$ si $a = 2$. Ce sont les conditions de l'énoncé. Si ces conditions sont satisfaites, alors le terme de gauche est par définition $\pi(\phi_-)_\epsilon$ où ϵ est maintenant vu comme un caractère de $A(\phi_-)$. Cela termine la preuve. □

3.5 Classification des représentations cuspidales

Corollaire. *Les représentations cuspidales de G sont classifiées exactement comme dans le cas quasi-déployé : il n'y en a pas si le morphisme ϕ correspondant est tel que $Jord(\phi)$ a des trous, c'est-à-dire s'il existe $(\rho, a) \in Jord(\phi)$ avec $a > 2$ et $(\rho, a-2) \notin Jord(\phi)$. Et si le morphisme ϕ n'a pas de trous, les représentations cuspidales correspondent aux caractères de $A(\phi)$ de restriction à $Z(\widehat{G})$ l'invariant de Hasse et qui sont alternés c'est-à-dire $\epsilon(\rho, a) \neq \epsilon(\rho, a-2)$ si $a \geq 2$ en posant $\epsilon(\rho, 0) = +1$ si nécessaire.*

3.6 Classification des représentations tempérées

Proposition. *Soit ϕ un morphisme tempéré de W'_F dans ${}^L G$. Pour tout caractère ϵ de $A(\phi)$ de restriction à $Z(\widehat{G})$ l'invariant de Hasse, la représentation $\pi(\phi)_\epsilon$ est irréductible et tempérée. L'application qui à (ϕ, ϵ) associé $\pi(\phi)_\epsilon$ est une bijection.*

Démonstration. Il est clair par leur définition même en tant que transfert que les représentations $\pi(\phi)_\epsilon$ sont tempérées (cf. [18] XI.2.11). On considère la combinaison linéaire :

$$\sum_\epsilon \pi(\phi)_\epsilon. \tag{1}$$

C'est, par définition, le transfert de la représentation tempérée stable associée à ϕ pour G^*. On connaît ces représentations stables pour G^* : ce sont des induites complètes d'un paquet stable de séries discrètes pour un sous-groupe de Levi, M^* de G^*. Ainsi il existe un sous-groupe de Levi M^* de G^* tel que ϕ se factorise en un paramètre de séries discrètes pour M^*. Et la représentation (1) est le transfert de G^* à G de l'induite complète du paquet stable de séries discrètes de M^*. Ce transfert est nul si M^* ne se transfère pas à G. Or d'après 3.2 la somme des représentations $\pi(\phi)_\epsilon$ voit toutes les composantes de chacune de ces représentations (les coefficients sont positifs et s'ajoutent). Ainsi cette somme ne peut être nulle et il faut donc que M^* se transfère. D'où M. D'autre part, on vient de montrer aussi que chaque composante irréductible d'une des représentations $\pi(\phi)_\epsilon$ est sous-module d'une induite à partir d'un sous-groupe parabolique de Levi M et d'une série discrète de M. Et on rappelle que le support discret d'une représentation tempérée, π, est bien défini, c'est-à-dire qu'à conjugaison près la donnée d'un couple formé d'un sous-groupe de Levi M et d'une série discrète σ de M tel que π soit sous-module de l'induite de σ après choix d'un sous-groupe parabolique de Levi M est uniquement déterminé par π.

Cela montre donc deux points importants : si ϕ n'est pas conjugué d'un morphisme tempéré ϕ' alors pour tout ϵ et ϵ', des caractères des groupes des centralisateurs de ϕ et ϕ' respectivement, $\pi(\phi)_\epsilon$ n'a aucune composante en commun avec $\pi(\phi')_{\epsilon'}$. Et d'autre part, pour toute représentation tempérée irréductible, il existe ϕ et ϵ tel que π soit une composante irréductible intervenant dans la combinaison linéaire définissant $\pi(\phi)_\epsilon$.

Il reste donc à montrer que les $\pi(\phi)_\epsilon$ sont des représentations irréductibles non isomorphes entre elles quand ϕ est fixé. Il faut donc démontrer que les représentations $\pi(\phi)_\epsilon$ sont non nulles et que les induites de séries discrètes n'ont pas de multiplicité.

On commence par un exemple. On considère le cas d'un sous-groupe parabolique maximal de G de la forme $\mathrm{GL}(d, F) \times G'$ avec G' un groupe de même type que G et on fixe une série discrète de ce sous-groupe de Levi. On remarque ici que G' n'est pas le groupe trivial si G n'est pas quasi-déployé. Alors l'induite est soit irréductible soit de longueur deux, un calcul de module de Jacquet prouve cela (cf. [17]). Le R-groupe est donc soit trivial soit isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La décomposition de l'induite est, par la théorie générale, gouvernée par les représentations irréductibles d'une extension centrale par $\mathbb{C}^*$, du R-groupe ayant un caractère central fixé. Or de telles extensions centrales pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont non seulement abéliennes (ce qui est vrai pour toute extension centrale d'un groupe cyclique) mais même scindée : en effet soit

$$1 \to \mathbb{C}^* \to C \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$$

une telle extension. On prend z un élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\overline{z}$ un relèvement dans C. Quitte à multiplier par un élément de $\mathbb{C}$, on s'arrange pour que $\overline{z}^2 = 1$. Et dans ces conditions $\overline{z}$ est égal à son inverse. Ainsi C qui est engendré par $\overline{z}$ et son centre est abélien et est même une extension scindée. L'induite est donc sans multiplicité. Et elle est réductible si et seulement si il existe une représentation elliptique combinaison linéaire des sous-représentations incluses dans l'induite. Comme les représentations elliptiques s'obtiennent par transfert endoscopique (cf. [18] XI.4) on a une description précise de ce cas.

Pour avoir le cas général, on se heurte à la difficulté que pour les places p-adiques on ne sait pas que la décomposition des induites de séries discrètes est gouvernée par les représentations du R-groupe lui-même, il semble même que ce ne soit pas vrai. On prend donc une autre méthode, celle utilisée pour ramener le cas d'un paramètre d'Arthur général au cas d'un paramètre d'Arthur "discret" et ici cela veut vraiment dire discret. Et on démontrera que ce sont bien les représentations du R-groupe lui-même qui gouvernent la décomposition des induites.

On décompose ϕ en sous-représentations irréductibles de $W_F \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et l'on écrit $\phi = \oplus_{i\in[1,\ell]}\rho_i \boxtimes R[a_i]$ où les a_i sont ordonnées tels que $a_1 \geq \cdots \geq a_\ell$. On fixe des entiers $T_1 >> \cdots >> T_\ell$ et on considère le morphisme ϕ_+ pour un groupe de même type que G mais de rang $\sum_i T_i$ plus grand dont la décomposition en sous-représentations irréductibles est :

$$\oplus_{i\in[1,\ell]}\rho_i \boxtimes R[a_i + 2T_i].$$

On a vérifié par des arguments assez élémentaires de modules de Jacquet (cf. [14] 3.2) que pour tout ϵ_+ caractère de $A(\phi_+)$ la représentation

$$\circ_{i\in[\ell,1];k\in[T_i,1]} Jac_{\rho_i||^{(a_i-1)/2+k}} \left(\pi(\phi_+)_{\epsilon_+}\right) \tag{2}$$

est soit nulle soit irréductible et que si elle est non nulle elle n'est pas isomorphe à une représentation du même type avec un autre caractère ϵ_+. On a une application naturelle de $A(\phi_+)$ dans $A(\phi)$ et on vérifie comme on l'a fait dans la preuve du théorème de 3.4 que (2) est nul si ϵ_+ ne se factorise pas en un caractère de $A(\phi)$. On note alors ϵ cette factorisation et le fait que l'endoscopie commute aux modules de Jacquet force alors (2) à être isomorphe à $\pi(\phi)_\epsilon$.

Ainsi les représentations $\pi(\phi)_\epsilon$ sont soit irréductibles soit nulles et non isomorphes entre elles. On vient donc de démontrer que les induites de séries discrètes se décomposent sans multiplicité et cela entraîne donc que les représentations projectives du R-groupe qui gouvernent cette décomposition se relèvent en des représentations du R-groupe. On fait alors remarquer au lecteur que la preuve ci-dessus, qui s'applique aussi au cas quasi-déployé est légèrement différente de celle de [5]. En *loc. cite*, Arthur calcule vraiment les opérateurs d'entrelacement et obtient donc plus directement la remarque ci-dessous.

On reprend les notations précédentes pour ϕ un paramètre de Langlands borné (tempéré) pour G. On note M^* le sous-groupe de Levi de G^* pour lequel ϕ définit un paquet de séries discrètes. Si M^* ne se transfère pas à G, il n'y a pas de représentations tempérées pour G associées à ϕ comme on l'a vu et sinon on note M le transfert de M^* et on fixe σ une série discrète de M associée à ϕ. On fixe un sous-groupe parabolique de G de sous-groupe de Levi M et on considère l'induite de σ. On note ℓ le nombre de sous-représentations irréductibles de ϕ y intervenant avec une multiplicité paire.

Remarque. *Le R-groupe de l'induite de σ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ et les caractères de ce groupe sont en bijection avec les sous-quotients irréductibles de l'induite conformément à la théorie du R-groupe.*

Pour avoir ce résultat unifié, il faut considérer le groupe orthogonal pair au lieu du groupe spécial orthogonal.

Le fait que le R-groupe soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ résulte du cas où M est maximal, cas que l'on a vu ci-dessus en exemple, et des résultats de Goldberg ([6], 6.5 qui expliquent la subtilité pour $\mathrm{SO}(2n)$). Comme on a montré a priori le fait que l'induite se décompose avec multiplicité un, on sait que l'extension centrale du R-groupe qui gouverne la décomposition de cette induite est abélienne. Comme on l'a noté plus haut, les extensions centrales par $\mathbb{C}^*$d'un produit de groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont scindées et abéliennes. D'où la remarque.

Il nous restait à montrer que chaque $\pi(\phi)_\epsilon$ est non nul. Le plus rapide est d'utiliser la remarque pour compter le nombre de sous-représentations dans l'induite. En fixant σ comme dans la remarque, on fixe la restriction de ϵ à $A_M(\phi)$, l'analogue de $A(\phi)$ pour M. On note ϵ_M cette restriction. Le nombre de caractères du R-groupe est alors exactement le nombre d'extensions de ϵ_M en un caractère de $A(\phi)$. Et toutes les extensions ont nécessairement comme restriction à $Z(\widehat{G})^\Gamma$ la valeur de ϵ_M sur $Z(\widehat{M})^\Gamma$, donc l'invariant de Hasse comme requis. Cela termine la preuve. □

4 Le cas unipotent

4.1 Le cas p-adique

On fixe encore un corps local p-adique. On dit qu'un morphisme ψ est unipotent si sa restriction au groupe de Weil-Deligne du corps local F est trivial sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. C'est une définition commode mais qui ne correspond pas à l'analogue de celle donnée par Barbasch-Vogan dans le cas archimédien. Il vaudrait sans doute mieux dire que le paramètre est anti-tempéré car les représentations associées à un tel morphisme sont les duales au sens d'Aubert-Schneider-Stuhler des représentations tempérées comme on va le revérifier.

Toutefois la dualité ne commute pas tout à fait au transfert comme démontré par Hiraga ([7]) et introduit une permutation dans les caractères qui paramètrent les représentations. Donc avant de pouvoir énoncer le théorème, il faut introduire un caractère qui va tordre la situation. On note D l'involution d'Aubert-Schneider-Stuhler et pour tout groupe G, on note $D_G := (-1)^{a_G} D$ l'involution D multipliée par un signe où a_G est la dimension d'un tore déployé maximal de G. Ainsi grâce aux résultats d'Hiraga déjà cités, cette involution commute à l'endoscopie.

On fixe ϕ un paramètre tempéré pour G^*. On note 1 le caractère trivial de $A(\phi)$ et on a donc la représentation tempérée $\pi(\phi)_1$. On note $t(\phi)$ le signe tel que $t(\phi) D_{G^*}(\pi(\phi)_1)$ soit une représentation irréductible donc avec un signe $+$. Ce signe est connu.

Soit $s \in A(\phi)$, on pose $\epsilon_\phi(s) := t(\phi)t(\phi_s)$ où $t(\phi_s)$ est l'analogue de $t(\phi)$ pour la donnée endoscopique elliptique associée à s et ϕ et pour le paramètre ϕ_s de cette donnée endoscopique qui est la factorisation de ϕ.

Lemme. *L'application $s \mapsto \epsilon_\phi(s)$ est un caractère de $A(\phi)$ trivial sur $Z(\widehat{G})^\Gamma$ et sur l'image par ϕ du centre de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, on se ramène au cas où ϕ est trivial sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. On a la propriété d'invariance suivante pour $t(\phi)$. Soit a un entier tel que la restriction de ϕ à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ contienne la représentation irréductible de dimension finie de dimension a. On note ϕ_- la représentation de $W_F \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ qui se déduit de ϕ en remplaçant toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ de dimension a par des représentations irréductibles de dimension $a-2$. En termes clairs si $\phi = \oplus_{(\rho,b)} \rho \otimes R[b]$ est la décomposition en sous-représentations irréductibles de ϕ, celle de ϕ_- se déduit de celle de ϕ en remplaçant les couples (ρ,b) tel que $b=a$ par $(\rho,a-2)$. On vérifie que $t(\phi) = t(\phi_-)$: la raison est que $\pi(\phi)_1$ est un sous-quotient irréductible de l'induite $\times_{(\rho,a)} \rho ||^{(a-1)/2} \times \pi(\phi_-)_1$, où (ρ,a) parcourt l'ensemble des sous-représentations irréductibles dans la décomposition de ϕ comme ci-dessus, où $b = a$. On constate que la même opération s'applique pour les données endoscopiques elliptiques associées à un élément s de $A(\phi)$.

Cela ramène donc au cas où ϕ est trivial sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Dans ce cas, $t(\phi) D_{G^*}(\pi(\phi)_1)$ est une représentation tempérée irréductible dans le paquet associé à ϕ. Elle est donc de la forme $\pi(\phi)_\epsilon$ et on voit que par les définitions de ces représentations, ce ϵ n'est autre que ϵ_ϕ. D'où le lemme. $\square$

Pour expliquer un peu ce qui se passe, si ϕ est trivial sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ et n'a pas de multiplicité en tant que représentation de W_F, alors ϵ_ϕ est trivial car $\pi(\phi)_1$ est une représentation cuspidale. Mais ceci n'est plus vrai en général si ϕ est une représentation de W_F avec de la multiplicité car $\pi(\phi)_1$ n'est alors pas une représentation cuspidale et son image par l'involution n'est pas en général elle-même au signe près.

Dans le théorème ci-dessous, les valeurs absolues signifient que l'on prend la représentation en oubliant le signe éventuellement introduit par la dualité.

Théorème. *Soit ψ un paramètre unipotent. Pour tout caractère ϵ de $A(\psi)$ dont la restriction au centre de $\widehat{G}$ correspond à l'invariant de Hasse, la représentation $\pi(\psi)_\epsilon$ est irréductible et vaut $|D_G(\pi(\phi)_{\epsilon\epsilon_\phi})|$ où ϕ est le morphisme tempéré dual de ψ.*

Démonstration. Comme dans [5] paragraphe 7, on identifie le centralisateur de ϕ et le centralisateur de ψ (les notations sont celles de l'énoncé). D'après les définitions, on a donc pour tout ϵ comme dans l'énoncé

$$\epsilon^K(G) D_G(\pi(\phi)_\epsilon) = \sum_s \epsilon(s) \,\text{transfert}\, \big(D_{H_s} \pi^H_{st}(\phi_s)\big)\,, \tag{1}$$

où on a noté H_s le groupe de la donnée endoscopique associée à s et ϕ et ϕ_s la factorisation de ϕ par le L-groupe de la donnée endoscopique.

On note, comme dans ce qui précède l'énoncé du théorème, $t(\phi)$ le signe tel que $t(\phi) D_{G^*}(\pi(\phi)_1)$ est irréductible (ici encore 1 est le caractère trivial de $A(\phi)$). On sait que $t(\phi) = (-1)^{a_{G^*} - r(\phi)}$ où $r(\phi)$ est le rang du parabolique tel que le module de Jacquet de $\pi(\phi)_1$ pour ce parabolique est formé de représentations cuspidales.

On note $\sigma(\epsilon)$ le signe tel que

$$\sigma(\epsilon) t(\phi) \epsilon^K(G) D_G(\pi(\phi)_\epsilon) =: |D(\pi(\phi)_\epsilon)|$$

soit une représentation irréductible. En revenant à la définition de $\epsilon^K(G)$ et au calcul de signe pour l'involution non normalisée, on vérifie que le signe de Kottwitz remplace la normalisation pour G de l'involution par celle pour G^* et $\sigma(\epsilon)$ est donc

$$(-1)^{r(\pi(\phi)_1) - r(\pi(\phi)_\epsilon)}$$

où $r(\pi)$ est le rang du parabolique tel que le module de Jacquet de π pour ce parabolique soit cuspidal. Maintenant on peut reprendre mot pour mot [11] 4.2 qui montre que ce signe n'est autre que $\epsilon(s_\phi)$.

On fixe encore s dans le centralisateur de ϕ d'où la donnée endoscopique elliptique contenant s et ϕ_s comme ci-dessus. On a l'analogue $t(\phi_s)$ de $t(\phi)$. D'après le calcul fait ci-dessus, $t(\phi_s) D_{H_s} \pi^H_{st}(\phi_s)$ est la représentation virtuelle stable associée par Arthur à la factorisation, ψ_s de ψ (où ψ est le morphisme dual de ϕ) par le groupe endoscopique associé à s. Par définition de ϵ_ϕ, on a $t(\phi) = \epsilon_\phi(s) t(\phi_s)$ pour tout s. On reporte dans (1) et on trouve

$$|D(\pi(\phi)_\epsilon)| = \sum_s \epsilon(s_\psi) \epsilon_\phi(s) \epsilon(s)\ \pi^H_{st}(\psi_s).$$

On utilise encore le fait que $\epsilon_\phi(s_\psi) = 1$ pour transformer, pour tout $s \in A(\phi)$ le signe $\epsilon(s_\psi)\epsilon_\phi(s)\epsilon(s)$ en $(\epsilon\epsilon_\phi)(s s_\psi)$. Et on obtient le théorème par les définitions mêmes. $\square$

4.2 Les morphismes unipotents dans le cas archimédiens

Comme [12] que l'on va utiliser n'est écrit que pour les groupes orthogonaux, on se limite à ce cas. Les groupes unitaires peuvent se traiter directement par voie locale comme on le vérifiera dans un article ultérieur.

On fait remarquer aussi que la situation des places complexes est totalement comprise (cf. [15]) et que seules les places réelles nous importent.

Dans le cas archimédien, un morphisme de $W_F \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ dans le groupe dual de G est dit unipotent s'il est trivial sur le sous-groupe $\mathbb{C}^*$ de W_F. Quand on globalise une telle situation comme en [12], aux places finies on prend des morphismes de $W_{F_v} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, triviaux sur la première copie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et dont la restriction à W_{F_v} est une somme de caractères quadratiques. Cette situation est un cas particulier du cas traité dans le paragraphe précédent.

On peut donc ainsi globaliser en connaissant les résultats aux places p-adiques sans l'hypothèse que le groupe est quasi-déployé. Et on connaît, l'existence des paquets d'Arthur avec leur propriété de multiplicité un (cf. [12]) dans le cas archimédien sous l'hypothèse que le groupe est quasi-déployé. On va donc pouvoir enlever cette hypothèse d'être quasi-déployé.

Théorème. *Soit ψ un morphisme unipotent pour le groupe réel G. La représentation $\pi^A_G(\psi)$ restreinte à G est une somme de représentations irréductibles, somme sans multiplicité.*

De façon équivalente, le théorème dit que pour tout caractère ϵ de $A(\psi)$, la représentation $\pi(\psi)_\epsilon$ est sans multiplicité et disjointe de la représentation $\pi(\psi)_{\epsilon'}$ si ϵ' est un caractère différent de $A(\psi)$. On fait remarquer la différence avec le cas p-adique : $\pi(\psi)_\epsilon$ ici n'est pas irréductible en général, ceci était déjà le cas pour les groupes quasi-déployés. Et cela vient exactement du fait qu'une forme orthogonale n'est pas uniquement déterminée par sa dimension, son discriminant et son invariant de Hasse, contrairement au cas p-adique.

Démonstration. Pour démontrer le théorème, on globalise la situation en prenant $\mathbb{Q}$ comme corps de nombres. Il n'y a donc qu'une seule place archimédienne, celle qui nous intéresse. On globalise ψ de façon à avoir en toute place un paramètre unipotent et on connaît donc le théorème en toutes les places sauf la place archimédienne.

On fixe ϵ un caractère du centralisateur de ψ tel que $\pi(\psi)_\epsilon$ soit non nul. On va démontrer que $\pi(\psi)_\epsilon$ est une somme sans multiplicité de représentations irréductibles. Pour cela on utilise la formule globale de 2.3 et on sait que $\pi(\psi)_\epsilon$ est une somme de composantes locales de représentations automorphes de carré intégrable. Mais on obtient les représentations automorphes de carré intégrable étudiées en [12]. Ces représentations automorphes interviennent avec multiplicité un dans l'espace des représentations automorphes de carré intégrable comme on l'a vérifié en [12] 3.6. D'où l'assertion.

De plus, on a vérifié en [12] que deux représentations automorphes de carré intégrable, correspondant à un paramètre unipotent et qui sont isomorphes en toute place sauf, éventuellement, une place non archimédienne, sont, en fait, isomorphes en toute place. Cela prouve la fin de l'énoncé comme en *loc.cite*. Dans l'assertion précédente il est indispensable que la place où les représentations diffèrent éventuellement soit p-adique ; aux places archimédiennes les représentations $\pi(\psi)_\epsilon$ ne sont pas irréductibles même dans le cas unipotent. □

Références

[1] N. Arancibia, C. Moeglin et D. Renard, *Paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires (le cas des représentations cohomologiques)*, arXiv :1507.01432, à paraître aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

[2] J. Arthur, *On local character relations,* Selecta Math. 2, No. 4 (1996), p. 501-579.

[3] J. Arthur, *A note on L-packets,* Pure and Applied Mathematics Quarterly Volume 2, Number 1 (2006) (Special Issue : In honor of John H. Coates, Part 1 of 2), p. 199-217.

[4] J. Arthur, *Stabilisation of the trace formula III, proof of the main theorems*, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 158, No. 3 (2003), p. 769-873.

[5] J. Arthur, *The Endoscopic Classification of Representations. Orthogonal and Symplectic Groups,* AMS colloquium publications **61,** 2013, 590 pages.

[6] D. Goldberg, *Reducibility of induced representations for Sp(2n) and SO(n),* Amer. J. Math. vol 116, No. 5 (1994), p. 1101-1151.

[7] K. Hiraga, *On functoriality of Zelevinsky involution,* Compositio Math. **140** (2004), p. 1625-1656.

[8] T. Kaletha, A. Minguez, S. W. Shin et P. J. White, *Endoscopic Classification of Representations : Inner Forms of Unitary Groups,* prépublication 2014 (220 pages).

[9] B. Lemaire, C. Moeglin, J.-L. Waldspurger, *Le lemme fondamental pour l'endoscopie tordue : réduction aux éléments unités,* arXiv 1506.03383.

[10] C. Moeglin, *Sur la classification des séries discrètes des groupes classiques p-adiques : paramètres de Langlands et exhaustivité,* Journal of the European Mathematical Society, **4** (2002), p. 143-200.

[11] C. Moeglin, *Sur certains paquets d'Arthur et involution d'Aubert-Schneider-Stuhler généralisée,* Representation Theory, **10** (2006), p. 86-129.

[12] C. Moeglin, *Paquets d'Arthur spéciaux unipotents aux places archimédiennes et correspondance de Howe,* in Representation Theory, Number Theory, and Invariant Theory : In Honor of Roger Howe on the Occasion of His 70th Birthday Editors Ju-Lee Kim, Jim Cogdell and Chen-Bo Zhu, to appear in PM in math, Birkhauser.

[13] C. Moeglin, *Paquets stables des séries discrètes accessibles par endoscopie tordue ; leur paramètre de Langlands,* Contemporary Math. 614 (2014), p. 295-336.

[14] C. Moeglin, *Multiplicité un dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques,* On Certain L-Functions, Clay Math. Proceedings, vol 13, in honor of F. Shahidi, (2011), p. 333-374

[15] C. Moeglin et D. Renard, *Paquets d'Arthur des groupes classiques complexes,* Contemporary Math 691 (2017) p. 203-256.

[16] C. Moeglin et D. Renard, *Sur les paquets d'Arthur des groupes classiques réels,* Journal of the European Mathematical Society, à paraître.

[17] C. Moeglin et M. Tadic, *Construction of discrete series for classical p-adic groups,* JAMS, **15** (2002), p. 715-786.

[18] C. Moeglin et J.-L. Waldspurger, *Stabilisation de la formule des traces tordue,* Volume 316 et 317, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2016.

[19] O. Taïbi, *Arthur's multiplicity formula for certain inner forms of special orthogonal and symplectic groups,* to appear in Journal of the European Mathematical Society