
PAQUETS D'ARTHUR DES GROUPES CLASSIQUES COMPLEXES

par

Colette Moeglin & David Renard

Résumé. — Nous décrivons explicitement les paquets d'Arthur des groupes classiques complexes, ainsi que leur paramétrisation interne par les caractères du groupe des composantes connexes du centralisateur de leur paramètre. Nous montrons d'abord qu'ils sont obtenus par induction parabolique préservant l'irréductibilité à partir des paquets unipotents de "bonne parité". Pour ceux-ci, nous montrons qu'ils coïncident avec les paquets définis par Barbasch-Vogan [BV85]. Nous utilisons des résultats profonds de Barbasch entrants dans sa classification du dual unitaire de ces groupes [Bar89].

Abstract. — We describe explicitly Arthur packets for complex classical groups, as well as their internal parametrization by the group of characters of the component group of the stabilizer of their parameter. We first show that they are obtained by parabolic induction preserving irreducibility from unipotent packets of "good parity". For these, we show that they coincide with the packets defined by Barbasch and Vogan. We use deep results of Barbasch entering his classification of the unitary dual of these groups [Bar89].

Table des matières

1. Introduction	2
2. Notations et généralités sur les groupes complexes et leurs représentations ..	5
3. Paramètres de Langlands et d'Arthur	7
4. \mathbf{GL}_N	10
5. Les groupes classiques et leurs représentations. Paquets d'Arthur	12
6. Réduction au cas unipotent de bonne parité	14
7. Description des paquets unipotents (Barbasch-Vogan)	19
8. Lemmes de réduction	30
9. Un résultat sur les exposants	37
10. Identification des paquets de Barbasch-Vogan et d'Arthur	38
11. Démonstration du théorème 6.12	39
12. Quelques compléments	43
Références	47

1. Introduction

Soit G un groupe classique complexe. Le but de cet article est de décrire de manière aussi explicite que possible les représentations irréductibles de G (ou plus exactement, les modules de Harish-Chandra) qui sont composantes locales d'une représentation automorphe de carré intégrable. Plus précisément, soit F un corps de nombre, et l'on suppose qu'il existe une place archimédienne v_0 de F telle que F_{v_0} soit isomorphe à \mathbb{C} . Soit \mathbf{G} un groupe algébrique réductif défini sur F , que l'on suppose déployé, et tel que G soit isomorphe à $\mathbf{G}(F_{v_0})$. Les représentations automorphes de carré intégrable de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ sont les sous-représentations irréductibles de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ dans $L^2(\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_F))$. Dans [Art13], J. Arthur décrit ces représentations. Il montre que leurs composantes locales en une place v se regroupent en "paquets" associés à certains homomorphismes $\psi_v : W_{F_v} \rightarrow {}^L G$ du groupe de Weil (ou de Weil-Deligne pour les places non-archimédiennes) W_{F_v} vers le L -groupe ${}^L G$. Lorsqu'on fixe un tel homomorphisme $\psi_v : W_{F_v} \rightarrow {}^L G$, c'est-à-dire un paramètre d'Arthur, les représentations qui lui sont associées, et qui forment le "paquet d'Arthur" noté $\Pi(\psi_v, \mathbf{G}(F_v))$, sont déterminées par des propriétés locales.

Les homomorphismes ψ_v sont conjecturalement les localisations d'un homomorphisme global ψ dont la définition précise est encore lointaine, car elle suppose d'avoir montré que la catégorie des représentations automorphes isobariques des groupes \mathbf{GL}_N possède une structure de type tannakien qui ne semble pas accessible pour l'instant (cf. [Lan79]). Mais Arthur en a donné un substitut commode en remplaçant les homomorphismes du groupe tannakien conjectural vers ${}^L G$ par les classes d'isomorphie de représentations automorphes cuspidales des groupes \mathbf{GL}_N . On peut localiser ces paramètres globaux et les paquets locaux ne dépendent que de cette localisation. D'autre part, une représentation π_v est dans le paquet local associé à ψ_v s'il existe une représentation automorphe de carré intégrable, associée à un paramètre global ψ dont la composante locale en v est ψ_v , et qui admet π_v comme composante locale en v . Le paramètre global se lit sur ce qui se passe aux places non ramifiées et est donc caractérisé de manière extrêmement simple. Cette présentation sommaire ne donne bien sûr qu'un aperçu des résultats de [Art13]. Pour en dire un peu plus, précisons qu'à chaque caractère η du groupe des composantes connexes du centralisateur de ψ_v dans ${}^L G$, Arthur associe une somme directe X_η (avec éventuellement des multiplicités et qui peut-être nulle) de représentations irréductibles de $\mathbf{G}(F_v)$ et il écrit une formule de multiplicité globale qui fait intervenir ces caractères locaux. Les représentations X_η sont uniquement déterminées par des propriétés de transfert endoscopique expliquées en [Art13] 2.2.1 (b) et 1.5.1.

Revenons maintenant à notre place complexe v_0 telle que G soit isomorphe à $\mathbf{G}(F_{v_0})$, et abandonnons l'indice v_0 pour les paramètres d'Arthur : $\psi : W_{\mathbb{C}} \rightarrow {}^L G$. Rappelons que $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$. Dans ce travail, nous déterminons donc les représentations associées à un tel paramètre ψ , et en s'appuyant fortement sur les travaux de Barbasch et Vogan [BV85] et de Barbasch [Bar89]. En fait on démontre que le cas général se ramène par une induction irréductible explicite au cas traité en [BV85] appelé le cas spécial unipotent. Nous montrons au passage que pour ψ fixé, les représentations associées à un tel caractère η sont disjointes les unes des autres; de plus elles sont irréductibles ou nulles ce qui est très particulier aux places complexes.

Pour décrire un peu plus précisément nos résultats, introduisons, comme ci-dessus, le morphisme de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ dans ${}^L G$ qui paramétrise les constructions de [Art13] (cf. définition 3.5 dans le texte). En voyant ψ comme une représentation de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, on vérifie aisément l'existence d'une décomposition de ψ (cf.(6.3) dans le texte) sous la forme $\rho \oplus \rho^* \oplus \psi_{u,bp}$, où ρ est une représentation dont ρ^* est duale, où $\psi_{u,bp}$ est caractérisé par le fait que sa restriction à $W_{\mathbb{C}}$ est triviale et l'orbite unipotente définie par sa restriction aux éléments unipotents principaux de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ a des blocs de Jordan tous de même parité (paire si ${}^L G$ est un groupe symplectique et impaire sinon). D'autre part $\psi_{u,bp}$ est maximal avec ces propriétés. On note $m_{u,bp}$ la dimension de la représentation $\psi_{u,bp}$ et $G_{u,bp}$ le groupe de même type que G mais de rang $\lfloor m_{u,bp}/2 \rfloor$. Alors [BV85] associe à $G_{u,bp}$ et $\psi_{u,bp}$ un ensemble de représentations à l'aide de

formules de caractères. D’autre part la classification de Langlands associe à ρ une représentation irréductible de $\mathbf{GL}_d(\mathbb{C})$, notée τ , où d est la dimension de la représentation ρ . Nous montrons que les représentations associées par Arthur à ψ sont exactement les représentations induites de $\tau \otimes X_{u,bp}$ pour le parabolique maximal $\mathbf{GL}_d(\mathbb{C}) \times G_{u,bp}$ de G ou $X_{u,bp}$ parcourt l’ensemble des représentations associées par [BV85] à $\psi_{u,bp}$. On va même plus loin dans les paramétrisations: [BV85] paramétrise les représentations qu’ils construisent par les caractères du quotient de Lusztig du groupe des composantes connexes du centralisateur de $\psi_{u,bp}$ dans ${}^L G_{u,bp}$; avec le résultat précédent on a donc une paramétrisation des représentations associées par [Art13] à ψ et nous montrons que cette paramétrisation coïncide avec celle de [Art13]. Les propriétés d’irréductibilité sont tirées de [Bar89] et l’identification des constructions de [BV85] avec celles de [Art13] résulte des formules de transfert endoscopique. Pour éviter de devoir démontrer la formule de transfert endoscopique tordue qui n’est pas dans [BV85], on utilise un résultat tiré de [Mœg] rappelé dans la remarque 3.6 ci-dessous.

Le cas des groupes complexes est intéressant car il illustre des phénomènes pouvant paraître surprenants. Par exemple sur \mathbb{C} , la notion de stabilité est triviale : toutes les distributions invariantes sur G sont stablement invariantes, et c’est le cas en particulier des caractères des représentations irréductibles. On pourrait en conclure trop rapidement que, à l’instar de ce qui se passe pour les groupes \mathbf{GL}_N , les paquets d’Arthur sont des singletons. Mais ceci n’est pas vrai en général, car il faut aussi qu’une autre propriété fondamentale soit satisfaite, à savoir la compatibilité des constructions d’Arthur avec l’induction parabolique. Plus précisément, il s’agit du fait que les X_η sont caractérisés par des propriétés de transfert endoscopique et que le transfert endoscopique commute à l’induction. Or certaines induites ne sont pas irréductibles, ceci est manifeste dans [BV85] et, comme on vient de le voir, se traduit par le fait que les paquets ne sont pas des singletons. Ces paquets ne sont pas disjoints en général, et l’on peut même voir apparaître le cas où un paquet associé à un paramètre ψ est entièrement contenu dans un paquet associé à un autre paramètre ψ' . Ce phénomène, dans le cas des groupes complexes, est uniquement lié au fait (déjà remarqué par Barbasch et Trapa) que dans les paramétrisations interviennent des orbites non spéciales, au sens de Lusztig-Spaltenstein. On renvoie le lecteur à 12.5 pour une description du résultat qui est quand même assez technique.

Donnons un aperçu du contenu de cet article. La deuxième section introduit les notations et quelques résultats généraux sur les groupes complexes généraux et leurs représentations (c’est-à-dire en fait des modules de Harish-Chandra). La troisième section rappelle les définitions des paramètres de Langlands et d’Arthur, et la paramétrisation de Langlands. On y donne aussi les propriétés conjecturales des paquets d’Arthur. La quatrième section est consacrée aux groupes linéaires, qui apparaissent ici pour deux raisons. La première mentionnée ci-dessus est que les groupes classiques considérés apparaissent comme groupes endoscopiques tordus de groupes $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$. En particulier, si $\mathbf{Std}_G : {}^L G \rightarrow \mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ est la représentation standard du groupe dual ${}^L G$, et si ψ_G est un paramètre d’Arthur pour G , alors $\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G$ est un paramètre d’Arthur pour $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ et les représentations du paquet $\Pi(\psi_G, G)$ sont reliées à la représentation de $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ déterminée par ψ par une identité endoscopique (pour $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$, les paquets d’Arthur sont des singletons parfaitement déterminés). La décomposition en représentations irréductibles de ψ vue comme représentation de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ joue un rôle crucial dans notre étude, en particulier par des arguments de réduction à certain types de paramètres. La deuxième façon d’intervenir des groupes généraux linéaires est que les sous-groupes de Levi des groupes classiques sont isomorphes à des produits d’un groupe classique de même type, et de facteurs \mathbf{GL} .

Dans la cinquième section, nous introduisons les groupes classiques considérés et nous rappelons quelques résultats bien connus, le plus important pour nous étant le lemme 5.3, donnant des renseignements sur les composantes des induites paraboliques. Ce résultat fait appel à la définition de certains invariants des représentations que nous appelons de manière un peu abusive “exposants”, invariants qui remplaceront les K -types dans certains arguments de

Barbasch-Vogan et Barbasch et les rendront peut-être plus accessibles à certains lecteurs. La sixième section explique comment on se ramène de l'étude des paquets d'Arthur généraux à ceux qui sont unipotents, et de "bonne parité". Les paquets unipotents sont ceux dont le paramètre est trivial sur le premier facteur de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$. Ils sont paramétrés par les orbites nilpotentes dans l'algèbre de Lie du groupe dual. Certains arguments de la réduction utilisent des résultats sur les paquets unipotents de bonne parité, et la démonstration devra donc attendre la section 11. Ces résultats sont tous tirés entièrement des travaux de Barbasch-Vogan [BV85] et surtout [Bar89]. Néanmoins, comme il s'agit là de résultats importants et que l'article de Barbasch est beaucoup plus général que ce dont on a besoin ici, nous en donnons une démonstration légèrement différente et simplifiée. La principale différence avec la démonstration de Barbasch est que nous allons utiliser des arguments d'irréductibilité basés sur l'analyse des exposants (cf. définition 5.2) plutôt que sur les K -types minimaux. Notre situation est aussi moins générale, ce qui permet certaines simplifications.

Lorsque le paramètre d'Arthur ψ_G est unipotent, c'est-à-dire trivial sur $W_{\mathbb{C}}$, sa donnée est équivalente via la théorie de Jacobson-Morozov à la donnée d'une orbite nilpotente \mathcal{U} dans l'algèbre de Lie ${}^L\mathfrak{g}$ du groupe dual ${}^L G$. Lorsque \mathcal{U} est une orbite nilpotente spéciale paire, Barbasch et Vogan ont proposés antérieurement à Arthur, une définition d'un paquet que nous notons $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ possédant certaines des propriétés voulues (la principale qui manque pour les identifier immédiatement aux paquets définis par Arthur est celle concernant l'endoscopie tordue vers $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$). Barbasch et Vogan caractérisent les représentations dans $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ par des conditions portant sur le caractère infinitésimal (il doit être donné par l'élément semi-simple d'un \mathfrak{sl}_2 -triplet associé à l'orbite \mathcal{U}) et le front d'onde (il doit être égal à l'adhérence de l'orbite duale de \mathcal{U} au sens de Lusztig et Spaltenstein). La septième section rappelle la description faite par Barbasch [Bar89] des paquets de Barbasch-Vogan attachés à une telle orbite \mathcal{U} spéciale paire : tout caractère η de $A(\mathcal{U}) = A(\psi)$ détermine une représentation irréductible X_{η}^{BV} de G si η se factorise par le quotient de Lusztig $\bar{A}(\mathcal{U})$ du groupe $A(\mathcal{U})$. Si η ne se factorise pas de la sorte, on pose $X_{\eta}^{BV} = 0$.

Dans la huitième section, nous énonçons des résultats qui réduisent la description de certains paquets de Barbasch-Vogan à celle de paquets attachés à des groupes plus petits, ce qui permettra de raisonner par récurrence dans certaines démonstrations. Dans la neuvième section, nous énonçons des propriétés des exposants des représentations dans les paquets de Barbasch-Vogan. Le résultat principal de cet article apparaît dans la dixième section. Il affirme que les paquets unipotents définis par Arthur et ceux définis par Barbasch-Vogan en [BV85] coïncident. Il y a deux points clefs dans la démonstration de ce fait. Le premier est que l'une et l'autre des constructions donnent des les mêmes formules de transfert pour l'endoscopie ordinaire. Ces formules sont constitutives de la construction des paquets chez Arthur, et c'est la proposition 12. 4 chez Barbasch-Vogan. L'autre point clef est le fait que les représentations X_{η} attachées aux caractères η comme ci-dessus sont ici irréductibles ou nulles, par définition chez Barbasch-Vogan, et par les résultats de [Mœg] pour celles définies par Arthur (cf. remarque 3.6).

Dans la onzième section, nous donnons la démonstration des résultats d'irréductibilité d'induites énoncés dans la section 6. Comme corollaire, nous en déduisons le fait que lorsque le caractère infinitésimal est régulier, le paquet d'Arthur est un singleton (il est égal au paquet de Langlands qu'il contient naturellement).

Dans la douzième section, nous donnons quelques compléments en particulier le calcul du front d'onde des représentations étudiées. Le résultat est étonnamment simple; on introduit comme ci-dessus l'orbite nilpotente de ${}^L\mathfrak{g}$ définie par la restriction de ψ à $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ sans rien supposer sur la restriction de ψ à $W_{\mathbb{C}}$. Alors le front d'onde des représentations associées à ψ est exactement la fermeture du dual (au sens de Lusztig-Spaltenstein) de cette orbite. Nous montrons aussi que les représentations dans un paquet d'Arthur sont stables par toute involution complexe (il y a une restriction pour les groupes $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ où nous nous limitons à un cas particulier important). Finalement nous étudions les intersections entre paquets.

Signalons aussi que nous avons ajouté à la liste des groupes classiques étudiés par Arthur les groupes métaplectiques. En effet, ils se comportent exactement comme les groupes classiques et nous anticipons la généralisation à ces groupes de la théorie d'Arthur, anticipation justifiée par les progrès faits par Wen Wei Li sur la stabilisation de la formule des traces. Il se développe en ce moment un programme d'Arthur-Langlands très sophistiqué pour les groupes non linéaires tels que le groupe métaplectique ([Wei], [GF]), mais pour les groupes métaplectiques complexes, beaucoup résultats font partie du folklore depuis quelques temps déjà. En effet le groupe métaplectique $\mathbf{Mp}_{2n}(\mathbb{C})$ est une extension scindée du groupe symplectique $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, mais son L -groupe est $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ plutôt que $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$. Pour tout ce qui concerne la théorie des représentations spécifiques de cette extension, on se ramène donc trivialement au groupe symplectique, mais pour tout ce qui concerne les constructions attachées au groupe dual, les résultats vont être différents - paramètres et paquets d'Arthur par exemple. Les paquets d'Arthur pour le groupe métaplectique sont définis via la correspondance de Howe entre groupes métaplectiques et groupes orthogonaux impairs ([Mœg]). Ceci est fait en utilisant une construction globale et demandant simplement que les représentations des paquets d'Arthur pour le groupe métaplectique soient la composante locale d'une forme automorphe de carré intégrable dont presque partout on a une représentation non ramifiée prescrite. Le cas des paramètres unipotents est aussi considéré de façon implicite (c'est-à-dire sans mentionner le groupe dual) dans [Bar89] et [Bar], où il est remarqué que les résultats de [BV85] s'étendent aux groupes métaplectiques. D'autre part, les résultats d'irréductibilité d'induites paraboliques utilisés pour la réduction des paramètres généraux aux paramètres unipotents de bonne parité dans la section 6 sont aussi valables. Mais la façon ad hoc de définir les paquets par la correspondance de Howe, c'est-à-dire sans les caractériser par des propriétés de transfert endoscopiques, empêche de vérifier aisément que la définition se comporte bien par induction.

Nous remercions J. Adams et D. Vogan pour l'aide qu'ils nous ont apportée en répondant rapidement et précisément à nos questions. La première auteure remercie aussi l'ESI et en particulier J. Schwermer et S. Kudla pour les excellentes conditions de travail fournies au printemps 2015 lors de la période spéciale qu'ils y ont organisée et où ce travail a été commencé.

2. Notations et généralités sur les groupes complexes et leurs représentations

2.1. Groupes complexes. — On note $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ le groupe de Galois de \mathbb{C} sur \mathbb{R} et σ son élément non trivial. Soient \mathbf{G} un groupe algébrique connexe réductif défini sur \mathbb{C} et $G = \mathbf{G}(\mathbb{C})$ le groupe de ses points complexes. On fixe un sous groupe compact maximal K de G , et on note σ_c l'involution antiholomorphe de G dont le groupe des points fixes est K . On fixe aussi une paire de Borel (B, H) de G , où l'on suppose que le tore maximal H est σ_c -stable. On note $H = TA$ sa décomposition de Cartan.

Soient \mathfrak{g} , \mathfrak{b} , \mathfrak{h} , \mathfrak{t} et \mathfrak{a} les algèbres de Lie de G , B , H , T et A respectivement (les trois premières sont des algèbres de Lie complexes, les deux dernières réelles). Leur complexification respective s'écrivent :

$$(2.1) \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$$

$$(2.2) \quad \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \{(H, -H) \mid H \in \mathfrak{h}\}, \quad \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \{(H, H) \mid H \in \mathfrak{h}\}.$$

Soient $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} et R^+ le système des racines positives relativement à \mathfrak{b} . Le système de racine $R_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est alors

$$(2.3) \quad R_{\mathbb{C}} = \{(\alpha, 0), \alpha \in R\} \amalg \{(0, \alpha), \alpha \in R\}.$$

L'action de $\sigma \in \Gamma$ sur $R_{\mathbb{C}}$ est donnée par $\sigma \cdot ((\alpha, 0)) = (0, \alpha)$. Ceci montre que la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est stable sous l'action de σ . Le système de racines positives

$$(2.4) \quad R_{\mathbb{C}}^+ = \{(\alpha, 0), \alpha \in R^+\} \coprod \{(0, \alpha), \alpha \in R^+\}$$

est celui défini par cette sous-algèbre de Borel. On note W le groupe de Weyl de R et l'on identifie celui de $R_{\mathbb{C}}$ à $W \times W$.

La donnée radicielle associée à G est le quadruplet $(X^*(H), \Delta, X_*(H), \Delta^\vee)$, où $X^*(H)$ est le groupe des caractères algébriques de H , $X_*(H)$ celui des cocaractères et Δ^\vee l'ensemble des coracines simples.

2.2. Représentations irréductibles des groupes complexes. — Nous reprenons les notations de la section précédente pour un groupe complexe $G = \mathbf{G}(\mathbb{C})$. Soient $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ tels que $\lambda - \mu$ est un poids d'une représentation holomorphe de dimension finie de G (c'est-à-dire $\lambda - \mu \in X^*(H)$). Définissons un caractère $\mathbb{C}_{\lambda, \mu}$ de H par

$$(2.5) \quad \mathbb{C}_{\lambda, \mu|T} = \mathbb{C}_{\lambda - \mu}, \quad \mathbb{C}_{\lambda, \mu|A} = \mathbb{C}_{\lambda + \mu}.$$

On étend $\mathbb{C}_{\lambda, \mu}$ en un caractère de B et l'on pose

$$(2.6) \quad X(\lambda, \mu) = \text{Ind}_B^G(\mathbb{C}_{\lambda, \mu}).$$

L'induction est ici l'induction parabolique infinitésimale (i.e. l'induite et l'induisante sont des modules de Harish-Chandra), et normalisée, (voir la section XI.2 de [KV95]). Le module $X(\lambda, \mu)$ est la série principale de paramètre (λ, μ) et l'on note

$$(2.7) \quad \bar{X}(\lambda, \mu)$$

son unique sous-quotient irréductible contenant le K -type de poids extrémal $\lambda - \mu$.

On a alors le résultat de classification suivant, dû à Zhelobenko :

Proposition 2.1. — Soient $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathfrak{h}^*$ tels que $\lambda - \mu$ et $\lambda' - \mu'$ soient des poids d'une représentation holomorphe de dimension finie de G . Alors il y a équivalence entre

- (a) $X(\lambda, \mu)$ et $X(\lambda', \mu')$ ont mêmes facteurs de composition avec mêmes multiplicités,
- (b) $\bar{X}(\lambda, \mu) \simeq \bar{X}(\lambda', \mu')$,
- (c) il existe $w \in W$ tel que $w \cdot (\lambda, \mu) = (\lambda', \mu')$.

De plus, tout (\mathfrak{g}, K) -module irréductible est équivalent à un $\bar{X}(\lambda, \mu)$.

Le module $\bar{X}(\lambda, \mu)$ est le sous-quotient de Langlands de $X(\lambda, \mu)$. Il apparaît comme quotient, ou comme sous-représentation, lorsque (λ, μ) possède les propriétés de positivité ou négativité requises (par rapport à B) et que nous n'explicitons pas ici. On peut toujours trouver $w \in W$ tel que $\bar{X}(\lambda, \mu) \simeq \bar{X}(w \cdot \lambda, w \cdot \mu)$ soit un quotient (resp. un sous-module) de $X(w \cdot \lambda, w \cdot \mu)$.

2.3. Caractère infinitésimal. — Soit $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Comme $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Notons $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ le centre de cette algèbre enveloppante et $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre symétrique sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On a $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = S(\mathfrak{g}) \times S(\mathfrak{g})$ et

$$(2.8) \quad \gamma_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^{W \times W} = S(\mathfrak{h})^W \otimes S(\mathfrak{h})^W$$

est l'isomorphisme de Harish-Chandra. Via cet isomorphisme, les caractères de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ sont paramétrés par les couples $(\lambda, \mu) \in \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$, deux caractères, paramétrés respectivement par (λ, μ) et (λ', μ') étant égaux si et seulement s'ils sont conjugués par $W \times W$.

Si un (\mathfrak{g}, K) -module X admet un caractère infinitésimal paramétré par $(\lambda, \mu) \in \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$, on dira simplement que X a pour caractère infinitésimal (λ, μ) .

Remarques 2.2. — (a) Les choses étant bien faites, le caractère infinitésimal de $X(\lambda, \mu)$ (et donc de $\bar{X}(\lambda, \mu)$) est (λ, μ) .

- (b) Il découle de la classification de Zhelobenko que si le (\mathfrak{g}, K) -module X a pour caractère infinitésimal (λ, μ) , alors il existe $w \in W$ tel que $\lambda - w \cdot \mu \in X^*(H)$.

2.4. Un résultat sur les induites paraboliques. — On continue avec les mêmes notations que dans les sections précédentes.

Lemme 2.3. — *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M et de radical unipotent N . On suppose que M contient le tore maximal H . Soient $X^M(\lambda, \mu)$ une représentation de la série principale de M et $\bar{X}^M(\lambda, \mu)$ son sous-quotient de Langlands comme en (2.7).*

(i) $\text{Ind}_P^G(X^M(\lambda, \mu)) = X(\lambda, \mu)$, la série principale de G de paramètre (λ, μ) .

(ii) $\text{Ind}_P^G(\bar{X}^M(\lambda, \mu))$ contient $\bar{X}(\lambda, \mu)$, comme sous-quotient.

(iii) Si $\text{Ind}_P^G(\bar{X}^M(\lambda, \mu))$ est réductible, alors elle contient un sous-quotient $\bar{X}(\lambda, s_\alpha \cdot \mu)$ où α est une racine de H dans N telle que $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle$ et $\langle \check{\alpha}, \mu \rangle$ sont des entiers non nuls de même signe et $s_\alpha \in W$ est la réflexion par rapport à cette racine.

Démonstration. Le premier point est immédiat par transitivité de l'induction parabolique. Le second en découle car l'induite contient le K -type de poids extrémal $\lambda - \mu$. Le troisième point est dû à Zhelobenko [Zhe74]. \square

3. Paramètres de Langlands et d'Arthur

3.1. Paramètre de Langlands. — Le groupe de Weil de \mathbb{C} est $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$.

Soit \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe défini sur \mathbb{C} , et l'on adopte les mêmes notations qu'en 2.1. Soit ${}^L G$ son dual de Langlands. Il s'agit ici du groupe complexe connexe déterminé par la donnée radicielle duale, c'est-à-dire que l'on suppose fixé une paire de Borel $(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ de ${}^L G$ avec les identifications $X_*(\mathcal{H}) = X^*(H)$, $X^*(\mathcal{H}) = X_*(H)$.

Définition 3.1. — Un paramètre de Langlands est un morphisme continu:

$$\phi : W_{\mathbb{C}} \rightarrow {}^L G$$

tel que ϕ a pour image des éléments semi-simples de ${}^L G$.

Le groupe ${}^L G$ agit par conjugaison sur l'ensemble des paramètres de Langlands, et l'on note $\Phi(G)$ l'ensemble de ces classes de conjugaison.

Nous commettrons fréquemment l'abus de langage consistant à ne pas distinguer entre un paramètre de Langlands et l'élément de $\Phi(G)$ qu'il définit.

Soit $\phi : W_{\mathbb{C}} \rightarrow {}^L G$ un paramètre de Langlands. A conjugaison près, on peut supposer que l'image de ϕ est contenue dans le tore \mathcal{H} . On peut donc écrire

$$(3.1) \quad \phi(z) = z^\lambda \bar{z}^\mu, \quad (z \in \mathbb{C}^\times).$$

où λ, μ sont dans $X_*(\mathcal{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = X^*(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathfrak{h}^*$ et $\lambda - \mu \in X^*(H)$. Notons $\phi = \phi_{\lambda, \mu}$ le paramètre de Langlands défini par (3.1).

Le résultat suivant, élémentaire, est le pendant de la proposition 2.1.

Proposition 3.2. — *Soient $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathfrak{h}^*$ tels que $\lambda - \mu$ et $\lambda' - \mu'$ soient dans $X^*(H)$. Alors $\phi = \phi_{\lambda, \mu}$ et $\phi = \phi_{\lambda', \mu'}$ sont équivalents si et seulement s'il existe $w \in W$ tel que $w \cdot (\lambda, \mu) = (\lambda', \mu')$. De plus tout paramètre de Langlands $\phi : W_{\mathbb{C}} \rightarrow {}^L G$ est conjugué à un $\phi_{\lambda, \mu}$.*

On peut donc reformuler la classification des (\mathfrak{g}, K) -modules irréductibles de la proposition 2.1.

Corollaire 3.3. — *La correspondance $\phi_{\lambda, \mu} \leftrightarrow \bar{X}(\lambda, \mu)$ induit une bijection entre $\Phi(G)$ et l'ensemble des classes d'isomorphie de (\mathfrak{g}, K) -modules irréductibles.*

Remarque 3.4. — Les paquets de Langlands pour les groupes complexes sont des singletons.

3.2. Paramètres d'Arthur. — Les notations sont les mêmes que dans la section précédente.

Définition 3.5. — Un paramètre d'Arthur pour G est un morphisme de groupes continu

$$\psi : W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G$$

tel que

- (i) la restriction de ψ à $W_{\mathbb{C}}$ est un paramètre de Langlands tempéré,
- (ii) la restriction de ψ à $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ est algébrique.

Dans (i), rappelons que le paramètre de Langlands ψ est dit tempéré s'il est d'image bornée. Avec les notations de (3.1), ceci est équivalent au fait que $\lambda + \mu \in X^*(H) \otimes_{\mathbb{Z}} i\mathbb{R}$.

Le groupe ${}^L G$ agit par conjugaison sur l'ensemble des paramètres d'Arthur, et l'on note $\Psi(G)$ l'ensemble de ces classes de conjugaison.

A tout paramètre d'Arthur ψ , on associe un paramètre de Langlands

$$(3.2) \quad \phi_{\psi} : W_{\mathbb{C}} \longrightarrow {}^L G, \quad z \mapsto \psi\left(z, \begin{pmatrix} (z\bar{z})^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (z\bar{z})^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\right).$$

Soit $\psi : W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G$ un paramètre d'Arthur. A conjugaison près, on peut supposer que sa restriction à \mathbb{C}^{\times} est donnée par :

$$(3.3) \quad \psi(z) = z^{\lambda} \bar{z}^{\mu}, \quad (z \in \mathbb{C}^{\times}).$$

avec $\lambda - \mu \in X^*(H)$. La condition de tempérance (i) dans la définition des paramètres d'Arthur nous donne en plus que $\lambda + \mu \in \mathfrak{t}^*$. Ici, on voit \mathfrak{t}^* comme le sous-espace réel de \mathfrak{h}^* des formes linéaires qui prennent des valeurs réelles sur \mathfrak{t} . De même, on voit \mathfrak{a}^* comme le sous-espace réel de \mathfrak{h}^* des formes linéaires qui prennent des valeurs réelles sur \mathfrak{a} , de sorte que $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{a}^*$ avec $i\mathfrak{a}^* = \mathfrak{t}^*$.

La restriction de ψ à $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ est un morphisme algébrique. Notons

$$(3.4) \quad \bar{\psi} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L \mathfrak{g}$$

sa différentielle en l'identité (${}^L \mathfrak{g}$ est bien sûr l'algèbre de Lie de ${}^L G$), et

$$(3.5) \quad h_{\psi} = \bar{\psi}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right), \quad e_{\psi} = \bar{\psi}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

L'orbite (nilpotente) de e_{ψ} dans ${}^L \mathfrak{g}$ sous l'action adjointe de ${}^L G$ est notée \mathcal{U}_{ψ} . Comme l'image de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ et celle de \mathbb{C}^{\times} par ψ commutent dans ${}^L G$, on peut aussi supposer à conjugaison près que h_{ψ} est dans l'algèbre de Lie de \mathcal{H} (que l'on identifie à \mathfrak{h}^*). On obtient alors que ϕ_{ψ} est donné par

$$(3.6) \quad \phi_{\psi}(z) = z^{\lambda + \frac{1}{2}h_{\psi}} \bar{z}^{\mu + \frac{1}{2}h_{\psi}}.$$

Le caractère infinitésimal attaché à ψ est :

$$(3.7) \quad \left(\lambda + \frac{1}{2}h_{\psi}, \mu + \frac{1}{2}h_{\psi}\right).$$

En particulier, les éléments de ce paquet sont de la forme

$$(3.8) \quad \bar{X}\left(\lambda + \frac{1}{2}h_{\psi}, w \cdot \left(\mu + \frac{1}{2}h_{\psi}\right)\right).$$

pour des éléments $w \in W$ vérifiant

$$(3.9) \quad \lambda + \frac{1}{2}h_{\psi} - w \cdot \left(\mu + \frac{1}{2}h_{\psi}\right) \in X^*(H).$$

3.3. Paquets d'Arthur. — Dans [Art84], [Art89], J. Arthur conjecture l'existence de paquets $\Pi(\psi, G)$ attachés aux paramètres $\psi \in \Psi(G)$, devant posséder certaines propriétés. Parmi les principales, citons le fait que les $\Pi(\psi, G)$ sont finis, constitués de (classes d'équivalence de) représentations *unitaires*, ayant toutes le même caractère infinitésimal, donné par (3.7). Le paquet d'Arthur $\Pi(\psi, G)$ contient le paquet de Langlands $\Pi(\phi_\psi, G)$ (c'est-à-dire la représentation $\bar{X}(\lambda + \frac{1}{2}h_\psi, \mu + \frac{1}{2}h_\psi)$). Ils doivent satisfaire les identités de caractères attendues dans la théorie de l'endoscopie (standard et tordue); c'est ce qui est appelé le *transfert spectral*. En revanche, ces paquets ne sont pas disjoints, et ne sont pas des réunions de L -paquets. Comme nous l'avons déjà remarqué, pour les groupes complexes la notion de conjugaison stable est triviale (c'est la conjugaison ordinaire), et ne donne donc aucune contrainte sur les paquets.

Arthur énonce ses conjectures pour des groupes définis sur un corps local F quelconque (remplacer $W_{\mathbb{C}}$ par le groupe de Weil-Deligne W_F). Dans [ABV92], pour un corps F local archimédien, des paquets $\Pi^{ABV}(\psi, G)$ possédant les propriétés voulues, à l'exception, malheureusement, de la compatibilité à l'endoscopie tordue sont définis par des méthodes géométriques puissantes. C'est une conjecture raisonnable de dire que les constructions de [ABV92] coïncident avec celle de [Art13] dans le cas "particulier" de [Art13]. Antérieurement, pour $F \simeq \mathbb{C}$, Barbasch et Vogan ont défini dans [BV85] des paquets attachés aux paramètres unipotents (c'est à dire ceux dont la restriction à \mathbb{C}^\times est triviale) attachés par la théorie de Jacobson-Morosov à une orbite nilpotente spéciale paire. Ensemblistement les constructions sont, dans ce cas particulier des paramètres unipotents, les mêmes d'après [ABV92] chapitre 27. Nous reviendrons sur la description de ces constructions qui sont fondamentales pour ce que nous faisons ici.

Dans [Art13], J. Arthur donne une définition des paquets $\Pi(\psi, G)$ lorsque G est un groupe classique. Donnons quelques précisions au sujet de ces paquets. Soit ψ un paramètre d'Arthur pour le groupe G . Soit S_ψ le centralisateur de l'image de ψ dans ${}^L G$ et S_ψ^0 sa composante connexe neutre. On pose

$$(3.10) \quad A(\psi) = S_\psi / S_\psi^0 Z({}^L G).$$

Pour les groupes complexes classiques, les groupes $A(\psi)$ sont abéliens, ce sont des produits de facteurs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous ne considérerons que ce cas dans la suite. Notons $\widehat{A(\psi)}$ le groupe des caractères de $A(\psi)$. Arthur définit une application :

$$(3.11) \quad \eta \in \widehat{A(\psi)} \mapsto X_\eta$$

où X_η est représentation semi-simple de longueur finie de G (éventuellement avec des multiplicités), ou bien $\{0\}$. Ces représentations sont uniquement définies par les relations suivantes.

Pour tout $s \in A(\psi)$, on considère la représentation virtuelle

$$(3.12) \quad X_\psi^s = \sum_{\eta \in \widehat{A(\psi)}} \eta(s_\psi s) X_\eta$$

où s_ψ est l'image dans $A(\psi)$ de l'élément $\psi((1, -\text{Id}))$, $(1, -\text{Id}) \in W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$. Ce sont ces représentations virtuelles qui apparaissent dans les identités de transfert endoscopiques qui caractérisent les X_η . Lorsque $s = 1$, (3.12) est la représentation stable attachée au paquet ψ . On la note X_ψ^{st} :

$$(3.13) \quad X_\psi^{st} = \sum_{\eta \in \widehat{A(\psi)}} \eta(s_\psi) X_\eta$$

Le paquet $\Pi(\psi, G)$ est alors l'ensemble des représentations irréductibles de G qui apparaissent dans les X_η , lorsque η décrit $\widehat{A(\psi)}$. Et à chaque élément de $\Pi(\psi, G)$ est associée une représentation du groupe $A(\psi)$:

$$(3.14) \quad \bar{X} \in \Pi(\psi, G) \mapsto \rho_{\bar{X}}^A$$

qui attache à tout élément d'un paquet $\Pi(\psi, G)$ une représentation de dimension finie du groupe $A(\psi)$. Notons ceci $\bar{X} \mapsto \rho_{\bar{X}}^A$, de sorte que pour tout $s \in A(\psi)$,

$$(3.15) \quad \mathrm{Tr}(\rho_{\bar{X}}^A(s)) = \sum_{\eta \in \widehat{A(\psi)}} m(\bar{X}, X_\eta) \eta(s),$$

où $m(\bar{X}, X_\eta)$ désigne la multiplicité de \bar{X} dans X_η . On peut alors réécrire les représentations virtuelles X_ψ^s sous la forme

$$(3.16) \quad X_\psi^s = \sum_{\bar{X} \in \Pi(\psi, G)} \mathrm{Tr}(\rho_{\bar{X}}^A(s_\psi s)) \bar{X}.$$

Remarque 3.6. — Pour les groupes classiques complexes ou réels, et les paramètres ψ unipotents, il est démontré dans [Mœg] que les multiplicités $m(\bar{X}, X_\eta)$ sont 0 ou 1 et plus généralement que les représentations $\rho_{\bar{X}}^A$ sont irréductibles. Ce qui est propre au cas des groupes complexes, c'est le fait aussi démontré dans *loc. cit.* que pour tout $\eta \in \widehat{A(\psi)}$, les X_η définis ci-dessus sont des représentations irréductibles ou nulles, c'est-à-dire que l'application qui à $\bar{X} \in \Pi(\psi, G)$ associe le caractère $\rho_{\bar{X}}^A$ est injective. Cette dernière propriété n'est pas vraie pour les groupes classiques réels.

La première partie de la remarque est un des points clé de la démonstration du théorème 10.1 et dans cet article on généralise toute la remarque à tout paramètre ψ .

4. \mathbf{GL}_N

4.1. $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$. — Soit N un entier positif. Dans cette section, on s'intéresse au cas du groupe algébrique $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_N$ défini sur \mathbb{C} . Avec les notations de la section 2.1, on prend $\sigma_c : g \mapsto {}^t \bar{g}^{-1}$ et on fixe l'épinglage usuel $\mathbf{spl} = (\mathbf{B}_d, \mathbf{H}_d, \{X_\alpha\}_\alpha)$ où \mathbf{B}_d est le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures, \mathbf{H}_d est le tore diagonal et X_α est un vecteur radiciel pour une racine simple α du système de racines positives de \mathbf{H}_d dans \mathbf{GL}_N . Les sous-groupes de Levi et les sous-groupes paraboliques standard de G_N sont définis relativement à $(\mathbf{H}_d, \mathbf{B}_d)$.

Via l'isomorphisme d'Harish-Chandra, un caractère infinitésimal pour $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ est donné par un couple (λ, μ) d'élément de \mathfrak{h}_d^* . En identifiant naturellement \mathfrak{h}_d , la sous-algèbre des matrices diagonales de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ à \mathbb{C}^N , et de même pour son dual \mathfrak{h}_d^* , un caractère infinitésimal est alors donné par un élément

$$(4.1) \quad (\lambda, \mu) = ((\lambda_1, \dots, \lambda_N), (\mu_1, \dots, \mu_N)) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N,$$

où plutôt par une orbite de tels éléments sous l'action du groupe de Weyl, ici identifié au groupe $\mathfrak{S}_N \times \mathfrak{S}_N$. Un tel caractère infinitésimal est entier si les $\lambda_i - \lambda_j$ et les $\mu_i - \mu_j$ sont entiers, et régulier si les λ_i sont distincts, ainsi que les μ_i .

Soit $N_1, \dots, N_r \in \mathbb{N}^\times$ tels que $\sum_{i=1}^r N_i = N$. Le sous-groupe $M = M_{N_1, \dots, N_r}$ des matrices diagonales par blocs de taille respective N_1, \dots, N_r , isomorphe à $\mathbf{GL}_{N_1}(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_{N_2}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathbf{GL}_{N_r}(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de Levi standard de $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$, et le sous-groupe parabolique $P = P_{N_1, \dots, N_r}$ contenant M et le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures est un sous-groupe parabolique standard de radical unipotent $N = N_{N_1, \dots, N_r}$. Pour tout $1 \leq i \leq r$, soit X_i un module de Harish-Chandra de longueur finie de $\mathbf{GL}_{N_i}(\mathbb{C})$. On note alors

$$(4.2) \quad X_1 \star X_2 \star \dots \star X_r$$

la représentation obtenue par induction parabolique (normalisée) à partir de la représentation $X_1 \otimes X_2 \otimes \dots \otimes X_r$ de M relativement au sous-groupe parabolique P .

4.2. Paramètres et paquets d'Arthur pour \mathbf{GL}_N . — Un paramètre de Langlands de $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ est un morphisme continu :

$$\phi : W_{\mathbb{C}} \longrightarrow {}^L\mathbf{GL}_N(\mathbb{C}) = \mathbf{GL}_N(\mathbb{C}),$$

c'est-à-dire une représentation de dimension N de \mathbb{C}^{\times} . Le fait que les $\phi(z)$, $z \in \mathbb{C}^{\times}$ soient semi-simples nous dit que cette représentation est complètement réductible.

Les représentations irréductibles de $W_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^{\times}$ sont de dimension 1 puisque \mathbb{C}^{\times} est abélien. Elles sont paramétrées par les couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ avec $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

$$(4.3) \quad \chi_{\lambda, \mu}(z) = z^{\lambda} \bar{z}^{\mu}$$

Le caractère $\chi_{\lambda, \mu}(z)$ est unitaire si $\lambda + \mu \in i\mathbb{R}$.

Un paramètre d'Arthur pour $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ est un morphisme continu :

$$\psi : W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L\mathbf{GL}_N(\mathbb{C}) = \mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$$

vérifiant les propriétés énoncées dans la définition 3.5. Cette représentation de dimension N de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C}^N est complètement réductible. Elle s'écrit donc comme une somme directe

$$(4.4) \quad \psi = \bigoplus_{i=1, \dots, r} \psi_i, \quad \psi_i : W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_{N_i}(\mathbb{C})$$

avec ψ_i irréductible et $\sum_{i=1}^r N_i = N$. Les représentations irréductibles de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ sont des produits tensoriels de représentations irréductibles de $W_{\mathbb{C}}$ avec des représentations irréductibles de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$. Les représentations irréductibles de $W_{\mathbb{C}}$ sont les caractères $\chi_{\lambda, \mu}$ décrits ci-dessus. Les représentations irréductibles algébriques de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ sont déterminées par leur dimension, et l'on note R_n un choix de représentation irréductible de dimension n de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ (ou sa classe d'équivalence). Les représentations irréductibles de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ sont donc à équivalence près les

$$(4.5) \quad \chi_{\lambda, \mu} \boxtimes R_n, \quad \lambda - \mu \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Celles qui apparaissent dans la décomposition d'un paramètre d'Arthur ont en plus la propriété d'être à image bornée, ce sont donc les $\chi_{\lambda, \mu} \boxtimes R_n$ avec $\lambda + \mu \in i\mathbb{R}$.

Comme les paquets de Langlands, les paquets d'Arthur pour $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ sont des singletons, et si ϕ_{ψ} est le paramètre de Langlands (3.2), on a donc $\Pi(\psi) = \Pi(\phi_{\psi})$. On note $X_{\psi}^{\mathbf{GL}}$ l'unique représentation qu'il contient. Nous allons maintenant déterminer la représentation $X_{\psi}^{\mathbf{GL}}$ associée à un paramètre d'Arthur ψ , en commençant par les ψ irréductibles :

$$(4.6) \quad \text{si } \psi = \chi_{\lambda, \mu} \boxtimes R_n, \quad X_{\psi}^{\mathbf{GL}} = \chi_{\lambda, \mu} \circ \det_n$$

où $\det_n : \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ est le déterminant. Pour le cas général, on a

Proposition 4.1. — *Si $\psi = \bigoplus_{i=1, \dots, r} \psi_i$ est une décomposition en irréductibles, alors*

$$(4.7) \quad X_{\psi}^{\mathbf{GL}} = \star_i X_{\psi_i}^{\mathbf{GL}}.$$

Remarque 4.2. — Un résultat de Vogan [Vog86] (voir aussi [Tad09] et [Bar03]) affirme que cette représentation est unitaire et irréductible, en particulier, elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend le produit.

Remarque 4.3. — Pour palier à l'absence de preuve de la conjecture de Ramanujan, nous sommes aussi obligés de considérer les paramètres qui sont presque unitaires, c'est-à-dire ceux pour lesquels $\Re(\lambda + \mu) \in]-1/2, 1/2[$. L'extension à ces paramètres est sans difficulté.

On note $\theta = \theta_N$ l'automorphisme $g \mapsto {}^t g^{-1}$ de $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$. Les représentations irréductibles de $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ auto-duales (isomorphes à leur contragrégientes) sont celles qui sont stables sous l'action de θ_N . Elles jouent un rôle fondamental dans les travaux d'Arthur [Art13] de par leur lien avec les représentations des groupes classiques. Les paramètres de Langlands ou d'Arthur qui leur sont associés sont ceux dont la composition avec θ (du côté dual donc) leur est conjuguée.

Le lecteur vérifiera facilement que les paramètres d'Arthur θ -stables admettent une décomposition du type

$$(4.8) \quad \psi = \bigoplus_i (\chi_i \boxtimes R_{N_i} \oplus \chi_i^{-1} \otimes R_{N_i}) \bigoplus_j (\mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_j})$$

où les caractères χ_i de \mathbb{C}^\times sont tels que $\chi_i \neq \chi_i^{-1}$.

5. Les groupes classiques et leurs représentations. Paquets d'Arthur

5.1. Les groupes classiques. — Les groupes classiques complexes que nous considérons sont les groupes de rang n suivants:

C_n. Le groupe symplectique $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$. Son dual de Langlands est $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$.

B_n. Le groupe spécial orthogonal impair $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$. Son dual de Langlands est $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$.

D_n. Le groupe spécial orthogonal pair $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$. Son dual de Langlands est $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$.

A cette liste de groupes classiques, nous ajoutons un cas un peu moins classique pour lequel nous disposons de résultats incomplets (ils n'entrent pas dans le cadre des travaux d'Arthur), mais néanmoins intéressants.

Mp_n. Le groupe métaplectique $\mathbf{Mp}_{2n}(\mathbb{C})$. Son dual de Langlands est $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ (*cf.* [Wei]).

Remarque 5.1. — Le groupe métaplectique $\mathbf{Mp}_{2n}(\mathbb{C})$ est une extension scindée du groupe symplectique $\mathbf{Sp}_2(\mathbb{C})$, mais son dual de Langlands est différent de celui-ci. Du point de vue de la théorie des représentations spécifiques, c'est donc le même groupe, mais pas du point de vue de la théorie d'Arthur-Langlands.

Nous notons ces groupes G , ou bien G_n lorsqu'on veut garder l'information sur le rang. On fixe une paire de Borel (B, H) pour chacun de ces groupes comme dans la section 2.1. Soit $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ la base de \mathfrak{h}^* telle que le système de racines de H dans G soit constitué des racines $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$, $1 \leq i < j \leq n$, auxquelles on ajoute les racines $\pm 2\epsilon_i$ dans les cas **C_n** et **Mp_n**, et $\pm\epsilon_i$ dans le cas **B_n**, $1 \leq i \leq n$. Le choix de cette base identifie \mathfrak{h}^* à \mathbb{C}^n et l'on note $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un élément de \mathfrak{h}^* .

Soit $\bar{X} = \bar{X}(\lambda, \mu)$ une représentation irréductible de G . Les paramètres $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ sont des éléments de \mathfrak{h}^* que l'on a identifié à \mathbb{C}^n . On a alors pour tout $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i - \mu_i \in \mathbb{Z}$. et $\chi_{\lambda_i, \mu_i}(z) = z^{\lambda_i} \bar{z}^{\mu_i}$ est un caractère de \mathbb{C}^\times .

5.2. Exposants. — Dans ce paragraphe, on introduit la notion d'exposants (la terminologie est peut-être abusive) d'une représentation irréductible d'un groupe classique complexe.

Définition 5.2. — On appelle exposants de $\bar{X} = \bar{X}(\lambda, \mu)$ l'ensemble (avec multiplicités) des caractères χ_{λ_i, μ_i} de \mathbb{C}^\times comme ci-dessus et on le note $\text{Exp}(\bar{X})$.

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G . On suppose que le facteur de Levi M contient H et que N est contenu dans B (P est "standard" relativement au choix de la paire de Borel (B, H)). Le facteur de Levi M est isomorphe à un produit

$$(5.1) \quad \left(\times_{i=1}^k \mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{C}) \right) \times G'$$

où G' est un groupe classique de rang n' , avec $\sum_{i=1}^k n_i + n' = n$. En choisissant des réalisations explicites de nos groupes classiques comme sous-groupes de groupes généraux linéaires, par exemple comme dans [Art13], §1.2, il est possible de fixer l'isomorphisme entre M et (5.1), de sorte qu'on va les identifier dans la suite sans plus de précautions. On a bien conscience que dans le cas où G est un groupe orthogonal pair, si $n' = 0$ la classe d'isomorphie du sous-groupe

de Levi ne détermine une classe d'association de parabolique qu'à conjugaison près sous l'action du groupe orthogonal.

Soit X' une représentation de G' , et pour tout $i = 1, \dots, k$, soit X_i une représentation de $\mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{C})$. On note alors

$$(5.2) \quad \left(\star_{i=1}^k X_i \right) \star X' = \text{Ind}_P^{G'} \left(\left(\otimes_{i=1}^k X_i \right) \otimes X' \right).$$

Le résultat suivant sera crucial dans la suite. Nous adoptons le raccourci de langage suivant : on dit qu'un réel a est demi-entier s'il appartient à $\frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$.

Lemme 5.3. — *Soit \bar{X} une représentation irréductible d'un groupe classique G_n . Soit $\chi = \chi_{a,b}$ un caractère de \mathbb{C}^\times avec a et b réels, et supposons que*

$$Y = (\chi_{a,b} \circ \det_r) \star \bar{X}$$

soit réductible. Alors l'un des sous-quotients de Y possède un exposant $\chi_{a',b'}$ avec $|a' - b'| > |a - b|$. D'autre part, si $\frac{r-1}{2} + a$ est demi-entier (resp. entier), alors on a la même conclusion avec de plus a', b' demi-entiers (resp. entiers).

Démonstration. On applique le lemme 2.3 à $G^+ = G_{n+r}$, son sous-groupe de Levi standard $M = \mathbf{GL}_r(\mathbb{C}) \times G_n$ et la représentation $\bar{X}^M = (\chi_{a,b} \circ \det_r) \otimes \bar{X}$ de celui-ci. Si $\bar{X} = \bar{X}(\lambda, \mu)$, avec $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, alors (en conjuguant au besoin la situation par un élément du groupe de Weyl de G^+) $\bar{X}^M = \bar{X}^M(\lambda^+, \mu^+)$, avec

$$\lambda^+ = \left(a + \frac{r-1}{2}, a + \frac{r-3}{2}, \dots, a + \frac{1-r}{2}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \right)$$

$$\mu^+ = \left(b + \frac{r-1}{2}, b + \frac{r-3}{2}, \dots, b + \frac{1-r}{2}, \mu_1, \dots, \mu_n \right).$$

Le lemme 2.3 nous dit qu'il existe une racine α de H^+ dans le radical unipotent du sous-groupe parabolique standard $P = MN$ telle que $\bar{X}(\lambda^+, s_\alpha \cdot \mu^+)$ soit un sous-quotient de Y et $\langle \alpha, \lambda^+ \rangle$ et $\langle \alpha, \mu^+ \rangle$ sont des entiers non nuls de même signe. Supposons que $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, avec $1 \leq i \leq r$ et $r+1 \leq j \leq r+n$ et que le signe en question soit négatif. Ceci signifie que λ_i et μ_i sont réels et

$$\lambda_i > a + \frac{r - (2j-1)}{2}, \quad \mu_i > b + \frac{r - (2j-1)}{2}.$$

Or $\bar{X}(\lambda^+, s_\alpha \cdot \mu^+)$ a pour exposants $\chi_{a',b'} = \chi_{\lambda_i, b + \frac{r-(2j-1)}{2}}$ et $\chi_{a'',b''} = \chi_{a + \frac{r-(2j-1)}{2}, \mu_i}$, et

$$a' - b' = \lambda_i - \left(b + \frac{r - (2j-1)}{2} \right) > a + \frac{r - (2j-1)}{2} - \left(b + \frac{r - (2j-1)}{2} \right) = a - b,$$

$$a'' - b'' = a + \frac{r - (2j-1)}{2} - \mu_i < a + \frac{r - (2j-1)}{2} - \left(b + \frac{r - (2j-1)}{2} \right) = a - b.$$

On a donc soit $|a' - b'| > |a - b|$, soit $|a'' - b''| > |a - b|$. Les autres cas ($\alpha = \epsilon_i + \epsilon_j$ ou bien $\langle \alpha, \lambda^+ \rangle$ et $\langle \alpha, \mu^+ \rangle$ positifs) se démontrent de la même manière.

Si α est une racine multiple de ϵ_j pour un $1 \leq j \leq r$ et $\langle \alpha, \lambda^+ \rangle$ et $\langle \alpha, \mu^+ \rangle$ sont des entiers positifs (l'autre cas se traite de la même manière), ceci donne $a + \frac{r-(2j-1)}{2} > 0$ et $b + \frac{r-(2j-1)}{2} > 0$. Or $\bar{X}(\lambda^+, s_\alpha \cdot \mu^+)$ a pour exposant $\chi_{a',b'} = \chi_{a + \frac{r-(2j-1)}{2}, -(b + \frac{r-(2j-1)}{2})}$ et

$$(a' - b') - (a - b) = 2b + r - (2j-1) > 0, \quad (a' - b') - (b - a) = 2a + r - (2j-1) > 0$$

donc $(a' - b') > |a - b|$.

Si $a + \frac{r-1}{2}$ est demi-entier (resp. entier), dans le premier cas ci-dessus λ_i et μ_i sont aussi demi-entiers (resp. entiers) car $\langle \alpha, \lambda^+ \rangle$ et $\langle \alpha, \mu^+ \rangle$ sont entiers, et il en est de même pour a', b', a'' et b'' ainsi que dans le second cas pour a' et b' . \square

6. Réduction au cas unipotent de bonne parité

6.1. Généralités. — Pour chacun des groupes classiques de §5.1, on dispose d'une représentation naturelle du L -groupe dans un ${}^L\mathbf{GL}_N = \mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$:

$$(6.1) \quad \mathbf{Std}_G : {}^L G \longrightarrow \mathbf{GL}_N(\mathbb{C}).$$

On a $N = 2n + 1, 2n, 2n, 2n$ respectivement dans les cas $\mathbf{C}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{D}_n, \mathbf{Mp}_n$. Soit G l'un de ces groupes classiques et soit

$$\psi_G : W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G$$

un paramètre d'Arthur pour G . Posons $\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G$. C'est un paramètre d'Arthur θ_N -stable de $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$, il admet donc une décomposition en irréductible de la forme

$$(6.2) \quad \psi = \bigoplus_i (\chi_i \boxtimes R_{N_i} \oplus \chi_i^{-1} \boxtimes R_{N_i}) \bigoplus_j (\mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_j})$$

où les caractères unitaires χ_i de \mathbb{C}^\times sont tels que $\chi_i \neq \chi_i^{-1}$.

Remarque 6.1. — Il y a une condition de parité sur les N_j de la deuxième somme : si ${}^L G$ est un groupe symplectique, les N_j impairs apparaissent avec une multiplicité paire et si G est un groupe orthogonal, les N_j pairs apparaissent avec une multiplicité paire. On a bien sûr

$$2 \sum_i N_i + \sum_j N_j = N.$$

Notons $\psi_{u,bp}$ la somme des sous-représentations intervenant dans la décomposition (6.2) de la forme $\mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_j}$ avec N_j pair si ${}^L G$ est un groupe symplectique et impair sinon et $N_{u,bp}$ la dimension de cette représentation. D'après ce qui précède $N - N_{u,bp}$ est pair et il existe une représentation ρ de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbf{GL}_{N-N_{u,bp}}(\mathbb{C})$, ρ , non unique telle que

$$(6.3) \quad \psi = \rho \oplus \rho^* \oplus \psi_{u,bp}.$$

Notre but est la description des éléments du paquet $\Pi(\psi_G, G)$ attaché par Arthur à un paramètre ψ_G dans les cas $\mathbf{C}_n, \mathbf{B}_n$ et \mathbf{D}_n . L'importance de la décomposition (6.3) est que nous allons ramener cette description à celle de $\Pi(\psi_{u,bp})$ et utiliser [BV85] pour décrire $\Pi(\psi_{u,bp})$.

Remarque 6.2. — Dans le cas \mathbf{Mp}_n , les paquets d'Arthur $\Pi(\psi, \mathbf{Mp}_{2n}(\mathbb{C}))$ sont définis via la correspondance de Howe entre groupes métaplectiques et groupes orthogonaux impairs ([Mœg]).

Revenons aux cas traités par Arthur, et donc G n'est pas un groupe métaplectique. Soit ψ_G un paramètre d'Arthur et $\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G$. Soit $X_{\psi}^{\mathbf{GL}}$ la représentation auto-duale irréductible de $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ qui est l'unique élément du paquet d'Arthur $\Pi(\psi, \mathbf{GL}_N(\mathbb{C}))$ (cf. (4.7)). Les éléments du paquets d'Arthur $\Pi(\psi, G)$, et plus précisément, les représentations X_{η} associées à chaque caractère de $A(\psi_G)$ sont caractérisés par les identités de transfert pour l'endoscopie ordinaire d'un groupe endoscopique elliptique de G vers G , et l'identité de transfert endoscopique tordu, où G est un groupe endoscopique tordu pour $(\mathbf{GL}_N(\mathbb{C}), \theta_N)$ qui stipule que le transfert de la représentation virtuelle stable $X_{\psi_G}^{st}$ (3.13) est la trace tordue de la représentation $X_{\psi}^{\mathbf{GL}}$.

Remarque 6.3. — Expliquons comment déterminer le caractère infinitésimal des éléments du paquet $\Pi(\psi, G)$. Rappelons qu'un caractère infinitésimal est donné par deux éléments λ et μ de \mathfrak{h}^* , c'est-à-dire deux n -uplets de nombres complexes, modulo l'action de groupe de Weyl, c'est-à-dire à permutation et changements de signes près. Pour trouver λ (resp. μ), on considère la réunion des $(a + \frac{r-1}{2}, a + \frac{r-1}{2}, \dots, a - \frac{r-1}{2})$ (resp. $(b + \frac{r-1}{2}, b + \frac{r-1}{2}, \dots, b - \frac{r-1}{2})$) pour chaque terme de la forme $\chi_{a,b} \boxtimes R_r$ apparaissant dans le paramètre ψ (éventuellement avec $a = b = 0$ pour les termes $\mathbf{Triv} \boxtimes R_r$). On obtient ainsi un $2n$ -uplet dans les cas $\mathbf{C}_n, \mathbf{D}_n$ et \mathbf{Mp}_n , et un $2n + 1$ -uplet dans le cas \mathbf{B}_n , 0 apparaissant avec une multiplicité impaire. Dans ce dernier cas, on enlève un 0, et il reste donc un $2n$ -uplet ayant la propriété que si x en est un élément, alors

$-x$ aussi, avec la même multiplicité. On enlève la moitié des éléments, en groupant les éléments par paires $\{x, -x\}$ et en ne gardant pour chaque paire qu'un seul des deux éléments.

6.2. Réduction aux paramètres unipotents de bonne parité. — Nous énonçons dans cette section un résultat de réduction qui ne s'applique pas aux groupes métaplectiques. En revanche, certains résultats intermédiaires importants d'irréductibilité d'induites sont eux valides aussi pour les groupes métaplectiques. Soit G un groupe classique complexe et soit

$$\psi_G : W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G$$

un paramètre d'Arthur pour G . Posons $\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G$ et soit

$$(6.4) \quad \psi = \bigoplus_i (\chi_i \boxtimes R_{N_i} \oplus \chi_i^{-1} \boxtimes R_{N_i}) \bigoplus_j (\mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_j})$$

la décomposition en irréductibles de ψ comme dans la section précédente.

Supposons que G ne soit pas un groupe métaplectique. Considérons une décomposition de ψ de la forme :

$$(6.5) \quad \psi = \rho \oplus \rho^* \oplus \psi'$$

où $\rho = \bigoplus_k \chi_k \boxtimes R_{N_k}$, et $\rho^* = \bigoplus_k \chi_k^{-1} \boxtimes R_{N_k}$. Ici les χ_k peuvent être triviaux mais s'ils sont triviaux alors N_k est de mauvaise parité c'est-à-dire est pair si ${}^L G$ est un groupe orthogonal et impair si ${}^L G$ est un groupe symplectique. Le paramètre ψ' se factorise par le L -groupe d'un groupe classique G' de même type que G . Soit $\psi_{G'}$ le paramètre d'Arthur pour le groupe G' tel que $\psi' = \mathbf{Std}_{G'} \circ \psi_{G'}$. Notons $N_\rho = \sum_k N_k$ la dimension de la représentation ρ de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, et soit $X_\rho^{\mathbf{GL}}$ la représentation de $\mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{C})$ de paramètre d'Arthur ρ (cf. (4.7)). Le groupe G admet un sous-groupe de Levi maximal isomorphe à $\mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{C}) \times G'$, et ceci fournit une injection

$$(6.6) \quad \iota : \mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{C}) \times {}^L G' \hookrightarrow {}^L G$$

de sorte que $\psi_G = \iota \circ (\rho, \psi_{G'})$.

Remarque 6.4. — Les groupes $A(\psi_G)$ et $A(\psi_{G'})$ sont naturellement isomorphes. En effet, le centralisateur de ψ est un produit du centralisateur de ψ' et de groupes généraux linéaires complexes.

Proposition 6.5. — Soit $\eta \in \widehat{A(\psi_G)}$ et soient X_η et X'_η les représentations semi-simples de G et G' respectivement attachées par Arthur (cf. (3.11), où pour X'_η on tient compte de la remarque ci-dessus). On a alors

$$(6.7) \quad X_\eta = X_\rho^{\mathbf{GL}} \star X'_\eta.$$

Démonstration. Nous allons démontrer que le terme de droite de (6.7) vérifie les identités endoscopiques qui caractérisent le terme de gauche. Soit $\mathbf{H} = (H, s, \xi : {}^L H \rightarrow {}^L G, \dots)$ une donnée endoscopique elliptique de G (cf. [Art13]) telle que ψ_G se factorise par le groupe dual de H et on fixe une telle factorisation $\psi_G = \xi \circ \psi_H$. En particulier l'élément $s \in {}^L G$ s'identifie à un élément du commutant de ψ_G . Il faut alors démontrer qu'il existe une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{H}' = (H', s', \dots)$ de G' , tel que l'élément s' de cette donnée soit dans le centralisateur de $\psi_{G'}$ et tel que le transfert de la distribution stable associée à \mathbf{H} et à la factorisation de ψ_G soit l'induite du produit tensoriel des données analogues pour $\psi_{G'}$ et \mathbf{H}' et de la représentation $X_\rho^{\mathbf{GL}}$. Expliquons maintenant comment construire explicitement cette donnée endoscopique \mathbf{H}' . Comme on a le droit de le faire, on suppose que s vérifie $s^2 = 1$ et dans un premier temps on suppose aussi que $s \neq 1$. On décompose alors ψ en $\psi_+ \oplus \psi_-$ suivant les valeurs propres de s . On remarque que l'on a aussi une décomposition analogue pour ψ' et pour ρ . On a alors

$$\psi_+ = \rho_+ \oplus \rho_+^* \oplus \psi'_+$$

et une décomposition analogue avec $+$ remplacé par $-$. C'est ici qu'a servi l'hypothèse sur la parité de N_k si χ_k est trivial pour que le dual de ρ_+ apparaisse lui aussi dans l'espace propre de valeur propre $+1$. Notons $N_{\rho_{\pm}}$ les dimensions des représentations ρ_{\pm} , et $X_{\rho_{\pm}}^{\mathbf{GL}}$ la représentation de $\mathbf{GL}_{N_{\rho_{\pm}}}(\mathbb{C})$ associée à ce paramètre. On a bien sûr $N_{\rho} = N_{\rho_+} + N_{\rho_-}$ et $X_{\rho}^{\mathbf{GL}} = X_{\rho_+}^{\mathbf{GL}} \star X_{\rho_-}^{\mathbf{GL}}$. Ainsi il existe un sous-groupe de Levi

$$M \simeq \left(\mathbf{GL}_{N_{\rho_+}}(\mathbb{C}) \times M^+ \right) \times \left(\mathbf{GL}_{N_{\rho_-}}(\mathbb{C}) \times M^- \right)$$

de H tel que ψ_H se factorise par le groupe dual de M et la distribution stable de H associée à ψ_H (cf. (3.13)) est une induite à partir de ce Levi. Notons H' le facteur $M^+ \times M^-$ de M : c'est un groupe endoscopique pour G' , s'inscrivant dans une donnée endoscopique $\mathbf{H}' = (H', s', \xi', \dots)$ de G' et le paramètre d'Arthur $\psi_{G'}$ se factorise en $\xi' \circ \psi_{H'}$. L'élément s' est dans le centralisateur de $\psi_{G'}$, on peut le prendre tel que $s'^2 = 1$ et $\psi' = \psi'^+ \oplus \psi'^-$ est la décomposition de ψ' selon les valeurs propres ± 1 de s' . Partons de la représentation stable $X_{\psi_{H'}}^{st}$ associée à $\psi_{H'}$ (cf. (3.13)). On peut d'abord considérer son transfert endoscopique vers G' , puis induire vers G avec $X_{\rho}^{\mathbf{GL}}$:

$$X_{\rho}^{\mathbf{GL}} \star \text{Trans}_{H'}^{G'}(X_{\psi_{H'}}^{st})$$

où désigne le transfert endoscopique (spectral) du groupe endoscopique H' de G' vers G' . Le fait que le transfert commute à l'induction nous dit que l'on obtient le même résultat en induisant vers H avec $X_{\rho_+}^{\mathbf{GL}}$ et $X_{\rho_-}^{\mathbf{GL}}$ et en prenant ensuite le transfert endoscopique de H vers G :

$$\text{Trans}_H^G(X_{\rho_+}^{\mathbf{GL}} \star X_{\rho_-}^{\mathbf{GL}} \star X_{\psi_{H'}}^{st}) = \text{Trans}_H^G(X_{\rho}^{\mathbf{GL}} \star X_{\psi_{H'}}^{st}).$$

Ce que l'on obtient est la représentation X_{ψ}^s de (3.12).

Pour la distribution stable (3.13) associée à ψ (le cas $s = 1$), il faut montrer que le transfert pour l'endoscopie tordue de cette représentation vers l'espace tordu associé à $\mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$ est aussi une induite. On vérifie aisément l'égalité des traces tordues de $X_{\psi}^{\mathbf{GL}}$ et $X_{\rho}^{\mathbf{GL}} \times X_{\psi'}^{\mathbf{GL}} \times X_{\rho^*}^{\mathbf{GL}}$ (il y a même en fait égalité de représentations tordues). Il suffit alors de vérifier que la trace tordue de la représentation de droite est bien le transfert pour l'endoscopie tordue de la représentation $X_{\rho}^{\mathbf{GL}} \star X_{\psi_{G'}}^{st}$. Cela est aussi dû au fait que le transfert commute à l'induction.

On a ainsi vérifié que toutes les formules de transfert se déduisent pour ψ de leurs analogues pour ψ' en induisant avec la représentation $X_{\rho}^{\mathbf{GL}}$. La proposition s'en déduit donc. \square

Revenons à la décomposition (6.4) du début de paragraphe. Alors $\psi_u = \bigoplus_j (\mathbf{Triv} \otimes R_{N_j})$ est un paramètre unipotent de G_{N_u} (où $N_u = \sum_j N_j$), c'est-à-dire que la restriction de ψ_u à $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{\times}$ est triviale. Soit G_u le groupe classique de même type que celui de G admettant une représentation standard dans $\mathbf{GL}_{N_u}(\mathbb{C})$. Alors ψ_u se factorise en $\psi_u = \mathbf{Std}_{G_u} \circ \psi_{G_u}$, où

$$(6.8) \quad \psi_{G_u} : W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G_u$$

est un paramètre d'Arthur unipotent de G_u .

Le groupe G admet un sous-groupe parabolique $P = MN$ tel que M soit isomorphe à $(\times_i \mathbf{GL}_{N_i}(\mathbb{C})) \times G_u$. Le paramètre ψ_G se factorise par un paramètre $\psi_M : W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L M$. Si l'on identifie M et $(\times_i \mathbf{GL}_{N_i}(\mathbb{C})) \times G_u$ comme expliqué ci-dessus, les $\bar{X}^M \in \Pi(\psi_M, M)$ sont de la forme

$$(6.9) \quad \bar{X}^M = \left(\bigotimes_i \chi_i \circ \det_{N_i} \right) \otimes \bar{X}_u$$

où \bar{X}_u décrit le paquet unipotent $\Pi(\psi_{G_u}, G_u)$ de G_u .

Or, dans cette situation, nous avons le résultat suivant dû à Barbasch ([Bar89], Thm. 14.1) (que l'on redémontrera) :

Théorème 6.6. — Avec les notations qui précèdent, pour toute représentation \bar{X}_u dans $\Pi(\psi_{G_u}, G_u)$, la représentation induite

$$\bar{X} = \text{Ind}_P^G \left(\bigotimes_i \chi_i \circ \det_{N_i} \right) \otimes \bar{X}_u = \star_i (\chi_i \circ \det_{N_i}) \star \bar{X}_u$$

est irréductible.

Remarque 6.7. — Le théorème précédent reste vrai si les caractères χ_i sont seulement presque unitaires c'est-à-dire vérifient $\Re(\lambda_i + \mu_i) \in]-1/2, 1/2[$.

On passe du théorème à la remarque on utilisant la description des séries complémentaires données en ([Bar89] §12) mais cela peut se démontrer de façon totalement élémentaire.

Lorsque G n'est pas métaplectique, on peut appliquer la proposition 6.5. Nous montrerons plus loin que pour tout $\eta \in \widehat{A(\psi_u)}$, la représentation $X_\eta^{G_u}$ de G_u associée par Arthur est irréductible ou nulle et le paquet d'Arthur $\Pi(\psi_u, G_u)$ est constitué des $X_\eta^{G_u}$ non nuls lorsque η décrit $\widehat{A(\psi_u)}$. Nous en déduisons le :

Corollaire 6.8. — Avec les notations qui précèdent, la représentation X_η de G associée par Arthur à un caractère $\eta \in \widehat{A(\psi)}$, est la représentation irréductible $X_\eta = (\star_i \chi_i \circ \det_{N_i}) \star X_\eta^{G_u}$ (on rappelle ici la remarque 6.4, et bien évidemment $X_\eta = 0$ si $X_\eta^{G_u} = 0$).

En particulier le paquet $\Pi(\psi_G, G)$ est constitué d'induites irréductibles :

$$\Pi(\psi_G, G) = \left\{ (\star_i \chi_i \circ \det_{N_i}) \star \bar{X}_u, \bar{X}_u \in \Pi(\psi_{G_u}, G_u) \right\}.$$

Nous nous sommes donc ramenés à la détermination des paquets d'Arthur unipotents. Supposons maintenant que $\psi_G = \psi_{G_u}$ et $\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G = \psi_u = \bigoplus_j (\mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_j})$.

Définition 6.9. — Nous définissons la *bonne parité* ϵ_G pour le groupe G comme étant 1 mod 2 dans les cas \mathbf{C}_n et \mathbf{D}_n (le groupe dual est un groupe orthogonal), et 0 mod 2 dans les cas \mathbf{B}_n et \mathbf{Mp}_n (le groupe dual est un groupe symplectique).

Le paramètre ψ se décompose en une partie de bonne parité, et une partie de mauvaise parité :

$$\psi = \psi_{bp} \oplus \psi_{mp}, \quad \psi_{bp} = \bigoplus_{\substack{j \\ N_j \bmod 2 = \epsilon_G}} (\mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_j}), \quad \psi_{mp} = \bigoplus_{\substack{j \\ N_j + 1 \bmod 2 = \epsilon_G}} (\mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_j}).$$

Les parties de mauvaise parité apparaissent avec une multiplicité paire (cf. remarque 6.1), et l'on va donc plutôt écrire :

$$\psi_{mp} = \bigoplus_{\substack{k \\ N_k + 1 \bmod 2 = \epsilon_G}} (\mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_k} \oplus \mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_k}).$$

On a $N = 2N_{mp} + N_{bp} = 2 \sum_k N_k + \sum_j N_j$ et $\psi_{bp} = \bigoplus_{\substack{j \\ N_j \bmod 2 = \epsilon_G}} (\mathbf{Triv} \otimes R_{N_j})$ est un paramètre

unipotent de $G_{N_{bp}}$. Soit G_{bp} le groupe classique de même type que celui de G admettant une représentation standard dans $\mathbf{GL}_{N_{bp}}(\mathbb{C})$. Alors ψ_{bp} se factorise en $\psi_{bp} = \mathbf{Std}_{G_{bp}} \circ \psi_{G_{bp}}$, où

$$(6.10) \quad \psi_{G_{bp}} : W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G_{bp}$$

est un paramètre d'Arthur unipotent de bonne parité de G_{bp} .

Le groupe G admet un sous-groupe parabolique $P = MN$ tel que M soit isomorphe à $(\times_k \mathbf{GL}_{N_k}(\mathbb{C})) \times G_{bp}$. Le paramètre ψ se factorise par un paramètre $\psi_M : W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L M$. Si on identifie M et $(\times_k \mathbf{GL}_{N_k}(\mathbb{C})) \times G_{bp}$, les $\bar{X}^M \in \Pi(\psi_M, M)$ sont de la forme

$$(6.11) \quad \bar{X}^M = \left(\bigotimes_k \mathbf{Triv}_{N_k} \right) \otimes \bar{X}_{bp}$$

où \bar{X}_{bp} décrit le paquet unipotent $\Pi(\psi_{G_{bp}}, G_{bp})$ de G_{bp} . Là encore, nous avons le résultat d'irréductibilité suivant, dû à Barbasch ([Bar89], §6.6) :

Théorème 6.10. — *Avec les notations qui précèdent, pour toute représentation \bar{X}_{bp} dans $\Pi(\psi_{G_{bp}}, G_{bp})$*

$$\bar{X} = (\star_k \mathbf{Triv}_{N_k}) \star \bar{X}_{bp}.$$

est irréductible.

De même que ci-dessus, lorsque G n'est pas métaplectique, on peut appliquer la proposition 6.5 et obtenir le

Corollaire 6.11. — *Avec les notations qui précèdent, la représentation X_η de G associée par Arthur à un caractère $\eta \in \widehat{A(\psi_G)}$, est la représentation irréductible*

$$X_\eta = (\star_k \mathbf{Triv}_k \circ \det_{N_k}) \star X_\eta^{G_{bp}}$$

(on rappelle ici la remarque 6.4, et bien évidemment $X_\eta = 0$ si $X_\eta^{G_{bp}} = 0$).

En particulier le paquet $\Pi(\psi_G, G)$ est constitué d'induites irréductibles :

$$\Pi(\psi_G, G) = \left\{ (\star_k \mathbf{Triv}_k \circ \det_{N_k}) \star \bar{X}_{bp}, \bar{X}_{bp} \in \Pi(\psi_{G_{bp}}, G_{bp}) \right\}.$$

Revenons maintenant à un paramètre ψ_G quelconque, avec

$$\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G = \bigoplus_i (\chi_i \boxtimes R_{N_i} \oplus \chi_i^{-1} \boxtimes R_{N_i}) \bigoplus_k (\mathbf{Triv} \otimes R_{N_k} \oplus \mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_k}) \bigoplus_j (\mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_j})$$

où la première somme est la partie non unipotente, la seconde, la partie unipotente de mauvaise parité, et la troisième, la partie unipotente de bonne parité. On retrouve (6.3). Soit G_{bp} le groupe classique de même type que celui de G admettant une représentation standard dans $\mathbf{GL}_{N_{bp}}(\mathbb{C})$, où $N_{bp} = \sum_j N_j$ est la dimension de la représentation $\psi_{u, bp}$ de (6.3).

Le groupe G admet un sous-groupe parabolique $P = MN$ tel que M soit isomorphe à $(\times_i \mathbf{GL}_{N_i}(\mathbb{C})) \times (\times_k \mathbf{GL}_{N_k}(\mathbb{C})) \times G_{bp}$. Le paramètre ψ se factorise par un paramètre d'Arthur ψ_M pour M . Si on identifie M et $(\times_i \mathbf{GL}_{N_i}(\mathbb{C})) \times (\times_k \mathbf{GL}_{N_k}(\mathbb{C})) \times G_{bp}$, les $\bar{X}^M \in \Pi(\psi_M, M)$ sont de la forme

$$(6.12) \quad \bar{X}^M = \left(\bigotimes_i \chi_i \circ \det_{N_i} \right) \otimes \left(\bigotimes_k \mathbf{Triv}_{N_k} \right) \otimes \bar{X}_{bp}$$

où \bar{X}_{bp} décrit le paquet unipotent $\Pi(\psi_{u, bp}, G_{bp})$ de G_{bp}

Les deux réductions effectuées ci-dessus peuvent se résumer en une seule grâce à la transitivité du foncteur d'induction parabolique :

Théorème 6.12. — *Avec les notations qui précèdent, pour toute représentation \bar{X}_{bp} dans $\Pi(\psi_{G_{bp}}, G_{bp})$*

$$\bar{X} = (\star_i \chi_i \circ \det_{N_i}) \star (\star_k \mathbf{Triv}_{N_k}) \star \bar{X}_{bp}.$$

est irréductible et si G n'est pas un groupe métaplectique, la représentation X_η de G associée par Arthur à un caractère $\eta \in \widehat{A(\psi_G)}$, est la représentation irréductible

$$X_\eta = ((\star_i \chi_i \circ \det_{N_i}) \star (\star_k \mathbf{Triv}_k \circ \det_{N_k})) \star X_\eta^{G_{bp}}$$

(on rappelle ici la remarque 6.4, et bien évidemment $X_\eta = 0$ si $X_\eta^{G_{bp}} = 0$).

En particulier le paquet $\Pi(\psi, G)$ est constitué d'induites irréductibles :

$$\Pi(\psi, G) = \left\{ \bar{X} = (\star_i \chi_i \circ \det_{N_i}) \star (\star_k \mathbf{Triv}_{N_k}) \star \bar{X}_{bp}, \bar{X}_{bp} \in \Pi(\psi_{u, bp}, G_{bp}) \right\}.$$

7. Description des paquets unipotents (Barbasch-Vogan)

Soit G l'un des groupes classiques du paragraphe 5.1, de rang n . Soit ψ_G un paramètre d'Arthur unipotent, c'est-à-dire que ψ_G est trivial sur $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$. On peut donc le voir comme un morphisme de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ dans ${}^L G$. Soit

$$(7.1) \quad \bar{\psi}_G : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Lie}({}^L G) = {}^L \mathfrak{g}$$

la différentielle de ψ_G en l'identité qui envoie le $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -triplet usuel $\{e, h, f\}$ sur un $\mathfrak{sl}(2)$ -triplet dans ${}^L \mathfrak{g}$ (les images de e et f sont des éléments nilpotents dans ${}^L \mathfrak{g}$). Notons $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\psi_G}$ l'orbite nilpotente ${}^L G \cdot e$. La théorie de Jacobson-Morosov établit que la correspondance $\psi_G \leftrightarrow \mathcal{U}_{\psi_G}$ entre classes de conjugaison de paramètres d'Arthur unipotents et orbites nilpotentes dans ${}^L \mathfrak{g}$ est bijective.

Orbites nilpotentes dans les algèbres de Lie simples classiques. Rappelons la classification des orbites nilpotentes dans les algèbres de Lie simples classiques (cf. [CM93]). La représentation standard $\mathbf{Std}_G : {}^L G \rightarrow G_N$ donne par différentiation un morphisme d'algèbres de Lie injectif :

$$\overline{\mathbf{Std}}_G : {}^L \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$$

et l'image d'une orbite nilpotente \mathcal{U} de ${}^L \mathfrak{g}$ est une orbite nilpotente de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$. Une telle orbite est caractérisée par une partition de N , qui donne la taille des blocs de Jordan d'un élément de l'orbite.

On note $\mathcal{P}(N)$ l'ensemble des partitions de N . Les éléments de $\mathcal{P}(N)$ sont des suites $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_k]$ avec $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k > 0$ et $\sum_{i=1}^k d_i = N$. On note $r_{\mathbf{d}}(i)$ la multiplicité de l'entier strictement positif i dans \mathbf{d} . On définit $\mathcal{P}_1(N)$ comme le sous-ensemble de $\mathcal{P}(N)$ des partitions $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_k]$ de N telles que la multiplicité $r_{\mathbf{d}}(i)$ de tout entier i pair soit paire. De même, on définit $\mathcal{P}_{-1}(N)$ par la condition que la multiplicité de tout i impair soit paire (et donc N est pair).

Reprenons nos groupes classiques du paragraphe 5.1. Dans le cas \mathbf{C}_n , ${}^L \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$, et une orbite \mathcal{U} de ${}^L \mathfrak{g}$ donne via $\overline{\mathbf{Std}}_G$ une partition $\mathbf{d} = \mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [d_1, d_2, \dots, d_k]$ de $N = 2n + 1$. Cette partition est dans $\mathcal{P}_1(2n + 1)$ et la correspondance $\mathcal{U} \mapsto \mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ est une bijection entre l'ensemble des orbites nilpotentes de \mathfrak{so}_{2n+1} et $\mathcal{P}_1(2n + 1)$.

De même, dans les cas \mathbf{B}_n et \mathbf{Mp}_n , ${}^L \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$, et l'on a une bijection $\mathcal{U} \mapsto \mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ entre l'ensemble des orbites nilpotentes de \mathfrak{sp}_{2n} et $\mathcal{P}_{-1}(2n)$. Dans le cas \mathbf{D}_n , ${}^L \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$, mais la correspondance $\mathcal{U} \mapsto \mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ ne donne plus une bijection entre les orbites nilpotentes de \mathfrak{so}_{2n} et $\mathcal{P}_1(2n)$. Il faut remplacer l'action adjointe du groupe $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ par le groupe orthogonal $\mathbf{O}(2n)$ pour obtenir une bijection. En fait, une orbite nilpotente $\mathcal{O}_{\mathbf{d}_{\mathcal{U}}}$ de \mathfrak{so}_{2n} pour l'action de $\mathbf{O}(2n)$ est une orbite pour $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$, sauf lorsque la partition $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ est "très paire", c'est-à-dire que tous les d_i sont pairs (avec des multiplicités paires), auquel cas l'orbite $\mathcal{O}_{\mathbf{d}_{\mathcal{U}}}$ se scinde en deux orbites $\mathcal{O}_{\mathbf{d}_{\mathcal{U}}}^I, \mathcal{O}_{\mathbf{d}_{\mathcal{U}}}^{II}$ pour $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$.

Revenons aux paramètres d'Arthur unipotents ψ_G du début du paragraphe, auxquels nous avons attaché une orbite nilpotente \mathcal{U} de ${}^L \mathfrak{g}$ et une partition $\mathbf{d} = \mathbf{d}_{\mathcal{U}}$. Il est donc équivalent de se donner une classe de conjugaison de paramètres d'Arthur unipotents, une orbite nilpotente dans ${}^L \mathfrak{g}$, ou la partition qui lui correspond. Posons comme précédemment $\psi = \mathbf{Std} \circ \psi_G$, et soit $\psi = \bigoplus_{j=1}^r \mathbf{Triv} \boxtimes R_{N_j}$ la décomposition de ψ en irréductibles. La partition associée à ψ_G est alors $\mathbf{d} = [N_1, \dots, N_r]$.

Remarque 7.1. — Si l’orbite nilpotente \mathcal{U} est attachée au paramètre unipotent ψ_G , alors on a une identification $A(\psi_G) = A(\mathcal{U})$, où $A(\mathcal{U})$ est le groupe des composantes connexes du centralisateur dans ${}^L G$ d’un élément e de \mathcal{U} (cf. [BV85], Prop. 2.4). Il sera commode quand \mathcal{U} est donnée de noter $\psi_{\mathcal{U}}$ le morphisme correspondant et à l’inverse quand ψ est donné de noter \mathcal{U}_{ψ} l’orbite correspondante.

Définition 7.2. — Si le paramètre ψ est de bonne parité, c’est-à-dire que dans la partition \mathbf{d} , il n’y a que des d_i vérifiant $d_i \bmod 2 = \epsilon_G$ (cf. définition 6.9), on dit aussi que \mathcal{U} et $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ sont de bonne parité.

Dans les travaux de Barbasch-Vogan, une notion importante est celle d’orbite spéciale, qui est basée sur la dualité de Lusztig-Spaltelstein (cf. [BV85], Appendix). Cette dualité est une application $D_{\mathfrak{g}}$ de l’ensemble des orbites nilpotentes d’une algèbre de Lie réductive \mathfrak{g} vers l’ensemble des orbites nilpotentes de ${}^L \mathfrak{g}$ vérifiant $D_{\mathfrak{g}} \circ D_{{}^L \mathfrak{g}} \circ D_{\mathfrak{g}} = D_{\mathfrak{g}}$. Les orbites dans l’image de D sont appelées orbites spéciales. Lorsqu’on restreint D aux orbites spéciales, on obtient une bijection échangeant orbites nilpotentes spéciales de \mathfrak{g} et de ${}^L \mathfrak{g}$. Les rôles de \mathfrak{g} et ${}^L \mathfrak{g}$ sont ici bien évidemment totalement symétriques. Dans cet article, axé sur le point de vue d’Arthur, ce sont les orbites nilpotentes de ${}^L \mathfrak{g}$ qui jouent le rôle majeur, car elles donnent les paramètres, alors que dans [BV85], l’accent est mis sur les orbites nilpotentes de \mathfrak{g} qui donnent les fronts d’onde des représentations. C’est la dualité de Lusztig-Spaltelstein qui fait le lien entre ces deux points de vue (cf. [BV85] repris ici dans un cadre un peu plus général en 12.3).

On trouve dans [CM93] une procédure expliquant comment calculer $D_{\mathfrak{g}}$ en terme de partitions, que nous rappelons brièvement. Pour ceci, il nous faut une procédure permettant d’obtenir, à partir d’une partition \mathbf{d} de $2n + 1$ ou $2n$, une partition dans $\mathcal{P}_1(2n + 1)$, $\mathcal{P}_{-1}(2n)$, $\mathcal{P}_1(2n)$, appelées respectivement B -collapse, C -collapse et D -collapse de \mathbf{d} . Si \mathbf{d} est une partition de $2n + 1$ qui n’est pas dans $\mathcal{P}_1(2n + 1)$, alors un entier pair r apparaît dans \mathbf{d} avec une multiplicité impaire. Considérons le plus grand de ces entiers, retirons 1 au dernier bloc de cette taille, et rajoutons 1 au bloc de taille maximale strictement inférieure à $r - 1$. On répète ceci jusqu’à obtenir une partition dans $\mathcal{P}_1(2n + 1)$. La procédure est similaire pour le C -collapse (resp. D -collapse) d’une partition de $2n$, où l’on se débarrasse des blocs impairs (resp. pairs) de multiplicités impaires en commençant par le plus grand.

Cas C_n . Soit \mathcal{O} une orbite nilpotente de \mathfrak{sp}_{2n} et $\mathbf{d} \in \mathcal{P}_{-1}(2n)$ la partition associée. On ajoute un bloc 1 pour avoir une partition de $2n + 1$, on prend la partition transposée (on échange lignes et colonnes du tableau de Young) et on prend le B -collapse de celle-ci, pour obtenir une partition dans $\mathcal{P}_1(2n + 1)$, ce qui nous donne une orbite nilpotente de \mathfrak{so}_{2n+1} .

Cas B_n . Soit \mathcal{O} une orbite nilpotente de \mathfrak{so}_{2n+1} et $\mathbf{d} \in \mathcal{P}_1(2n + 1)$ la partition associée. On prend la partition transposée enlève 1 au plus petit bloc pour avoir une partition de $2n$. On prend le C -collapse de cette partition pour obtenir une partition dans $\mathcal{P}_{-1}(2n)$, ce qui nous donne une orbite nilpotente de \mathfrak{sp}_{2n} .

Cas D_n . On prend le D -collapse de la partition transposée en éliminant les blocs pairs ayant une multiplicité impaire.

Cas Mp_n . Pour le groupe métaplectique, il y a aussi une dualité (étudiée en [Mœg96]) de l’ensemble des orbites nilpotentes de $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ dans lui-même, définie comme suit. Soit \mathcal{U} une orbite nilpotente de $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} \in \mathcal{P}_{-1}(2n)$ la partition qui lui correspond. On ajoute un bloc 1 à $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$, on prend la partition conjuguée, $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}^t$ et on applique l’algorithme pour calculer le “ C -collapse”, en évacuant les blocs impairs de multiplicité impaires du plus grand au plus petit. Mais ici comme on a une partition de $2n + 1$, on se retrouve à la fin avec un seul bloc de taille impaire avec une multiplicité impaire. On enlève 1 au dernier de ces blocs. Notons $\mathbf{d}_{\mathcal{O}}$ la partition de $\mathcal{P}_{-1}(2n)$ obtenue et \mathcal{O} l’orbite de $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ qui lui correspond. Par exemple, l’orbite \mathcal{U} de partition $[2, 1, 1]$ a pour duale l’orbite \mathcal{O} de partition $[4]$, et réciproquement. De même, l’orbite \mathcal{U} de partition $[2, 2, 2]$ a pour duale l’orbite \mathcal{O} de partition $[4, 2]$, et réciproquement.

Définition 7.3. — On dit que l'orbite nilpotente \mathcal{U} de $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ est antispéciale si elle est égale à sa biduale. Par exemple, les orbites de partitions $[2, 1, 1]$, $[4]$, $[2, 2, 2]$ et $[4, 2]$ sont antispéciales. Celle de partition $[3, 3]$ a pour duale $[2, 2, 2]$ et n'est donc pas antispéciale.

Remarque 7.4. — Une orbite nilpotente de $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ est à la fois spéciale et antispéciale si et seulement elle est de bonne parité (ie. tous ses blocs sont pairs).

Remarque 7.5. — Pour les groupes classiques, une orbite est *paire* (au sens usuel, cf. [BV85] ou [CM93]) si tous les d_i sont de même parité. Une orbite nilpotente \mathcal{U} de bonne parité est spéciale (antispéciale dans le cas \mathbf{Mp}_n) et paire. Dans le cas \mathbf{C}_n , cette parité ne peut être que la bonne parité (impaire), car il y a un nombre impair de blocs impairs.

Dans le cas où \mathcal{U} est une orbite spéciale paire, et G un groupe classique non métaplectique une définition du paquet d'Arthur associé a été donné par Barbasch et Vogan ([BV85]). Notons le $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$. Cette définition est étendue par Barbasch [Bar89] au cas des groupes métaplectiques.

Définition 7.6 (Barbasch-Vogan). — Soit G un groupe classique et \mathcal{U} une orbite nilpotente spéciale (antispéciale dans le cas \mathbf{Mp}_n) paire de ${}^L\mathfrak{g}$. Soit \mathcal{O} l'orbite duale de \mathcal{U} . C'est une orbite nilpotente spéciale (antispéciale dans le cas \mathbf{Mp}_n) dans \mathfrak{g} . Nous avons vu en (3.7) que le caractère infinitésimal doit être $(\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h)$. Les éléments du paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ sont les modules de Harish-Chandra irréductibles \bar{X} ayant ce caractère infinitésimal, et dont le front d'onde est $\mathrm{WF}(X) = \bar{\mathcal{O}}$.

On suppose dans la suite que \mathcal{U} est spéciale (antispéciale dans le cas \mathbf{Mp}_n) et paire.

Remarque 7.7. — Pour les groupes classiques, on calcule facilement les coordonnées du caractère infinitésimal de $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ à partir de l'orbite \mathcal{U} , ou plutôt de la partition $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$. Si $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [d_1, \dots, d_k]$, on considère pour chaque d_i la suite

$$\left(\frac{d_i - 1}{2}, \frac{d_i - 3}{2}, \dots, \frac{3 - d_i}{2}, \frac{1 - d_i}{2} \right).$$

On concatène toute ces suites en réordonnant les éléments dans l'ordre décroissant. On ne garde ensuite que les termes strictement positifs, et la moitié des termes nuls (s'il y en a un nombre impair $2\ell + 1$, on en garde ℓ).

Par exemple, dans le cas \mathbf{C}_n , considérons le paramètre unipotent associé à $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [5, 3, 3, 1, 1]$. Le caractère infinitésimal est $(2, 1, 1, 1, 0, 0)$. Dans le cas \mathbf{B}_n , si $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [6, 6, 4, 2]$, le caractère infinitésimal est $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Si l'orbite \mathcal{U} est paire, le caractère infinitésimal associé est entier. Dans le cas \mathbf{C}_n , nous avons vu qu'une orbite paire est de bonne parité (tous les d_i sont impairs), et ainsi les coordonnées du caractère infinitésimal sont des entiers. Dans le cas \mathbf{B}_n , une orbite paire est soit de bonne parité (paire), auquel cas les coordonnées du caractère infinitésimal sont des demi-entiers (dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$), soit totalement de mauvaise parité, auquel cas les coordonnées du caractère infinitésimal sont des entiers. Dans le cas \mathbf{D}_n , une orbite paire est soit de bonne parité (impaire), auquel cas les coordonnées du caractère infinitésimal sont des entiers, soit totalement de mauvaise parité, auquel cas les coordonnées du caractère infinitésimal sont des demi-entiers. Dans le cas \mathbf{Mp}_n , une orbite paire antispéciale est de bonne parité (paire), auquel cas les coordonnées du caractère infinitésimal sont des demi-entiers.

Nous allons donner la description des éléments du paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ en suivant [BV85] et [Bar89]. Ils sont paramétrés par les caractères d'un certain quotient $\bar{A}(\mathcal{U})$ de $A(\mathcal{U})$.

Pour les groupes classiques non métaplectiques, le quotient $\bar{A}(\mathcal{U})$ est le quotient de Lusztig. Il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ pour un certain entier m , ceci sera rendu explicite plus loin. On a

donc une bijection

$$(7.2) \quad \widehat{A(\mathcal{U})} \longrightarrow \Pi_{BV}(\mathcal{U}, G), \quad \eta \mapsto X_\eta^{BV}$$

Remarque 7.8. — En fait, Barbasch et Vogan [BV85] paramètrent les représentations dans un paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ par les caractères du quotient de Lusztig attaché à l'orbite \mathcal{O} , duale de \mathcal{U} . Ils remarquent que ces quotients sont isomorphes: $\bar{A}(\mathcal{O}) \simeq \bar{A}(\mathcal{U})$, mais bien entendu, pour passer de l'une à l'autre des paramétrisations, il faut dire quel est cet isomorphisme. Ceci est assez subtil, et nous l'expliquons plus loin (cf. remarque 10.2). On se sert ici de la section 6 de [Bar89], où Barbasch donne la paramétrisation des représentations dans $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ par $\widehat{A(\mathcal{U})}$.

Pour être en phase avec la paramétrisation d'Arthur, nous réinterprétons (7.2) : à un caractère η de $A(\mathcal{U})$ est attachée une représentation du paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ ou bien 0 de la manière suivante. Si η est un caractère de $A(\mathcal{U})$ qui ne se factorise pas par $\bar{A}(\mathcal{U})$, on pose alors $X_\eta^{BV} = 0$.

$$(7.3) \quad \widehat{A(\mathcal{U})} \longrightarrow \Pi_{BV}(\mathcal{U}, G) \coprod \{0\}, \quad \eta \mapsto X_\eta^{BV}$$

Pour les groupes métaplectiques, les représentations dans le paquet attaché à une orbite nilpotente \mathcal{U} de l'algèbre de Lie ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ sont paramétrés par les caractères d'un autre groupe quotient de $A(\mathcal{U})$ que nous allons noter $\bar{A}^{Mp}(\mathcal{U})$, pour le distinguer du groupe $\bar{A}(\mathcal{U})$ qui apparaît lui lorsque ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ est vue comme l'algèbre de Lie du dual de Langlands de \mathbf{SO}_{2n+1} .

Soit \mathcal{U} une orbite nilpotente antispéciale paire de $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$. On note $\mathbf{d}_\mathcal{U} = [d_1, \dots, d_t]$ la partition (dans $\mathcal{P}_{-1}(2n)$) définissant \mathcal{U} . Tous les blocs sont alors pairs, et l'on pose $n_i = d_i/2$. Alors $\bigoplus_{i \in [1, t]} \mathbf{Sp}_{2n_i}(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$. Le centre de ce sous-groupe s'envoie surjectivement sur le groupe des composantes connexes du centralisateur d'un élément de \mathcal{U} inclus dans ce sous-groupe. Pour tout $i \in [1, t]$, on note ϵ_i l'image de l'élément non trivial du centre de $\mathbf{Sp}_{2n_i}(\mathbb{C})$ dans ce groupe de composantes connexes. En particulier $\epsilon_i = \epsilon_j$ si $n_i = n_j$. On définit alors $\bar{A}^{Mp}(\mathcal{U})$ comme le quotient du groupe des composantes connexes par le sous-groupe engendré par les éléments $\epsilon_i \epsilon_{i+1}$ où i parcourt l'ensemble des entiers pairs dans $[1, t]$ et $\epsilon_{t+1} = 1$ si t est pair.

A la partition $\mathbf{d}_\mathcal{U}$, on attache un symbole (cf. [CM93] §10 pour les groupes classiques non métaplectiques. Pour ces derniers, voir ci-dessous). Dans les cas \mathbf{C}_n , et \mathbf{B}_n ce symbole est de la forme

$$(7.4) \quad \begin{pmatrix} x_0 & x_2 & \dots & x_{2k} \\ & x_1 & x_3 & \dots & x_{2k-1} \end{pmatrix}$$

et dans le cas \mathbf{D}_n , ce symbole est de la forme

$$(7.5) \quad \begin{pmatrix} x_0 & x_2 & \dots & x_{2k} \\ x_1 & x_3 & \dots & x_{2k+1} \end{pmatrix}$$

Un entier i donné n'apparaît dans le symbole qu'au plus deux fois. Comme on est parti d'une orbite spéciale, on a de plus :

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \dots \leq x_i \leq x_{i+1} \leq \dots$$

Voici comment on détermine $\bar{A}(\mathcal{U})$: on enlève du symbole tous les x_i apparaissant avec multiplicité 2 (l'un apparaît sur la ligne du haut, l'autre sur celle du bas). Il reste un symbole de même type sans multiplicité. Soit m la cardinalité de la ligne inférieure. Alors $\bar{A}(\mathcal{U}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$.

Donnons maintenant une description des 2^m éléments de $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$, selon les cas, en illustrant ce qui se passe sur des exemples. On suit bien évidemment les descriptions de [Bar89]. Nous allons pour cela définir à chaque fois un sous-groupe parabolique de G , et 2^m représentations

irréductibles de celui-ci. Les éléments du paquets seront les 2^m sous-quotients irréductibles contenant les K -types minimaux des induites de P à G de ces représentations.

Cas C_n . Nous illustrons ce cas par l'exemple $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [9, 5, 5, 5, 3, 1, 1]$. Le rang est 14.

On repart du symbole attaché à $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$:

$$(7.6) \quad \begin{pmatrix} x_0 & x_2 & \dots & & x_{2k} \\ & x_1 & x_3 & \dots & x_{2k-1} \end{pmatrix}$$

Dans notre exemple, on obtient

$$(7.7) \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 7 \\ & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

On définit une sous-algèbre \mathfrak{m} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ de la manière suivante

$$(7.8) \quad \mathfrak{m} \simeq \mathfrak{m}^0 \times \mathcal{A}^1 \times \dots \times \mathcal{A}^k$$

où $\mathfrak{m}^0 \simeq \mathfrak{sp}_{2x_0}$, $\mathcal{A}^j \simeq \mathfrak{gl}(x_{2k-2j+2} + x_{2k-2j+1} - 2k + 2j - 1)$, $1 \leq j \leq k$.

Dans notre exemple, on obtient

$$\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{gl}(7) \times \mathfrak{gl}(5) \times \mathfrak{gl}(2)$$

On écrit le caractère infinitésimal attaché à \mathcal{U} en coordonnées :

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \dots, \lambda_s)$$

avec $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, $\lambda_s \geq 0$. Les λ_i sont des entiers dans ce cas.

Dans notre exemple,

$$\lambda = (4, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0).$$

On extrait alors de λ la suite strictement décroissante maximale, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ et on la complète en extrayant des opposés des éléments non nuls du reste (que l'on retire aussi de λ) une suite strictement décroissante maximale. Dans notre exemple, on extrait d'abord ainsi $(4, 3, 2, 1)$, il reste $(2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$ et donc on complète en $(4, 3, 2, 1, 0, -1, -2)$. On note F^1 la représentation de dimension finie holomorphe de \mathcal{A}^1 de caractère infinitésimal donné par la suite ainsi obtenue. Dans notre exemple F^1 est la représentation de dimension finie holomorphe de $\mathfrak{gl}(7)$ de caractère infinitésimal $(4, 3, 2, 1, 0, -1, -2)$.

On définit par le même procédé, à partir de ce qui reste de λ , une représentation F^2 de \mathcal{A}^2 , et ainsi de suite jusqu'à F^k , représentation de \mathcal{A}^k . Dans notre exemple, après extraction du caractère infinitésimal de F^1 , il nous reste $(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0)$ et le caractère infinitésimal de la représentation holomorphe de dimension finie F^2 de $\mathfrak{gl}(5)$ est donc $(2, 1, 0, -1, -2)$. Il nous reste ensuite $(1, 0)$ et le caractère infinitésimal de la représentation holomorphe de dimension finie F^3 de $\mathfrak{gl}(2)$ est donc $(1, 0)$.

Il ne reste après ceci de λ qu'une suite d'entiers décroissante λ^0 avec x_0 éléments, que que l'on voit comme un élément du dual de la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{sp}_{2x_0} (il ne reste plus rien dans notre exemple, puisque $x_0 = 0$).

Lorsque un entier a apparaît avec multiplicité 2 dans le symbole, on vérifie, en utilisant le fait que tous les blocs de $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ sont pairs, que c'est sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{2j} = a & \dots & x_{2k} \\ \dots & & x_{2j-1} = a & \dots & x_{2k-1} \end{pmatrix}$$

Lorsque l'on enlève ces paires (x_{2j-1}, x_{2j}) avec $x_{2j-1} = x_{2j}$ du symbole, il nous reste donc m paires (x_{2j-1}, x_{2j}) avec $x_{2j-1} > x_{2j}$. Pour une telle paire, on définit la représentation de dimension finie holomorphe \tilde{F}^j de \mathcal{A}^j de la manière suivante. On reprend F^j et son caractère infinitésimal, et dans celui-ci, on change le signe de la plus petite coordonnée strictement positive dont l'opposé n'apparaît pas, et on réordonne dans l'ordre décroissant. Ceci nous donne le

caractère infinitésimal de \tilde{F}^j . Dans notre exemple, on a $m = 2$, \tilde{F}^1 a pour caractère infinitésimal $(4, 2, 1, 0, -1, -2, -3)$ et \tilde{F}^3 a pour caractère infinitésimal $(0, -1)$.

On note alors, pour tout $1 \leq j \leq k$, tel que $x_{2j-1} = x_{2j}$,

$$(7.9) \quad \mathcal{F}_1^j = F^j \otimes F^j,$$

et pour tout $1 \leq j \leq k$ tel que $x_{2j-1} < x_{2j}$,

$$(7.10) \quad \mathcal{F}_1^j = F^j \otimes F^j, \quad \mathcal{F}_{-1}^j = F^j \otimes \tilde{F}^j.$$

Posons :

$$(7.11) \quad \hat{\epsilon} = (\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_k) \quad \text{où } \hat{\epsilon}_j = \pm 1, \text{ et } \hat{\epsilon}_j = 1 \text{ si } x_{2j-1} = x_{2j},$$

de sorte que

$$(7.12) \quad \mathcal{F}_{\hat{\epsilon}} = \otimes_j \mathcal{F}_{\hat{\epsilon}_j}^j$$

est une représentation de dimension finie de $\prod_{j=1}^k \mathcal{A}^j$, que l'on relève, avec la même notation, en une représentation de dimension finie du produit des groupes généraux linéaires d'algèbre de Lie \mathcal{A}^j .

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G dont le facteur de Levi a pour algèbre de Lie \mathfrak{m} . C'est un produit des groupes généraux linéaires d'algèbre de Lie \mathcal{A}^j , $j = 1, \dots, k$, et d'un facteur $G(x_0) = \mathbf{Sp}_{2x_0}(\mathbb{C})$. Considérons la représentation sphérique $\bar{X}(\lambda^0, \lambda^0)$ de ce groupe⁽¹⁾, et définissons

$$(7.13) \quad \bar{X}_{\hat{\epsilon}} : \text{sous-quotient irréductible contenant le } K\text{-type minimal de } \text{Ind}_P^G (\bar{X}(\lambda^0, \lambda^0) \otimes \mathcal{F}_{\hat{\epsilon}}).$$

Le paquet associé à \mathcal{U} par Barbasch et Vogan est alors

$$(7.14) \quad \Pi_{BV}(\mathcal{U}, G) = \{\bar{X}_{\hat{\epsilon}}\}.$$

Remarque 7.9. — Le cardinal de ce paquet est le nombre de choix possibles pour les signes $\hat{\epsilon}_j$, c'est-à-dire 2^m avec les notations qui précèdent. En fait, chaque $\hat{\epsilon} = (\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_k)$ définit de manière évidente un caractère de $\bar{A}(\mathcal{U})$, et les éléments du paquet sont donc paramétrés par ces caractères.

Revenons à notre exemple. On obtient donc dans ce cas un paquet à 4 éléments, les sous-quotients contenant les K -types minimaux des induites de $\mathbf{GL}_7(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_5(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ des caractères $\mathcal{F}_{1,1,1}$, $\mathcal{F}_{1,1,-1}$, $\mathcal{F}_{-1,1,1}$, $\mathcal{F}_{-1,1,-1}$. Renommons-les, en les indexant par les caractères des groupes $\bar{A}(\mathcal{U}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{1,1} &= \bar{X}((4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 2, 1, 0, -1, -2, 1, 0), (4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 2, 1, 0, -1, -2, 1, 0)) \\ \bar{X}_{1,-1} &= \bar{X}((4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 2, 1, 0, -1, -2, 1, 0), (4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 2, 1, 0, -1, -2, 0, -1)) \\ \bar{X}_{-1,1} &= \bar{X}((4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 2, 1, 0, -1, -2, 1, 0), (4, 2, 1, 0, -1, -2, -3, 2, 1, 0, -1, -2, 1, 0)) \\ \bar{X}_{-1,-1} &= \bar{X}((4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 2, 1, 0, -1, -2, 1, 0), (4, 2, 1, 0, -1, -2, -3, 2, 1, 0, -1, -2, 0, -1)) \end{aligned}$$

Exemple 7.10. — Traitons l'exemple des "cas triangulaires" (cf. [BV85], §9). Il s'agit des cas où la partition $d_{\mathcal{U}}$ est de la forme

$$d_{\mathcal{U}} = [2m + 1, 2m - 1, 2m - 1, \dots, 3, 3, 1, 1].$$

1. C'est la représentation triviale de $\mathbf{Sp}_{2x_0}(\mathbb{C})$.

L'orbite duale \mathcal{O} est aussi triangulaire, avec $d_{\mathcal{O}} = [2m, 2m, \dots, 4, 4, 2, 2]$, et le symbole (le même pour \mathcal{U} et \mathcal{O} , ce qui est très particulier) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \dots & \dots & 2m \\ & 1 & 3 & \dots & 2m-1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\mathfrak{m} = \prod_{j=1}^m \mathfrak{gl}(2j)$, $\bar{A}(\mathcal{U}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ et

$$\mathcal{F}_1^j = \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \det_{2j}, \quad \mathcal{F}_{-1}^j = \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \circ \det_{2j}.$$

Les induites (7.13) sont dans ce cas irréductibles ([BV85], Prop. 9.11) (rappelons que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$, on a noté $\chi_{\alpha, \beta}$ le caractère $z \mapsto z^\alpha \bar{z}^\beta$ de \mathbb{C}^\times).

Exemple 7.11. — $d_{\mathcal{U}} = [7, 3, 3]$, $\lambda = (3, 2, 1, 1, 1, 0)$, le symbole est $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{A}(\mathcal{L}\mathcal{A}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_5(\mathbb{C})$, F^1 a pour caractère infinitésimal $(3, 2, 1, 0, -1)$ et \tilde{F}^1 a pour caractère infinitésimal $(3, 1, 0, -1, -2)$, $\lambda^0 = (1)$, $\bar{X}(\lambda^0, \lambda^0) = \mathbf{Triv}_{\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})}$. On a deux éléments dans le paquet, qui sont respectivement les sous-quotients irréductibles contenant les K -types minimaux de

$$\mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{Triv}_{\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})} \otimes \mathcal{F}_{\pm 1}^1).$$

Où encore, en les indexant par les caractères du groupes $\bar{A}(\mathcal{U}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \bar{X}((3, 2, 1, 0, -1, 1), (3, 2, 1, 0, -1, 1)) \\ \bar{X}_{-1} &= \bar{X}((3, 2, 1, 0, -1, 1), (3, 1, 0, -1, -2, 1)). \end{aligned}$$

Cas \mathbf{B}_n , bonne parité. Nous supposons que \mathcal{U} est de bonne parité, i.e. les blocs sont tous pairs. Nous illustrons ce cas par l'exemple $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [8, 4, 4, 4, 2]$, de rang 11. Le symbole est encore de la forme (7.6) et dans notre exemple, il est donné par $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ & 2 & 3 \end{pmatrix}$

On définit une sous-algèbre \mathfrak{m} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ de la manière suivante

$$(7.15) \quad \mathfrak{m} \simeq \mathfrak{m}^0 \times \mathcal{A}^1 \times \dots \times \mathcal{A}^k$$

où $\mathfrak{m}^0 \simeq \mathfrak{so}_{2(x_{2k-k}+1)}$, $\mathcal{A}^j \simeq \mathfrak{gl}(x_{2k-2j+1} + x_{2k-2j} - 2(k-j))$, $1 \leq j \leq k$. Dans notre exemple, $\mathfrak{m}^0 \simeq \mathfrak{so}_9(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_4(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_4(\mathbb{C})$.

Comme dans le cas \mathbf{C}_n , on écrit le caractère infinitésimal attaché à \mathcal{U} en coordonnées:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \dots, \lambda_s)$$

avec $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, $\lambda_s \geq 0$. Les λ_i sont des demi-entiers dans ce cas.

Dans notre exemple, on obtient

$$\lambda = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

On extrait alors de λ la suite strictement décroissante maximale, $\lambda^0 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$. Dans notre exemple, $\lambda^0 = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. On définit les F^j , représentations de dimension finie holomorphe de \mathcal{A}^j à partir de ce qui reste de λ comme dans le cas \mathbf{A} . Dans notre exemple F^1 est la représentation de dimension finie holomorphe de $\mathfrak{gl}(4)$ de caractère infinitésimal $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ (c'est la représentation triviale), et F^2 est le caractère holomorphe de $\mathfrak{gl}(3)$ de caractère infinitésimal $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Lorsque un entier a apparaît avec multiplicité 2 dans le symbole, on vérifie, en utilisant le fait que tous les blocs de $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ sont impairs, que c'est sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{2j} = a & \dots & x_{2k} \\ \dots & & x_{2j+1} = a & \dots & x_{2k-1} \end{pmatrix}.$$

Lorsque l'on enlève ces paires (x_{2j}, x_{2j+1}) avec $x_{2j} = x_{2j+1}$ du symbole, il nous reste donc m paires (x_{2j}, x_{2j+1}) avec $x_{2j+1} > x_{2j}$. Pour une telle paire, on définit la représentation de dimension finie holomorphe \tilde{F}^j de \mathcal{A}^j de la même manière que dans le cas \mathbf{C}_n . Dans notre exemple, on a $m = 1$, \tilde{F}^2 a pour caractère infinitésimal $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

On définit alors, pour tout $1 \leq j \leq k$ tel que $x_{2j} = x_{2j+1}$, les représentations de dimension finie $\mathcal{F}_1^j = F^j \otimes F^j$, pour tout $1 \leq j \leq k$ tel que $x_{2j} < x_{2j+1}$, $\mathcal{F}_1^j = F^j \otimes F^j$, $\mathcal{F}_{-1}^j = F^j \otimes \tilde{F}^j$, et $\mathcal{F}_\varepsilon = \otimes_j \mathcal{F}_{\varepsilon_j}^j$ comme en (7.9) (7.10) et (7.12).

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G dont le facteur de Levi a pour algèbre de Lie \mathfrak{m} . C'est un produit des groupes généraux linéaires d'algèbre de Lie \mathcal{A}^j , $j = 1, \dots, k$, et d'un facteur $G(x_{2k} - k) = \mathbf{SO}_{2(x_{2k}-k)+1}(\mathbb{C})$. Considérons la représentation sphérique $\bar{X}(\lambda^0, \lambda^0)$ de ce groupe⁽²⁾, et définissons \bar{X}_ε comme en (7.13) Le paquet associé à ψ_G par Barbasch et Vogan est alors

$$(7.16) \quad \Pi_{BV}(\mathcal{U}, G) = \{\bar{X}_\varepsilon\}.$$

et la remarque 7.9 est encore valide.

Revenons à notre exemple, où l'on a

$$\bar{X}(\lambda^0, \lambda^0) = \mathbf{Triv}_{\mathbf{SO}_9(\mathbb{C})}, \quad \mathcal{F}_1^1 = \mathbf{Triv}_{\mathbf{GL}_4}, \quad \mathcal{F}_1^2 = \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \det_2, \quad \mathcal{F}_{-1}^2 = \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \circ \det_2.$$

On obtient donc dans ce cas un paquet à 2 éléments :

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \bar{X}\left(\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right), \\ \bar{X}_{-1} &= \bar{X}\left(\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Exemple 7.12. — Le cas triangulaire est ici celui où la partition $d_{\mathcal{U}}$ est de la forme

$$d_{\mathcal{U}} = [2m, 2m, 2m - 2, 2m - 2 \dots, 4, 4, 2, 2].$$

Le symbole est

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \dots & \dots & 2m \\ & 1 & 3 & \dots & 2m-1 & 2m \end{pmatrix}.$$

On a alors $\mathfrak{m} = \mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C}) \times \prod_{j=1}^m \mathfrak{gl}(2j-1)$, $\bar{A}(\mathcal{U}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$, $\bar{X}(\lambda^0, \lambda^0) = \mathbf{Triv}_{\mathbf{SO}_{2m+1}(\mathbb{C})}$, et

$$\mathcal{F}_1^j = \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \det_{2j-1}, \quad \mathcal{F}_{-1}^j = \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \circ \det_{2j-1}.$$

Les induites (7.13) sont dans ce cas irréductibles ([BV85], Prop. 9.11).

Exemple 7.13. — $d_{\mathcal{U}} = [6, 4, 2]$, $d_{\mathcal{O}} = [3, 3, 3, 1, 1, 1]$, $\lambda = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, le symbole est $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{A}(\mathcal{U}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{so}_7(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$, $\lambda^0 = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, F^1 a pour caractère infinitésimal $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et \tilde{F}^1 a pour caractère infinitésimal $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, $\bar{X}(\lambda^0, \lambda^0) = \mathbf{Triv}_{\mathbf{SO}_7(\mathbb{C})}$ et on a deux éléments dans le paquet, qui sont respectivement les sous-quotient irréductibles contenant les K -types minimaux de

$$\mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{Triv}_{\mathbf{SO}_7(\mathbb{C})} \otimes \mathcal{F}_{\pm 1}^1),$$

où encore,

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \bar{X}\left(\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right), \\ \bar{X}_{-1} &= \bar{X}\left(\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

2. C'est la représentation triviale.

Cas \mathbf{B}_n , mauvaise parité. Nous supposons que \mathcal{U} est de mauvaise parité, *i.e.* les blocs sont tous impairs, et ont une multiplicité paire : $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [2d_1 + 1, 2d_1 + 1, \dots, 2d_t + 1, 2d_t + 1]$. Le symbole est encore de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & d_t + 1 & \dots & d_1 + t \\ d_t + 1 & & \dots & d_1 + t \end{pmatrix}$$

On définit une sous-algèbre \mathfrak{m} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ de la manière suivante

$$(7.17) \quad \mathfrak{m} \simeq \mathcal{A}^1 \times \dots \times \mathcal{A}^k$$

où $\mathcal{A}^j = \mathfrak{gl}(2d_j + 1)$, $1 \leq j \leq k$ comme en (7.8). Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G dont le facteur de Levi a pour algèbre de Lie \mathfrak{m} , c'est-à-dire $M \simeq \mathbf{GL}_{2d_1+1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathbf{GL}_{2d_t+1}(\mathbb{C})$. Le paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ est un singleton, l'induite de P à G de la représentation triviale (qui est irréductible).

Cas \mathbf{D}_n , bonne parité. Nous supposons que \mathcal{U} est de bonne parité, *i.e.* les blocs sont tous impairs. Nous illustrons ce cas par l'exemple $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [11, 7, 7, 7, 3, 3]$, de rang 19. En général, le symbole est de la forme

$$(7.18) \quad \begin{pmatrix} x_0 & x_2 & \dots & x_{2k} \\ x_1 & x_3 & \dots & x_{2k+1} \end{pmatrix}$$

Dans notre exemple, on obtient

$$(7.19) \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

On définit une sous-algèbre \mathfrak{m} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ de la manière suivante

$$(7.20) \quad \mathfrak{m} \simeq \mathfrak{m}^0 \times \mathcal{A}^1 \times \dots \times \mathcal{A}^k$$

où $\mathfrak{m}^0 \simeq \mathfrak{so}_{2(x_{2k+1} + x_0 - k)}$, $\mathcal{A}^j \simeq \mathfrak{gl}(x_{2k-2j+2} + x_{2k-2j+1} - 2(k-j) - 1)$, $1 \leq j \leq k$.

On écrit le caractère infinitésimal attaché à \mathcal{U} en coordonnées:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \dots, \lambda_s)$$

avec $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, $\lambda_s \geq 0$. Les λ_i sont des entiers dans ce cas.

Dans notre exemple, on obtient

$$\lambda = (5, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0).$$

On extrait alors de λ la suite strictement décroissante maximale, $\tilde{\lambda}^0 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$. Dans notre exemple, $\tilde{\lambda}^0 = (5, 4, 3, 2, 1, 0)$. On définit les F^j , représentations de dimension finie holomorphe de \mathcal{A}^j à partir de ce qui reste de λ comme dans le cas \mathbf{A} . Dans notre exemple F^1 est la représentation de dimension finie holomorphe de $\mathfrak{gl}(7)$ de caractère infinitésimal $(3, 2, 1, 0, -1, -2, -3)$ (la triviale) et F^2 est le caractère holomorphe de $\mathfrak{gl}(5)$ de caractère infinitésimal $(3, 2, 1, 0, -1)$.

Lorsque un entier a apparaît avec multiplicité 2 dans le symbole, on vérifie, en utilisant le fait que tous les blocs de $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ sont impairs, que c'est sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{2j} = a & \dots & x_{2k} \\ x_1 & \dots & x_{2j-1} = a & \dots & x_{2k+1} \end{pmatrix}$$

Lorsque l'on enlève ces paires (x_{2j-1}, x_{2j}) avec $x_{2j-1} = x_{2j}$ du symbole, il nous reste donc m paires $(x_{2j} - 1, x_{2j})$ avec $x_{2j-1} < x_{2j}$. Pour une telle paire, on définit représentation de dimension finie holomorphe \tilde{F}^j de \mathcal{A}^j de la même manière que dans le cas \mathbf{C}_n . Dans notre exemple, on a $m = 1$, \tilde{F}^2 a pour caractère infinitésimal $(3, 1, 0, -1, -2)$.

On définit alors, pour tout $1 \leq j \leq k$ tel que $x_{2j-1} = x_{2j}$, les représentations de dimension finie $\mathcal{F}_1^j = F^j \otimes F^j$, pour tout $1 \leq j \leq k$ tel que $x_{2j-1} < x_{2j}$, $\mathcal{F}_1^j = F^j \otimes F^j$, $\mathcal{F}_{-1}^j = F^j \otimes \tilde{F}^j$, et $\mathcal{F}_{\epsilon} = \otimes_j \mathcal{F}_{\epsilon_j}^j$ comme en (7.9) (7.10) et (7.12).

On complète $\tilde{\lambda}^0$ pour former λ^0 en ajoutant les opposés de ce qui reste des termes de λ (dans notre exemple, il ne reste que (1), donc $\lambda^0 = (5, 4, 3, 2, 1, 0, -1)$).

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G dont le facteur de Levi a pour algèbre de Lie \mathfrak{m} . C'est un produit des groupes généraux linéaires d'algèbre de Lie \mathcal{A}^j , $j = 1, \dots, k$, et d'un facteur $G(x_{2k+1} + x_0 - k) = \mathbf{SO}_{2(x_{2k+1} + x_0 - k)}(\mathbb{C})$. Considérons la représentation sphérique $\bar{X}(\lambda^0, \lambda^0)$ de ce groupe, et définissons $\bar{X}_{\tilde{\epsilon}}$ comme en (7.13) Le paquet associé à \mathcal{U} par Barbasch et Vogan est alors

$$(7.21) \quad \Pi_{BV}(\mathcal{U}, G) = \{\bar{X}_{\tilde{\epsilon}}\}.$$

et la remarque 7.9 est encore valide.

Revenons à notre exemple, où le paquet compte donc 2 éléments :

$$\bar{X}_1 = \bar{X}(\lambda, \lambda), \quad \bar{X}_{-1} = \bar{X}(\lambda, \mu),$$

avec $\lambda = (5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, 3, 2, 1, 0, -1)$

et $\mu = (5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, 3, 1, 0, -1, -2)$.

Exemple 7.14. — $d_{\mathcal{U}} = [9, 5, 5, 3]$, $\lambda = (4, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$, le symbole est $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\bar{A}(\mathcal{U})$ est trivial, $\mathfrak{m} = \mathfrak{so}_{12}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_5(\mathbb{C})$, $\tilde{\lambda}^0 = (4, 3, 2, 1, 0)$, F^1 a pour caractère infinitésimal $(2, 1, 0, -1, -2)$ (c'est la représentation triviale de $\mathbf{GL}_5(\mathbb{C})$), $\lambda^0 = (4, 3, 2, 1, 0, -1)$, on a un seul élément dans le paquet, le sous-quotient irréductible contenant le K -type minimal de $\text{Ind}_P^G(\bar{X}(\lambda^0, \lambda^0) \otimes \mathbf{Triv}_{\mathbf{GL}_5(\mathbb{C})})$, c'est-à-dire :

$$\bar{X} = \bar{X}((4, 3, 2, 1, 0, 2, 1, 0, -1, -2), (4, 3, 2, 1, 0, 2, 1, 0, -1, -2)).$$

Exemple 7.15. — $d_{\mathcal{U}} = [11, 9, 5, 5, 3, 1]$, $\lambda = (5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$, le symbole est $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\bar{A}(\mathcal{U}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{so}_{12}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_5(\mathbb{C})$, $\tilde{\lambda}^0 = (5, 4, 3, 2, 1, 0)$, F^1 a pour caractère infinitésimal $(4, 3, 2, 1, 0, -1, -2)$, \tilde{F}^1 a pour caractère infinitésimal $(4, 2, 1, 0, -1, -2, -3)$, F^2 a pour caractère infinitésimal $(2, 1, 0, -1, -)$, \tilde{F}^2 a pour caractère infinitésimal $(1, 0, -1, -2)$, $\lambda^0 = (5, 4, 3, 2, 1, 0) = \tilde{\lambda}^0$. Il y a quatre éléments dans le paquet.

$$\begin{aligned} \bar{X}_{1,1} &= \bar{X}((5, 4, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 2, 1, 0, -1), (5, 4, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 2, 1, 0, -1)) \\ \bar{X}_{1,-1} &= \bar{X}((5, 4, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 2, 1, 0), (5, 4, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 1, 0, -1, -2)) \\ \bar{X}_{-1,1} &= \bar{X}((5, 4, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 2, 1, 0, -1), (5, 4, 3, 2, 1, 0, 4, 2, 1, 0, -1, -2, -3, 2, 1, 0, -1)) \\ \bar{X}_{-1,-1} &= \bar{X}((5, 4, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, 2, 1, 0, -1), (5, 4, 3, 2, 1, 0, 4, 2, 1, 0, -1, -2, -3, 1, 0, -1, -2)). \end{aligned}$$

Cas D_n , mauvaise parité. Nous supposons que \mathcal{U} est de mauvaise parité, i.e. les blocs sont tous pairs, et ont une multiplicité paire. $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [2d_1, 2d_1, \dots, 2d_t, 2d_t]$. Le symbole est de la forme

$$\begin{pmatrix} d_t & \dots & d_1 + t - 1 \\ d_t & \dots & d_1 + t - 1 \end{pmatrix}$$

On définit une sous-algèbre \mathfrak{m} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ de la manière suivante

$$(7.22) \quad \mathfrak{m} \simeq \mathcal{A}^1 \times \dots \times \mathcal{A}^t$$

où $\mathcal{A}^j = \mathfrak{gl}(2d_j)$, $1 \leq j \leq t$. Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G dont le facteur de Levi a pour algèbre de Lie \mathfrak{m} , c'est-à-dire $M \simeq \mathbf{GL}_{2d_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathbf{GL}_{2d_t}(\mathbb{C})$. Le paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ est un singleton, l'induite de P à G de la représentation triviale (qui est irréductible).

Cas Mp_n . Nous supposons que \mathcal{U} est de bonne parité, i.e. les blocs sont tous pairs. Nous illustrons ce cas par l'exemple $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [12, 8, 4, 4, 4, 2]$, de rang 17. La règle de calcul pour le

symbole change : posons $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [d_1, \dots, d_t]$. Quitte à ajouter un bloc (0) on suppose que t est impair. On forme la suite strictement croissante

$$(d_t + 1, d_{t-1} + 2, \dots, d_1 + t)$$

Notons $(2x_0 + 1, \dots, 2x_{2k} + 1)$ les termes impairs de cette suite et $(2x_1, \dots, 2x_{2k-1})$ les termes pairs. Le symbole est alors

$$(7.23) \quad \begin{pmatrix} x_0 & & x_2 & & \dots & & & & x_{2k} \\ & x_1 & & x_3 & & \dots & & x_{2k-1} & \end{pmatrix}$$

et dans notre exemple, il est donné par $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 9 \\ & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

A partir de ce symbole, on retrouve $\bar{A}^{Mp}(\mathcal{U})$ par une recette très similaire à celle du cas \mathbf{C}_n : chaque couple (x_{2j-1}, x_{2j}) avec $x_{2j-1} < x_{2j}$ contribue d'un facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais en plus, si $x_0 = d_1/2 \neq 0$, on a un facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ supplémentaire. Dans notre exemple, c'est donc $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. La règle qui donne le caractère infinitésimal est la même que dans les autres cas, dans l'exemple on obtient

$$\left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Le reste se calcule à partir de ce caractère infinitésimal en suivant aussi la recette du cas \mathbf{C}_n , mais si $x_0 = d_1/2$ n'est pas nul, il faut remplacer le facteur $\mathbf{Sp}_{2x_0}(\mathbb{C})$ par un facteur $\mathbf{Mp}_{2x_0}(\mathbb{C})$, et la représentation triviale de celui-là par les deux représentations métaplectiques. Dans notre exemple, on commence par extraire $(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ puis on remonte en prenant les opposés, ce qui donne une représentation holomorphe F^1 de caractère infinitésimal $(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2})$ d'un facteur $\mathbf{GL}_{10}(\mathbb{C})$, une représentation \tilde{F}^1 de caractère infinitésimal $(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{9}{2})$ et les deux représentations $\mathcal{F}_1^1 = F^1 \otimes F^1$ et $\mathcal{F}_{-1}^1 = F^1 \otimes \tilde{F}^1$. Ensuite, on extrait $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ puis on remonte en prenant les opposés, ce qui donne une représentation holomorphe F^2 de caractère infinitésimal $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ d'un facteur $\mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$, et la représentation $\mathcal{F}^2 = F^2 \otimes F^2 = \mathbf{Triv}_{\mathbf{GL}_4(\mathbb{C})}$. Enfin, on extrait $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ puis on remonte en prenant les opposés, ce qui donne une représentation holomorphe F^3 de caractère infinitésimal $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ de $\mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$, une représentation holomorphe \tilde{F}^3 de caractère infinitésimal $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ et les deux représentations $\mathcal{F}_1^3 = F^3 \otimes F^3$ et $\mathcal{F}_{-1}^3 = F^3 \otimes \tilde{F}^3$. On obtient 4 représentations dans notre paquet, les sous-quotients de Langlands des induites d'un sous-groupe parabolique P de facteur de Levi $M \simeq \mathbf{GL}_{10}(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$

$$\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{F}_{\pm}^1 \otimes \mathcal{F}^2 \otimes \mathcal{F}_{\pm}^3).$$

Une autre manière de comprendre cette recette est de voir que l'on retrouve bien la construction des paquets par la correspondance de Howe (cf. [Mœg]). En effet, partons d'une orbite \mathcal{U} de partition $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ et considérons l'orbite \mathcal{U}^- obtenue en enlevant le plus grand bloc d_1 (pair). Calculons le paquet de $\mathbf{SO}_{2n-d_1+1}(\mathbb{C})$ correspondant à cette orbite \mathcal{U}^- . Dans notre cas, $\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-} = [8, 4, 4, 4, 2]$, et c'est l'exemple du cas \mathbf{B}_n . On avait un paquet à 2 éléments, car $\bar{A}(\mathcal{U}^-) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $d_1 > d_2$ chacune des représentations du paquet de $\mathbf{SO}_{2n-d_1}(\mathbb{C})$ s'étend de deux manières différentes en une représentation de $\mathbf{O}_{2n-d_1+1}(\mathbb{C})$, et ces deux représentations ont une image par la correspondance de Howe entre $\mathbf{O}_{2n-d_1+1}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{Mp}_{2n}(\mathbb{C})$. On voit en comparant les symboles que l'on a bien ajouté un facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en passant de \mathcal{U}^- à \mathcal{U} . C'est le cas dans notre exemple. En revanche, si $d_1 = d_2$, une seule des deux représentations étendues à $\mathbf{O}_{2n-d_1+1}(\mathbb{C})$ possède une image par la correspondance de Howe, et il n'y a pas de facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ supplémentaire. Par exemple, pour l'orbite $[8, 8, 4, 4, 4, 2]$, on obtient le symbole $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 \\ & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $\bar{A}^{Mp}(\mathcal{U}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dans les exemples donnés ci-dessus, nous sommes partis d'une partition ayant un nombre pair de termes, il a donc fallu ajouter un bloc 0 pour calculer le symbole, d'où un $x_0 = 0$.

Voyons ce qui se passe lorsque la partition de départ à un nombre impair de termes. Disons $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [12, 8, 4, 4, 2]$. Le symbole est alors $\begin{pmatrix} 1 & & 3 & & 9 \\ & 3 & & 6 & \\ & & & & \end{pmatrix}$, et $\bar{A}^{Mp}(\mathcal{U}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Le 1 dans ce symbole contribue à un facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et dans la construction des représentations du paquets comme sous-quotient de Langlands d'induites paraboliques, il donne un facteur $\mathbf{Mp}_2(\mathbb{C})$ au sous-groupe de Levi du parabolique. Sur ce facteur, nous mettons les deux représentations métaplectiques $\bar{X}((1/2), (1/2))$ et $\bar{X}((1/2), (-1/2))$. Si on applique la recette avec la correspondance de Howe, on part de l'orbite $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [8, 4, 4, 2]$ qui a pour symbole $\begin{pmatrix} 0 & & 3 & & 6 \\ & 1 & & 3 & \\ & & & & \end{pmatrix}$, et $\bar{A}(\mathcal{U}^-) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme il se doit.

8. Lemmes de réduction

Dans cette section, on étudie l'effet de l'induction parabolique. Plus précisément, on fixe un parabolique maximal de G dont le Levi est isomorphe à un groupe $\mathbf{GL}_a(\mathbb{C}) \times G^-$ où G^- est de même type que G . On considère les induites du caractère trivial de $\mathbf{GL}_a(\mathbb{C}) \times G^-$ avec une représentation spéciale unipotente de G^- . Ces induites ont déjà été considérées dans [BV85] et on traduit les résultats de *loc. cit.* en termes combinatoires.

Commençons par introduire quelques notations commodes. On note $\{0\}_{\mathfrak{g}}$ l'orbite adjointe nilpotente $\{0\}$ dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, on la note plus simplement $\{0\}_n$.

Soient G un groupe classique complexe, et $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M isomorphe à $(\times_i \mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{C})) \times G^-$, où G^- est un groupe classique de même type que G . Soit \mathcal{O}^- une orbite nilpotente dans \mathfrak{g}^- . On note $(\star_i \{0\}_{n_i}) \star \mathcal{O}^-$ l'orbite induite (voir [LS79] ou [BV85], (4.13)) de \mathfrak{m} à \mathfrak{g} de $(\times_i \{0\}_{n_i}) \times \mathcal{O}^-$.

Nous allons utiliser le résultat suivant, qui est une version plus précise de la proposition 12.5 de [BV85] et de la proposition 6.6 de [Bar89].

Proposition 8.1. — *Soient G un groupe classique complexe de rang n , \mathcal{U} une orbite nilpotente de bonne parité de ${}^L\mathfrak{g}$, $P = MN$ un sous-groupe parabolique maximal de G de facteur de Levi M isomorphe à $\mathbf{GL}_{n_1}(\mathbb{C}) \times G^-$, où G^- est un groupe classique de même type que G de rang $n - n_1$, \mathcal{U}^- une orbite nilpotente spéciale paire de ${}^L\mathfrak{g}^-$. Supposons que, $\{0\}_{n_1} \times \mathcal{U}^-$ soit contenue dans l'intersection de \mathcal{U} et de \mathfrak{m} . Alors si l'on note \mathcal{O} et \mathcal{O}^- les orbites duales respectivement de \mathcal{U} et \mathcal{U}^- , on a $\mathcal{O} = \{0\}_{n_1} \star \mathcal{O}^-$. Supposons de plus qu'il existe une représentation de dimension finie \mathcal{F} de $\mathfrak{gl}_{n_1}(\mathbb{C})$ tel que pour tout élément $\bar{X}^- \in \Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$,*

$$\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{F} \otimes \bar{X}^-)$$

ait pour caractère infinitésimal celui des éléments de $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$. Alors tout les sous-quotients irréductibles de $\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{F} \otimes \bar{X}^-)$ sont dans $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$.

Dans le cas où \mathcal{F} est la représentation triviale \mathbf{Triv}_{n_1} , qui est le cas qui nous intéresse, la représentation induite est semi-simple et nous pouvons décrire ses composantes irréductibles comme suit. Rappelons que les éléments de $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$ sont paramétrés par les éléments de $\widehat{\bar{A}(\mathcal{U}^-)}$, et de même pour $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ et $\widehat{\bar{A}(\mathcal{U})}$. On a une inclusion naturelle de $A(\mathcal{U}^-)$ dans $A(\mathcal{U})$. Un caractère de $\widehat{\bar{A}(\mathcal{U})}$ peut être vu comme un caractère de $A(\mathcal{U})$ trivial sur le noyau de la projection $A(\mathcal{U}) \rightarrow \bar{A}(\mathcal{U})$, et de même pour $\widehat{\bar{A}(\mathcal{U}^-)}$ et $A(\mathcal{U}^-)$. Quels que soient $\eta^- \in \widehat{\bar{A}(\mathcal{U}^-)}$ et $\eta \in \widehat{\bar{A}(\mathcal{U})}$, notons $m(\eta^-, \eta|_{A(\mathcal{U}^-)})$ la multiplicité de η^- dans la restriction de η à $A(\mathcal{U}^-)$ (ce sont des caractères, donc cette multiplicité vaut 0 ou 1, et ceci exactement lorsque la restriction de η à $A(\mathcal{U}^-)$ est égale à η^-). Pour tout $\eta \in \widehat{\bar{A}(\mathcal{U})}$ (resp. $\eta^- \in \widehat{\bar{A}(\mathcal{U}^-)}$), soit \bar{X}_{η} (resp. \bar{X}_{η^-})

l'élément de $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$ (resp. $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$) correspondant. On a alors

$$(8.1) \quad \mathbf{Triv}_{n_1} \star \bar{X}_{\eta^-}^- = \text{Ind}_P^G(\mathbf{Triv}_{n_1} \otimes \bar{X}_{\eta^-}^-) = \bigoplus_{\eta \in \widehat{A}(\mathcal{U}^-)} m(\eta^-, \eta|_A(\mathcal{U})) \bar{X}_\eta.$$

Démonstration. Par hypothèse, pour tout $\bar{X}^- \in \Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$, $X := \text{Ind}_P^G(\mathcal{F} \otimes \bar{X}^-)$, ainsi que tous ses sous-quotients irréductibles ont bien le caractère infinitésimal requis. Soit \bar{Y} un de ses sous-quotients irréductibles. Son front d'onde $\text{WF}(\bar{Y})$ est contenu dans celui de X , qui est $\bar{\mathcal{O}} = \{0\}_{n_1} \star \mathcal{O}^-$ d'après [BV85], (1.9). Or la dimension du front d'onde de \bar{Y} est au moins celle de \mathcal{O} d'après [BV85], Cor. 5.19, et comme ce front d'onde est l'adhérence d'une orbite nilpotente, cette orbite ne peut être que \mathcal{O} . On sait que $\{0\}_{n_1} \star \mathcal{O}^-$ est l'orbite duale de \mathcal{U} (cf. par exemple [Spa82] 11.7 page 217, ou mieux un calcul à la main) et par hypothèse \mathcal{U} est une orbite paire. Ceci montre que \bar{Y} satisfait aux conditions de [BV85] pour être dans $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$.

La formule (8.1) se démontre alors à partir des formules de caractères pour les représentations spéciales unipotentes établies dans [BV85] comme dans la proposition 12.5 de cet article. \square

8.1. Effet de l'ajout de deux blocs de même taille de bonne parité, cas C_n . — On suppose que G est un groupe symplectique de rang n . Soient \mathcal{U} une orbite nilpotente de bonne parité de ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ et \mathcal{O} l'orbite duale dans \mathfrak{g} . Soient $d_{\mathcal{U}}$ et $d_{\mathcal{O}}$ les partitions de $2n+1$ et $2n$ respectivement associées à ces orbites.

Les blocs de $d_{\mathcal{U}}$ sont donc impairs, et il y en a un nombre impair on peut donc écrire

$$d_{\mathcal{U}} = [2(x_{2p}-p)+1, 2(x_{2p-1}-p)+1, \dots, 2(x_{2p-2j+2}-p+j)-1, 2(x_{2p-2j+1}-p+j)-1, \dots, 2x_2-1, 2x_1-1, 2x_0+1]$$

de sorte que le symbole est

$$(8.2) \quad \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2p} \\ \dots & x_{2j-1} & \dots & x_{2p-1} \end{pmatrix}$$

Ajoutons 2 blocs de taille $2M+1$ à $d_{\mathcal{U}}$, pour former une nouvelle partition $d_{\mathcal{U}^+}$, correspondant à une orbite nilpotente \mathcal{U}^+ dans ${}^L\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{so}_{2(n+2M+1)+1}$. Soient \mathcal{O}^+ sa duale dans $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{sp}_{2(n+2M+1)}$. On a $\mathcal{O}^+ = \{0\}_{2M+1} \star \mathcal{O}$. On obtient $d_{\mathcal{O}^+}$ en ajoutant 2 aux $2M+1$ premiers blocs de $d_{\mathcal{O}}$ et en prenant le “ C -collapse” de la partition obtenue. Ceci est mentionné dans [Bar89], en haut de la page 174, et l'on s'en convainc en faisant l'exercice combinatoire.

Si $M < x_0$, le symbole devient :

$$(8.3) \quad \begin{pmatrix} M & x_0+1 & \dots & \dots & x_{2p}+1 \\ M+1 & \dots & \dots & x_{2p-1}+1 \end{pmatrix}$$

S'il existe j tel que $x_{2j-1} < M+j < x_{2j}$, le symbole devient :

$$(8.4) \quad \begin{pmatrix} x_0 & \dots & M+j & x_{2j}+1 & \dots & x_{2p}+1 \\ \dots & x_{2j-1} & M+j+1 & \dots & x_{2p-1}+1 \end{pmatrix}$$

Si $x_{2j} \leq M+j \leq x_{2j+1}-1$ (on pose ici $x_{2p+1} = +\infty$ par convention) le symbole devient

$$(8.5) \quad \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{2j} & M+j+1 & x_{2j+2}+1 & \dots \\ \dots & x_{2j-1} & M+j+1 & x_{2j+1}+1 & \dots \end{pmatrix}$$

Proposition 8.2. — *Le paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^+, G^+)$ est l'ensemble des facteurs de composition des $\mathbf{Triv}_{2M+1} \star \bar{X}$, où \bar{X} décrit $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$. Les représentations induites $\mathbf{Triv}_{2M+1} \star \bar{X}$ sont soit irréductibles et l'on pose alors $\bar{X}_0^+ = \mathbf{Triv}_{2M+1} \star \bar{X}$, soit de longueur 2 et l'on pose $\bar{X} \star \mathbf{Triv}_{2M+1} = \bar{X}_1^+ \oplus \bar{X}_{-1}^+$.*

Démonstration. Il est clair que pour tout $\bar{X} \in \Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$, $\mathbf{Triv}_{2M+1} \star \bar{X}$, ainsi que tous ses sous-quotients irréductibles ont bien le caractère infinitésimal requis. On peut donc appliquer la proposition 8.1. La formule (8.1) montre que $\mathbf{Triv}_{2M+1} \star \bar{X}$ est de longueur

$$(8.6) \quad |\bar{A}(\mathcal{U}^+)| / |\bar{A}(\mathcal{U})| = |\Pi_{BV}(\mathcal{U}^+, G^+)| / |\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)| = 1 \text{ ou } 2.$$

D'autre part, si $\bar{X} = \bar{X}(\lambda, \mu)$, alors $\bar{X} \star \mathbf{Triv}_{2M+1}$ contient le sous-quotient de Langlands $\bar{X}(\lambda^+, \mu^+)$, où λ^+ et μ^+ sont obtenus respectivement à partir de λ et μ en ajoutant les coordonnées $(M, M-1, \dots, -M)$. Comme $\bar{X} \star \mathbf{Triv}_{2M+1}$ est un sous-quotient de $X(\lambda^+, \mu^+)$ et que $\bar{X}(\lambda^+, \mu^+)$ a multiplicité 1 dans $X(\lambda^+, \mu^+)$, on voit que $\bar{X}(\lambda^+, \mu^+)$ apparaît avec multiplicité 1 dans $\bar{X} \star \mathbf{Triv}_{2M+1}$. cette représentation étant de longueur au plus deux, elle est sans multiplicité.

Dans le cas (8.5), (8.6) vaut 1 et l'on en déduit que pour tout $\bar{X} \in \Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$, $\mathbf{Triv}_{2M+1} \star \bar{X}$ est irréductible. On note \bar{X}_0^+ cette représentation.

Dans les cas (8.3) et (8.4), (8.6) vaut 2. En effet, dans le cas (8.3) $\bar{A}(\mathcal{U}^+) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \bar{A}(\mathcal{U}^+)$, le facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ supplémentaire venant de la paire $(M+1, x_0+1)$ dans le symbole, et dans le cas (8.4), la contribution d'un facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dû à la paire (x_{2j-1}, x_{2j}) est remplacée par un facteur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ dû aux paires $(x_{2j-1}, M+j)$ et $(M+j+1, x_{2j}+1)$. Ainsi $\mathbf{Triv}_{2M+1} \star \bar{X}$ est de longueur 2, et l'on pose $\mathbf{Triv}_{2M+1} \star \bar{X} = \bar{X}_1^+ \oplus \bar{X}_{-1}^+$. La description explicite des éléments des paquets $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^+, G^+)$ et $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ faite dans la section 7 particulièrement en (7.14) nous dit exactement ce que sont les \bar{X}_0^+ , \bar{X}_1^+ et \bar{X}_{-1}^+ ci-dessus. Si \bar{X} est paramétré par $\hat{\epsilon}$ (que l'on identifie à un caractère de $\bar{A}(\mathcal{U})$), alors dans le cas (8.5), \bar{X}_0^+ est paramétré par le même $\hat{\epsilon}$, et dans les cas (8.3) et (8.4), \bar{X}_1^+ et \bar{X}_{-1}^+ sont paramétrés respectivement par $\hat{\epsilon}^\pm$, obtenus en mettant ± 1 sur le facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que l'on a ajouté. \square

8.2. Effet de l'ajout de deux blocs même taille de bonne parité, cas B_n . — On suppose que G est un groupe orthogonal impair de rang n . Soient \mathcal{U} une orbite nilpotente de bonne parité de ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ et \mathcal{O} l'orbite duale dans \mathfrak{g} . Soient $d_{\mathcal{U}}$ et $d_{\mathcal{O}}$ les partitions de $2n$ et $2n+1$ respectivement associées à ces orbites.

Les blocs de $d_{\mathcal{U}}$ sont donc pairs, et quitte à rajouter le bloc 0, il y en a un nombre impair on peut donc écrire

$$d_{\mathcal{U}} = [2(x_{2p}-p), 2(x_{2p-1}-p+1), \dots, 2(x_{2p-2j}-p+j), 2(x_{2p-2j-1}-p+j+1), \dots, 2x_2-2, 2x_1, 2x_0]$$

de sorte que le symbole est

$$(8.7) \quad \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2p} & x_{2p} \\ & & \dots & & \dots & \dots \\ & & & x_{2j+1} & \dots & x_{2p-1} \end{pmatrix}$$

Ajoutons 2 blocs de taille $2M$ à $d_{\mathcal{U}}$, pour former une nouvelle partition $d_{\mathcal{U}^+}$, correspondant à une orbite nilpotente \mathcal{U}^+ dans ${}^L\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{sp}_{2(n+2M)}$. Soient \mathcal{O}^+ sa duale dans $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{so}_{2(n+2M)+1}$. On a $\mathcal{O}^+ = \{0\}_{2M} \star \mathcal{O}$. On obtient $d_{\mathcal{O}^+}$ en ajoutant 2 aux $2M$ premiers blocs de $d_{\mathcal{O}}$ et en prenant le “ B -collapse” de la partition obtenue.

Si $M > x_{2p} - p$, le symbole devient :

$$(8.8) \quad \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2p} & M+p+1 \\ & & \dots & & \dots & \dots \\ & & & x_{2j+1} & \dots & x_{2p-1} \\ & & & & & M+p \end{pmatrix}$$

S'il existe j tel que $x_{2j} < M+j < x_{2j+1}$, le symbole devient :

$$(8.9) \quad \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{2j} & M+j+1 & \dots & x_{2p}+1 \\ & & \dots & M+j & \dots & \dots \\ & & & & x_{2j+1}+1 & \dots \\ & & & & & x_{2p-1}+1 \end{pmatrix}$$

Si $x_{2j-1}+1 \leq M+j \leq x_{2j}$ (on pose ici $x_{-1} = -\infty$ par convention) le symbole devient

$$(8.10) \quad \begin{pmatrix} x_0 & \dots & M+j & x_{2j}+1 & \dots & x_{2p}+1 \\ & & \dots & M+j & \dots & \dots \\ & & & x_{2j-1} & \dots & x_{2p-1}+1 \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas \mathbf{C}_n ,

$$(8.11) \quad |\bar{A}(\mathcal{U}^+)| / |\bar{A}(\mathcal{U})| = |\Pi_{BV}(\mathcal{U}^+, G^+)| / |\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)| = 1 \text{ ou } 2,$$

et plus précisément, ceci vaut 1 dans le cas (8.10), et 2 dans les cas (8.8), et (8.9). La proposition 8.2 est alors valide dans ce contexte :

Proposition 8.3. — *Le paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^+, G^+)$ est l'ensemble des facteurs de composition des $\mathbf{Triv}_{2M} \star \bar{X}$, où \bar{X} décrit $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$. Les représentations induites $\mathbf{Triv}_{2M} \star \bar{X}$ sont irréductibles dans le cas (8.10) et l'on pose alors $\bar{X}_0^+ = \mathbf{Triv}_{2M} \star \bar{X}$, et de longueur 2 dans les cas (8.8), et (8.9), et l'on pose alors $\mathbf{Triv}_{2M+1} \star \bar{X} = \bar{X}_1^+ \oplus \bar{X}_{-1}^+$.*

8.3. Effet de l'ajout de deux blocs même taille de bonne parité, cas \mathbf{D}_n . — On suppose que G est un groupe orthogonal pair de rang n . Soient \mathcal{U} une orbite nilpotente de bonne parité de ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ et \mathcal{O} l'orbite duale dans \mathfrak{g} . Soient $d_{\mathcal{U}}$ et $d_{\mathcal{O}}$ les partitions de $2n$ respectivement associées à ces orbites.

Les blocs de $d_{\mathcal{U}}$ sont donc impairs, et il y en a un nombre pair on peut donc écrire

$$d_{\mathcal{U}} = [2(x_{2p+1}-p)-1, 2(x_{2p}-p)+1, \dots, 2(x_{2p-2j+1}-p+j)-1, 2(x_{2p-2j}-p+j)+1, \dots, 2x_2-1, 2x_1-1, 2x_0+1]$$

de sorte que le symbole est

$$(8.12) \quad \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2p} \\ x_1 & \dots & x_{2j+1} & \dots & x_{2p+1} \end{pmatrix}$$

Ajoutons 2 blocs de taille $2M+1$ à $d_{\mathcal{U}}$, pour former une nouvelle partition $d_{\mathcal{U}^+}$, correspondant à une orbite nilpotente \mathcal{U}^+ dans ${}^L\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{so}_{2(n+2M+1)}$. Soient \mathcal{O}^+ sa duale dans $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{so}_{2(n+2M+1)}$. On a $\mathcal{O}^+ = \{0\}_{2M+1} \star \mathcal{O}$. On obtient $d_{\mathcal{O}^+}$ en ajoutant 2 aux $2M+1$ premiers blocs de $d_{\mathcal{O}}$ et en prenant le “ D -collapse” de la partition obtenue.

S'il existe j tel que $x_{2j-1} < M+j < x_{2j}$, le symbole devient :

$$(8.13) \quad \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{2j-2} & M+j & x_{2j}+1 & \dots & x_{2p}+1 \\ x_1 & \dots & x_{2j-1} & M+j+1 & x_{2j+1}+1 & \dots & x_{2p+1}+1 \end{pmatrix}$$

Si $x_{2j} \leq M+j \leq x_{2j+1}-1$ (on pose ici $x_{-1} = -\infty$ et $x_{2p+1} = +\infty$ par convention) le symbole devient

$$(8.14) \quad \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{2j} & M+j+1 & x_{2j+2}+1 & \dots & x_{2p}+1 \\ x_1 & \dots & M+j+1 & x_{2j+1}+1 & \dots & \dots & x_{2p+1}+1 \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas \mathbf{C}_n ,

$$(8.15) \quad |\bar{A}(\mathcal{U}^+)| / |\bar{A}(\mathcal{U})| = |\Pi_{BV}(\mathcal{U}^+, G^+)| / |\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)| = 1 \text{ ou } 2,$$

et plus précisément, ceci vaut 1 dans le cas (8.14), et 2 dans le cas (8.9). La proposition 8.2 est alors valide dans ce contexte.

8.4. Ajout de blocs de mauvaise parité. — Dans les sections qui suivent, on se préoccupe de l'ajout de deux blocs de mauvaise parité. La situation générale est la suivante: soit a un entier de mauvaise parité et soit \mathcal{U}^- une orbite nilpotente de ${}^L\mathfrak{g}^-$ de bonne parité pour un groupe G^- de même type que G mais de rang a de moins. On suppose que l'orbite \mathcal{U}' de \mathfrak{g} obtenue en ajoutant deux fois a à la partition définissant \mathcal{U}^- n'est pas spéciale. On note alors \mathcal{U} la plus petite orbite spéciale contenant \mathcal{U}' . Elle s'obtient en ajoutant à la partition définissant \mathcal{U}^- , les entiers $a+1$ et $a-1$. On note \mathcal{O}^- l'orbite duale de \mathcal{U}^- et \mathcal{O} l'orbite induite $\{0\}_a \star \mathcal{O}^-$. Alors \mathcal{U} est l'orbite duale de \mathcal{O} . On peut déduire cette assertion de [Spa82] III.11.7, avec une petite difficulté car la dualité considérée par Spaltenstein n'est pas exactement celle considérée ici. Spaltenstein a défini sa dualité sans passer au groupe dual expliquant en [Spa82] III.10.3 le passage de l'une des dualités à l'autre. On préfère redonner une démonstration dans les cas importants pour nous en laissant au lecteur le soin de généraliser.

8.4.1. *Un lemme d'induction, cas \mathbf{C}_n .* — Dans ce paragraphe, on suppose que G est un groupe symplectique de rang n . Soient \mathcal{U} une orbite nilpotente de bonne parité de ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ et \mathcal{O} l'orbite duale dans \mathfrak{g} . Soient $d_{\mathcal{U}}$ et $d_{\mathcal{O}}$ les partitions de $2n+1$ et $2n$ respectivement associées à ces orbites.

Ecrivons $d_{\mathcal{U}} = [2d_1 + 1, 2d_2 + 1, 2d_3 + 1, \dots, 2d_t + 1]$.

Lemme 8.4. — *On suppose que $d_1 = d_2 + 1$. Soit \mathcal{U}^- l'orbite correspondant à la partition $d_{\mathcal{U}^-} = [2d_3 + 1, \dots, 2d_t + 1]$ obtenue à partir de $d_{\mathcal{U}}$ en supprimant les deux premiers blocs. Alors $\mathcal{O} = \{0\}_{2d_1} \star \mathcal{O}^-$. De plus \mathcal{O} est aussi l'orbite duale de l'orbite \mathcal{U}' dont la partition est obtenue à partir de celle de \mathcal{U}^- en ajoutant deux fois $2d_1$.*

Démonstration. On note \mathcal{O}^- l'orbite duale de \mathcal{U}^- . Rappelons (cf. [CM93]) que l'on obtient les partitions correspondantes $\mathbf{d}_{\mathcal{O}}$ et $\mathbf{d}_{\mathcal{O}^-}$ à partir respectivement de $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ et $\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-}$ en prenant les partitions transposées, ${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ et ${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-}$ et en calculant leur “ C -collapse”. Le plus grand bloc de ${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ est t et celui de ${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-}$ est $t-2$, et ces blocs sont impairs, de multiplicité $2d_t + 1$. En revanche, les multiplicités des autres blocs sont pairs, car elles sont de la forme $2d_j + 1 - (2d_{j+1} + 1) = 2(d_j - d_{j+1})$ pour des j tels que $d_j > d_{j+1}$. Notons

$${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-} = [a_1 = t - 2, \dots, a_{2d_3+1}].$$

On a alors

$${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [a_1 + 2 = t, \dots, a_{2d_3+1} + 2, 2, \dots, 2, 1, 1]$$

où la multiplicité de 2 est $2(d_2 - d_3)$ et celle de 1 est 2. Pour obtenir le “ C -collapse” de ${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-}$, on procède de la manière suivante. On note i_0 le plus grand indice tel que $a_{i_0} = a_1$ et i'_0 le plus grand indice tel que $a_{i'_0} < a_1$ et $a_{i'_0}$ est impair. On définit ensuite i_1 comme grand indice tel que $a_{i_1} = a_{i_0}$ et i'_1 le plus grand indice, s'il existe, tel que $a_{i'_1} < a_{i_0}$ et $a_{i'_1}$ est impair, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à un indice tel que i_l soit défini, mais pas i'_l . Le “ C -collapse” de ${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-}$ est alors obtenue en remplaçant, pour $s = 0, \dots, l$, les a_{i_s} par $a_{i_s} - 1$ et pour $s = 0, \dots, l-1$, les $a_{i'_s}$ par $a_{i'_s} + 1$. On obtient $\mathbf{d}_{\mathcal{O}^-}$, qui a $2d_3 + 1$ termes si $a_{2d_3+1} > 1$ et $2d_3$ termes si $a_{2d_3+1} = 1$.

Pour obtenir $\mathbf{d}_{\mathcal{O}}$, on procède de même, à partir de ${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ pour calculer son “ C -collapse”. On remarque que les suites d'indices qui apparaissent coïncident jusqu'au rang l , mais ici i'_l est défini, et vaut $2d_1$, $i_{l+1} = 2d_1 + 1$ et i'_{l+1} n'est pas défini. La partition $\mathbf{d}_{\mathcal{O}}$ se déduit de $\mathbf{d}_{\mathcal{O}^-}$ en ajoutant 2 à tous les blocs, puis en ajoutant $2(d_2 - d_3) + 1$ (resp. $2(d_2 - d_3) + 2$) blocs de longueur 2 si $a_{2d_3+1} > 1$ (resp. si $a_{2d_3+1} = 1$). Ceci est bien l'orbite induite $\mathcal{O}^- \star \{0\}_{2d_1}$. Cela démontre la première assertion du lemme. Pour la deuxième, on procède de la même façon en partant de \mathcal{U}' au lieu de \mathcal{U} . Quand on calcule ${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}'}$, on obtient la même partition que ${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ sauf que le nombre 2 intervient $2(d_2 - d_3 + 1)$ et le nombre 1 n'intervient pas. Le “ C -collapse” de cette partition est le même que celui de ${}^t\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$. \square

Corollaire 8.5. — *Soient $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ et $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$ les paquets associés par Barbasch-Vogan aux orbites \mathcal{U} et \mathcal{U}^- respectivement pour les groupes $G = \mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ et $G^- = \mathbf{Sp}_{2(n-2d_1)}(\mathbb{C})$. Supposons que $\bar{A}(\mathcal{U}^-) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$, de sorte que le cardinal de $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$ soit 2^m . Considérons les représentations induites de $G^- \times \mathbf{GL}_{2d_1}(\mathbb{C})$ à G :*

$$(8.16) \quad X_1 = (\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \det_{2d_1}) \star \bar{X}^-, \quad X_{-1} = (\chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \circ \det_{2d_1}) \star \bar{X}^-$$

lorsque \bar{X}^- décrit $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$, et leur sous-quotient de Langlands respectifs \bar{X}_1 et \bar{X}_{-1} . Alors les 2^{m+1} représentations \bar{X}_1 et \bar{X}_{-1} sont non équivalentes deux à deux, et constituent donc les 2^{m+1} représentations unipotentes du paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$. De plus les X_{-1} sont irréductibles, donc $X_{-1} = \bar{X}_{-1}$.

Démonstration. Le symbole de \mathcal{U} s'obtient à partir de celui de \mathcal{U}^- en ajoutant $\begin{matrix} d_1 + t \\ d_2 + t \end{matrix}$ à la droite de celui-ci. On voit donc que $\bar{A}(\mathcal{U})$ possède un facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ supplémentaire, et le cardinal de $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ est 2^{m+1} .

Les induites (8.16), ainsi que leurs sous-quotients irréductibles, ont bien le même caractère infinitésimal que celui des représentations du paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$. On peut alors appliquer la première partie de la proposition 8.2 qui nous dit que les sous-quotients irréductibles de X_1 et X_{-1} sont dans le paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$. Supposons que $\bar{X}^- = \bar{X}(\lambda^-, \mu^-)$, avec

$$\lambda^- = (\lambda_1^-, \dots, \lambda_{n-2d_1}^-), \quad \mu^- = (\mu_1^-, \dots, \mu_{n-2d_1}^-).$$

Posons

$$\begin{aligned} \lambda &= (d_1, d_1 - 1, \dots, -d_1 + 1, \lambda_1^-, \dots, \lambda_{n-2d_1}^-), \\ \mu &= (d_1, d_1 - 1, \dots, -d_1 + 1, \mu_1^-, \dots, \mu_{n-2d_1}^-), \\ \mu' &= (d_1 - 3, d_1 - 1, \dots, -d_1 - 1, \mu_1^-, \dots, \mu_{n-2d_1}^-). \end{aligned}$$

Alors $\bar{X}_1 = \bar{X}(\lambda, \mu)$ et $\bar{X}_{-1} = \bar{X}(\lambda, \mu')$.

Il est clair que les 2^{m+1} sous-quotients irréductibles ainsi obtenus en faisant varier \bar{X} dans $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ sont non équivalents deux à deux et donc décrivent entièrement $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$. Ainsi, tous les sous-quotients irréductibles des X_1 et X_{-1} se trouvent parmi les \bar{X}_1 et \bar{X}_{-1} .

D'autre part, si X_1 (resp. X_{-1}) possède un autre sous-quotient irréductible que \bar{X}_1 (resp. \bar{X}_{-1}), on voit facilement avec le lemme 5.3 que celui-ci est \bar{X}_{-1} (resp. n'existe pas). Ceci montre en particulier que $X_{-1} = \bar{X}_{-1}$. \square

Remarque 8.6. — Le lemme se généralise en remplaçant les blocs d_1 et $d_2 = d_1 - 2$ par n'importe quelle paire (d_{2j-1}, d_{2j}) avec $d_{2j} = d_{2j-1} - 2$ et c'est exactement ce qui est annoncé au début du paragraphe.

8.4.2. Un lemme d'induction, cas \mathbf{B}_n . — On suppose que G est un groupe orthogonal impair de rang n . Soient \mathcal{U} une orbite nilpotente de bonne parité de ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ et \mathcal{O} l'orbite duale dans \mathfrak{g} . Soient $d_{\mathcal{U}}$ et $d_{\mathcal{O}}$ les partitions de $2n$ et $2n + 1$ respectivement associées à ces orbites.

Ecrivons $d_{\mathcal{U}} = [2d_1, 2d_2, 2d_3, \dots, 2d_t]$.

Lemme 8.7. — *On suppose que $d_2 = d_3 + 1$. Soit \mathcal{U}^- l'orbite correspondant à la partition $d_{\mathcal{U}^-} = [2d_1, 2d_4, \dots, 2d_t]$ obtenue à partir de $d_{\mathcal{U}}$ en supprimant les deuxième et troisième blocs. Alors $\mathcal{O} = \{0\}_{2d_2-1} \star \mathcal{O}^-$ et c'est aussi l'orbite duale de l'orbite \mathcal{U}' obtenue en ajoutant à la partition définissant \mathcal{U}^- deux fois le nombre $2d_2 - 1$.*

Démonstration. On note \mathcal{O}^- l'orbite duale de \mathcal{U}^- . Les partitions $\mathbf{d}_{\mathcal{O}}$ et $\mathbf{d}_{\mathcal{O}^-}$ sont obtenues à partir respectivement de $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ et $\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-}$ en ajoutant un bloc 1, en prenant les partitions transposées, et en calculant leur “ B -collapse”. Notons $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_{2d_1}]$ et $\mathbf{p}^- = [p_1^-, \dots, p_{2d_1}^-]$ les partitions transposées obtenues. On a $p_1 = t + 1$ et $p_1^- = t - 1$, $p_2^- = t - 2$, $p_{2d_3+1}^- = \dots = p_{2d_1}^- = 1$ et $p_1 = p_1^- + 2$, $p_2 = p_2^- + 2$, ..., $p_{2d_3} = p_{2d_3}^- + 2$, $p_{2d_3+1} = p_{2d_3+1}^- + 1 = 2$, ..., $p_{2d_2} = p_{2d_2}^- + 1 = 2$, $p_{2d_2+1} = 1, \dots, p_{2d_1} = 1$. Comme $p_1^- = t - 1$, $p_2^- = t - 2$, l'un des deux est pair, notons le $p_{i_0}^-$. Pour obtenir \mathcal{O}^- en calculant le “ B -collapse”, on prend celui qui est pair, on lui enlève 1, et on ajoute 1 au plus grand bloc pair strictement plus petit, notons le p_{i_0}' . S'il n'existe pas de tel bloc pair, on ajoute juste un bloc 1, et la procédure se termine. Sinon, comme il y a un nombre pair de p_j^- qui vaut $p_{i_0}^-$ (c'est la différence entre les tailles de deux blocs de la partition $\mathbf{d}_{\mathcal{O}^-}$), soit i_1 le plus grand indice tel que $p_{i_1}^- = p_{i_0}'$. On enlève alors 1 à $p_{i_1}^-$, et on ajoute 1 au plus grand bloc pair strictement plus petit (s'il existe, sinon on ajoute un bloc 1), notons le p_{i_1}' . On continue cette procédure jusqu'à ce que l'on ait défini $i_0, \dots, i_\ell, i_0', \dots, i_{\ell-1}'$, mais que i_ℓ' ne soit pas défini, et l'on ajoute alors le bloc 1. Pour \mathcal{O} , on fait de même, mais la procédure se

termine différemment car $p_{2d_3+1}^- = p_{2d_3+2}^-$ sont égaux à 2. Le premier est remplacé par 3 et le second par 1 et on ajoute un 1 final. On voit que l'on obtient $\mathbf{d}_\mathcal{O}$ à partir de $\mathbf{d}_\mathcal{O}$ en ajoutant 2 au $2d_2 - 1$ premiers blocs. Quand on travaille avec \mathcal{U}' et la partition duale de la partition qui définit \mathcal{U}' on obtient \mathbf{p} sauf que une occurrence de 2 est remplacée par deux occurrences de 1. Ensuite on calcule comme ci-dessus le “ B -collapse”. \square

Corollaire 8.8. — Soient $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ et $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$ les paquets associés par Barbasch-Vogan aux orbites \mathcal{U} et \mathcal{U}^- respectivement pour les groupes $G = \mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et $G^- = \mathbf{SO}_{2(n-2d_2)+3}(\mathbb{C})$. Supposons que $\bar{A}(\mathcal{U}^-) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$, de sorte que le cardinal de $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$ soit 2^m . Considérons les représentations induites de $G^- \times \mathbf{GL}_{2d_2-1}(\mathbb{C})$ à G :

$$(8.17) \quad X_1 = (\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \det_{2d_2-1}) \star \bar{X}^-, \quad X_{-1} = (\chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \circ \det_{2d_2-1}) \star \bar{X}^-$$

lorsque \bar{X}^- décrit $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$, et leur sous-quotient de Langlands respectifs \bar{X}_1 et \bar{X}_{-1} . Alors les 2^{m+1} représentations \bar{X}_1 et \bar{X}_{-1} sont non équivalentes deux à deux, et constituent donc les 2^{m+1} représentations unipotentes du paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$. De plus les X_{-1} sont irréductibles, donc $X_{-1} = \bar{X}_{-1}$.

La démonstration est la même que dans le cas \mathbf{C}_n .

Remarque 8.9. — Le lemme se généralise en remplaçant les blocs d_2 et $d_3 = d_2 - 2$ par n'importe quelle paire (d_{2j}, d_{2j+1}) avec $d_{2j+1} = d_{2j} - 2$.

8.4.3. Un lemme d'induction, cas \mathbf{D}_n . — On suppose que G est un groupe orthogonal pair de rang n . Soient \mathcal{U} une orbite nilpotente de bonne parité de ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ et \mathcal{O} l'orbite duale dans \mathfrak{g} . Soient $d_{\mathcal{U}}$ et $d_{\mathcal{O}}$ les partitions de $2n$ respectivement associées à ces orbites. Écrivons $d_{\mathcal{U}} = [2d_1 + 1, 2d_2 + 1, 2d_3 + 1, \dots, 2d_t + 1]$.

Lemme 8.10. — On suppose que $d_2 = d_3 + 1$. Soit \mathcal{U}^- l'orbite correspondant à la partition $d_{\mathcal{U}^-} = [2d_1 + 1, 2d_4 + 1, \dots, 2d_t + 1]$ obtenue à partir de $d_{\mathcal{U}}$ en supprimant les deuxième et troisième blocs. Alors $\mathcal{O} = \{0\}_{2d_2} \star \mathcal{O}^-$ et c'est aussi l'orbite duale de l'orbite \mathcal{U}' qui s'obtient à partir de \mathcal{U}^- en ajoutant les deux blocs $2d_2$.

Démonstration. Maintenant, t est pair. Les partitions $\mathbf{d}_\mathcal{O}$ et $\mathbf{d}_{\mathcal{O}^-}$ sont obtenues à partir respectivement de $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ et $\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-}$ en prenant les partitions transposées, et en calculant leur “ D -collapse”. Prenons des notations analogues à celles du cas des groupes orthogonaux impairs. On a $p_1^- = t - 2$ qui est pair et le cardinal de $\{j \mid p_j^- = t - 2\}$ est $2d_t + 1$ donc impair. Les autres blocs de \mathbf{p}^- sont de multiplicité paires et $p_{2d_3+3}^- = \dots = p_{2d_1+1}^- = 1$. Ensuite, tout se passe exactement comme pour les groupes orthogonaux impairs. \square

Corollaire 8.11. — Soient $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ et $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$ les paquets associés par Barbasch-Vogan aux orbites \mathcal{U} et \mathcal{U}^- respectivement pour les groupes $G = \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ et $G^- = \mathbf{SO}_{2(n-2d_2)}(\mathbb{C})$. Supposons que $\bar{A}(\mathcal{U}^-) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$, de sorte que le cardinal de $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$ soit 2^m . Considérons les représentations induites de $G^- \times \mathbf{GL}_{2d_2}(\mathbb{C})$ à G :

$$(8.18) \quad X_1 = (\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \det_{2d_2}) \star \bar{X}^-, \quad X_{-1} = (\chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \circ \det_{2d_2}) \star \bar{X}^-$$

lorsque \bar{X}^- décrit $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$, et leur sous-quotient de Langlands respectifs \bar{X}_1 et \bar{X}_{-1} . Alors les 2^{m+1} représentations \bar{X}_1 et \bar{X}_{-1} sont non équivalentes deux à deux, et constituent donc les 2^{m+1} représentations unipotentes du paquet $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$. De plus les X_{-1} sont irréductibles, donc $X_{-1} = \bar{X}_{-1}$.

La démonstration est la même que dans les autres cas.

Remarque 8.12. — Le lemme se généralise en remplaçant les blocs d_2 et $d_3 = d_2 - 2$ par n'importe quelle paire (d_{2j}, d_{2j+1}) avec $d_{2j+1} = d_{2j} - 2$.

8.5. Un autre lemme de réduction. — On suppose que G est un groupe classique de rang n et que \mathcal{U} est une orbite nilpotente de bonne parité de ${}^L\mathfrak{g}$. On note $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [d_1, \dots, d_k]$ la partition associée, et l'on suppose que $d_1 \geq d_2 + 2$. On note maintenant \mathcal{U}^- l'orbite obtenue en remplaçant d_1 par $d_1 - 2$ dans $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$, c'est-à-dire que $\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-} = [d_1 - 2, \dots, d_k]$. C'est une orbite dans l'algèbre de Lie du groupe dual de G^- , qui est un groupe de même type que G , et de rang $n - 1$. L'orbite \mathcal{U} est induite, on a $\mathcal{U} = \{0\}_1 \star \mathcal{U}^-$. Notons \mathcal{O} et \mathcal{O}^- les orbites duales respectives de \mathcal{U} et \mathcal{U}^- .

Lemme 8.13. — *On suppose que G est un groupe orthogonal, ou bien que $d_1 > d_2 + 2$. Soit M le sous-groupe de Levi standard de G isomorphe à $\mathbf{GL}_1(\mathbb{C}) \times G^-$ (et identifié à ce dernier). Alors l'orbite $\{0\}_1 \times \mathcal{O}^-$ de \mathfrak{m} est contenue dans $\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}$.*

Démonstration. Lorsqu'on passe aux partitions transposées, celle de \mathcal{U}^- s'obtient à partir de celle de \mathcal{U} en enlevant deux blocs de taille 1. Pour obtenir \mathcal{O}^- et \mathcal{O} , il faut calculer les “ X -collapses” du type X adéquat. Cette opération ne change que la taille de blocs de mauvaise parité pour G et G^- . Si G est un groupe orthogonal, 1 est de bonne parité, et donc $\mathbf{d}_{\mathcal{O}^-}$ s'obtient de $\mathbf{d}_{\mathcal{O}}$ en enlevant deux blocs de taille 1. Si G est un groupe symplectique, et si $d_1 > d_2 + 2$, alors il y a déjà au moins un bloc de taille 1 dans la partition transposée de $\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-}$, et la même conclusion prévaut. \square

Remarque 8.14. — Si G est un groupe symplectique et si $d_1 = d_2 + 2$, alors $\mathbf{d}_{\mathcal{O}}$ s'obtient de $\mathbf{d}_{\mathcal{O}^-}$ en ajoutant un bloc de taille 2.

Corollaire 8.15. — *On suppose que G est un groupe orthogonal, ou bien que $d_1 > d_2 + 2$. Alors l'application naturelle de $\bar{A}(\mathcal{U}^-)$ dans $\bar{A}(\mathcal{U})$ est un isomorphisme. Toute représentation de $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ est obtenue de manière unique en prenant le sous-quotient de Langlands $\bar{X} = \bar{X}(\lambda, \mu)$ de l'induite $\chi_{\frac{d_1-1}{2}, \frac{d_1-1}{2}} \star \bar{X}^-$ (ici $\chi_{\frac{d_1-1}{2}, \frac{d_1-1}{2}}$ est un caractère de $\mathbf{GL}_1(\mathbb{C})$), où en posant $\bar{X}^- = \bar{X}(\lambda', \mu')$, avec*

$$\lambda^- = (\lambda_1^-, \dots, \lambda_{n-1}^-), \quad \mu^- = (\mu_1^-, \dots, \mu_{n-1}^-),$$

on a

$$\lambda = \left(\frac{d_1 - 1}{2}, \lambda_1^-, \dots, \lambda_{n-1}^- \right), \quad \mu = \left(\frac{d_1 - 1}{2}, \mu_1^-, \dots, \mu_{n-1}^-, \frac{d_1 - 1}{2} \right).$$

Démonstration. On est dans le cas d'une orbite \mathcal{U} lisse induite à partir de \mathcal{U}' (cf. [BV85], §7). Si le symbole de \mathcal{U} est (8.2), celui de \mathcal{U}' obtenu en remplaçant x_{2p} par $x_{2p} - 1$. Les autres assertions se déduisent aisément en comparant les descriptions des paquets $\Pi_{BV}(\mathcal{U}^-, G^-)$ et $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ (qui ont même cardinal). \square

9. Un résultat sur les exposants

On énonce maintenant une propriété des exposants des représentations dans les paquets de Arthur unipotents. Ceci se trouve déjà (de manière implicite) dans [Bar89] et de manière totalement explicite dans [Bar]. La seule petite difficulté avec cette dernière référence c'est que, sauf erreur de notre part, certaines représentations considérées ici ne le sont pas dans *loc. cit.*

Proposition 9.1. — *Soit G un groupe classique complexe de rang n et \mathcal{U} une orbite nilpotente dans ${}^L\mathfrak{g}$. Soit $\bar{X} \in \Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$. Alors les exposants de \bar{X} sont des caractères de \mathbb{C}^\times de la forme $\chi_{a,b}$ avec $a - b \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [d_1, d_2, \dots, d_k]$ la partition attachée à l'orbite \mathcal{U} . La démonstration se fait par récurrence sur le rang n , en utilisant les résultats de la section 8. On distingue selon les cas. Traitons par le cas où G est un groupe symplectique (cas \mathbf{C}_n). Si $d_1 = d_2$, soit \mathcal{U}^- l'orbite associée à la partition obtenue en enlevant les deux premiers blocs d_1 et d_2 . On est dans la

situation du paragraphe 8.1, plus précisément dans le cas (8.5). En particulier, un élément \bar{X} de $\Pi_{BV}(\mathcal{U}, G)$ est obtenu comme étant l'induite irréductible $\bar{X}^- \star \mathbf{Triv}_{d_1}$ (voir la proposition 8.2). La proposition pour \bar{X} se déduit alors du résultat appliqué à \bar{X}^- par hypothèse de récurrence. Si $d_1 > d_2 + 2$, on utilise cette fois le corollaire 8.15, avec pour \mathcal{U}^- l'orbite associée à la partition obtenue en remplaçant d_1 par $d_1 - 2$. Dans le cas où $d_1 = d_2 + 2$, on utilise cette fois le corollaire 8.5, avec pour \mathcal{U}^- l'orbite associée à la partition obtenue en enlevant les deux premiers blocs d_1 et d_2 et l'hypothèse de récurrence appliquée aux représentations \bar{X}_1 et \bar{X}_{-1} de ce corollaire. Le cas des groupes orthogonaux se traite de la même façon. \square

10. Identification des paquets de Barbasch-Vogan et d'Arthur

Le résultat principal de cette section est de montrer que les constructions de Barbasch-Vogan et d'Arthur coïncident pour les groupes classiques complexes.

Théorème 10.1. — *Soient G un groupe classique complexe (non métaplectique) de rang n , \mathcal{U} une orbite nilpotente spéciale et paire de ${}^L G$ et ψ_G le paramètre d'Arthur associé à \mathcal{U} . Soient η un caractère de $A(\mathcal{U}) = A(\psi_G)$, X_η la représentation associée par Arthur (cf. §3.3 et en particulier 3.6) et X_η^{BV} celle associée par Barbasch-Vogan (cf. §7) si η se factorise par $\bar{A}(\mathcal{U})$. Si η ne se factorise pas par $\bar{A}(\mathcal{U})$, on pose $X_\eta^{BV} = 0$. On a alors $X_\eta = X_\eta^{BV}$. En particulier $\Pi_{BV}({}^L \mathcal{U}, G) = \Pi(\psi, G)$.*

Remarque 10.2. — Avant de prouver ce théorème il faut prévenir le lecteur que [BV85] utilise le groupe des caractères de $\bar{A}(\mathcal{O})$ et non pas $\bar{A}(\mathcal{U})$ (ici \mathcal{O} est l'orbite duale de \mathcal{U}) pour paramétrer les représentations attachées à ψ . On passe de l'un à l'autre par un isomorphisme entre ces deux groupes (cf. l'introduction du paragraphe 12 de [BV85]). Et on utilise alors le corollaire 12.4 de [BV85] pour avoir les formules de transfert que l'on exprime, via l'isomorphisme utilisé dans [BV85], en terme de caractères de $\bar{A}(\mathcal{U})$. L'isomorphisme entre ces groupes de caractères n'est pas complètement évident, il traduit la tensorisation par le caractère signe dans l'ensemble des représentations du groupe de Weyl de G qui est aussi celui de ${}^L G$ (cf. [BV85] 5.30 et suivant).

Remarque 10.3. — Une orbite spéciale paire est soit de bonne parité, soit tous les blocs de la partition associée sont de mauvaise parité. Cette dernière possibilité peut arriver dans les cas \mathbf{B}_n et \mathbf{D}_n et cette situation est décrite dans la section 7 : $A(\mathcal{U})$ est trivial et la représentation associée par Barbasch-Vogan est une induite irréductible de la représentation triviale d'un sous-groupe de Levi isomorphe à un produit de \mathbf{GL} . Grâce au théorème 6.10 et son corollaire, il en est de même de la représentation associée par Arthur. On peut donc supposer que \mathcal{U} est une orbite de bonne parité, et c'est ce que l'on fera dans ce qui suit.

10.1. Le cas des groupes orthogonaux impairs. — On commence par le cas des groupes orthogonaux impairs qui est légèrement plus simple puis on généralisera. La démonstration se fait par récurrence sur la longueur de la suite de Jordan-Hölder de $\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G$ en tant que représentation de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$. On initialise aisément la récurrence si ψ est irréductible: dans ce cas \mathcal{U} est l'orbite principale, $A(\mathcal{U})$ est réduit à un élément et X_1 (la représentation associée par Arthur au caractère nécessairement trivial de $A(\mathcal{U})$) est la représentation triviale. Il est facile de vérifier que X_1^{BV} est aussi la représentation triviale.

On suppose maintenant que le résultat est établi pour tous les paramètres ψ'_G tel que $\psi' = \mathbf{Std}_G \circ \psi'_G$ ait une longueur strictement plus petite que celle de ψ . On utilise la caractérisation des X_η par des propriétés de transfert endoscopique [Art13] 2.1.1. Soit $\mathbf{H} = (H, s, \xi : {}^L H \rightarrow {}^L G, \dots)$ une donnée endoscopique elliptique avec s dans le centralisateur de ψ_G . Le paramètre ψ_G se factorise donc en $\xi \circ \psi_H$, où ψ_H est un paramètre d'Arthur pour le groupe endoscopique H . On suppose que $s \neq 1$ et en particulier le groupe endoscopique H est un produit de groupes $\mathbf{SO}_{2a+1}(\mathbb{C}) \times \mathbf{SO}_{2b+1}(\mathbb{C})$. On peut par hypothèse de récurrence appliquer le théorème

à H et ψ_H . On sait que la représentation virtuelle $\sum_{\eta \in \widehat{A(\mathcal{U})}} \eta(ss_\psi)X_\eta$ est un transfert de la représentation $X_{\psi_H}^{st}$ de H . Le même résultat vaut avec les X_η remplacé par les X_η^{BV} d'après [BV85], §12.4. Comme les représentations X_η sont soit irréductibles et non équivalentes deux à deux, soit nulles, on en déduit que l'ensemble des représentation X_η coïncide avec l'ensemble des représentations X_η^{BV} . En particulier la somme des représentations dans chacun des ensembles ne dépend pas de l'ensemble choisi, ce qui nous donne le cas $s = 1$ dans l'égalité qui suit. On a donc pour tout $s \in A(\mathcal{U})$

$$\Pi(s) := \sum_{\eta \in \widehat{A(\mathcal{U})}} \eta(s)X_\eta = \sum_{\eta \in \widehat{A(\mathcal{U})}} \eta(s)X_\eta^{BV}.$$

Par inversion de Fourier, on en déduit que pour tout $\eta \in \widehat{A(\mathcal{U})}$,

$$X_\eta = |A(\mathcal{U})|^{-1} \sum_{s \in A(\mathcal{U})} \eta(s)\Pi(s) = X_\eta^{BV},$$

ce qui termine la démonstration. \square

10.2. Le cas général. — Pour imiter la démonstration ci-dessus, il faut initialiser la récurrence. Pour les groupes symplectiques, il n'y a pas de difficulté, c'est comme dans le cas des groupes orthogonaux impairs. Si ψ est irréductible il lui correspond la représentation triviale à la fois dans [Art13] et dans [BV85]. Si G est un groupe orthogonal pair, l'initialisation se fait quand ψ est de longueur deux. Pour des raisons de parité, ψ ne peut pas être irréductible. On suppose donc que ψ est de longueur deux et on note \mathcal{U}_ψ l'orbite nilpotente déterminant ψ . On remarque que $\overline{A(\mathcal{U}_\psi)}$ est réduit à un élément. Il n'y a aussi qu'une représentation associée par Arthur à ce paramètre: notons $a \geq a'$ la taille des deux blocs de Jordan de l'orbite \mathcal{U}_ψ . Toute représentation dans $\Pi(\psi)$ est, d'après [Mœg] obtenue par une correspondance de Howe. Mais ici, une seule correspondance de Howe est possible, c'est l'image de la représentation triviale de $\mathbf{Sp}_{a'-1}(\mathbb{C})$. Si $a' = 1$, la représentation cherchée est tout simplement la représentation triviale. Il faut encore identifier ces deux représentations, celle construite par [BV85] et celle construite par [Art13]. D'après les constructions de [Art13], c'est nécessairement la représentation dans le paquet de Langlands à l'intérieur du paquet d'Arthur, c'est-à-dire le quotient de Langlands de la représentation induite du caractère

$$\chi_{(a-1)/2, (a-1)/2} \otimes \cdots \otimes \chi_{(a'+1)/2, (a'+1)/2} \otimes \mathbf{Triv}_{a'}$$

d'un sous-groupe parabolique de Levi $(a - a')/2$ facteurs \mathbb{C}^\times fois $\mathbf{GL}_{a'}(\mathbb{C})$ (peu importe le parabolique choisi). Les réductions déjà faites ici montrent que cette représentation est bien celle construite par [BV85].

Maintenant que l'on a initialisé la récurrence, on procède exactement comme dans le cas des groupes orthogonaux impairs: les données endoscopiques sont, si G est un groupe symplectique un produit d'un groupe symplectique et d'un groupe spécial orthogonal pair tandis que si G est un groupe spécial orthogonal pair, c'est le produit de deux groupes spéciaux orthogonaux pairs. \square

11. Démonstration du théorème 6.12

11.1. Un résultat de Vogan. — Le théorème suivant (cf. [Bar89], Thm. 14.1) est un résultat attribué par Barbasch à Vogan.

Théorème 11.1. — Soient G_0 un groupe classique de rang n_0 et \bar{X}_0 un caractère unitaire de G_0 . Soient, pour tout $i = 1, \dots, s$, un caractère unitaire $\chi_i \circ \det_{n_i}$ de $\mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{C})$.

Soit G le groupe classique de même type que G_0 et de rang $n = n_0 + \sum_{i=1}^s n_i$. Soit \mathcal{O} l'orbite nilpotente induite $(\star_i(\{0\}_{n_i})) \star \{0\}_{G_0}$ dans \mathfrak{g} . C'est donc une orbite de Richardson pour le sous-groupe parabolique $P = MN$ de G dont le facteur de Levi M est isomorphe à $(\times_i \mathbf{GL}_{n_i}(\mathbb{C})) \times G_0$. Si l'orbite \mathcal{O} est paire et normale, et si l'application moment $\mathcal{M} : T^*(G/P) \rightarrow \mathcal{O}$ est birationnelle, alors la représentation induite

$$\bar{X} = (\star_i \chi_i \circ \det_{n_i}) \star \bar{X}_0$$

est irréductible, de front d'onde $\mathrm{WF}(\bar{X}) = \bar{\mathcal{O}}$.

La liste des orbites nilpotentes vérifiant ces conditions pour les groupes classiques est dans [Bar89], §14.3. Nous allons maintenant, à la suite de Barbasch, montrer comment la démonstration du théorème 6.12 se ramène à ce résultat.

11.2. Réduction au théorème 11.1. — On suppose que G est un groupe classique de rang n . Soient \mathcal{U} une orbite nilpotente de bonne parité de ${}^L G$, $\psi = \psi_{\mathcal{U}}$ le paramètre d'Arthur correspondant et \mathcal{O} l'orbite duale dans \mathfrak{g} . Soient $d_{\mathcal{U}}$ et $d_{\mathcal{O}}$ les partitions de $2n+1$ ou $2n$ associées à ces orbites.

Soit $\bar{X} \in \Pi(\psi, G)$. Avec les notations du théorème 6.12, on veut montrer que

$$(11.1) \quad Y = (\star_{i=1}^s \chi_i \circ \det_{a_i}) \star (\star_{j=1}^t \mathbf{Triv}_{b_j}) \star \bar{X}$$

est irréductible (les b_j sont pairs dans les cas \mathbf{C}_n et \mathbf{D}_n , impairs dans le cas \mathbf{B}_n et $\mathbf{M}_{\mathbf{p}_n}$). Pour cela, on se ramène au théorème 11.1, en trois étapes qui réduisent le problème à des cas de plus en plus particuliers, jusqu'à finalement se retrouver sous les bonnes hypothèses. On suit de très près [Bar89]. Soit \bar{Y} un sous-quotient irréductible de Y . Il s'agit de montrer que $Y = \bar{Y}$.

Première étape. Montrons d'abord que l'on peut supposer que l'orbite \mathcal{O} vérifie les hypothèses du théorème 11.1, c'est-à-dire d'après [Bar89], §14.3 que la partition associée $\mathbf{d}_{\mathcal{O}}$ ne possède que des blocs de bonne parité (paire pour les groupes symplectiques, impaire pour les groupes orthogonaux).

On raisonne par récurrence sur le nombre de blocs de mauvaise parité de \mathcal{O} . Considérons l'orbite \mathcal{U}^+ obtenue en rajoutant à $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ deux blocs de taille T de bonne parité, comme dans la section 8.1 dont on adopte les notations dans ce qui suit. On a $\mathcal{O}^+ = \{0\}_T \star \mathcal{O}$. On obtient $d_{\mathcal{O}^+}$ en ajoutant 2 aux T premiers blocs de $d_{\mathcal{O}}$ et en prenant le “ X -collapse” de la partition obtenue. En choisissant bien T , on peut faire en sorte que \mathcal{O}^+ ait deux blocs de mauvaise parité de moins que \mathcal{O} . On a vu (sections 8.1, 8.2, 8.3) que selon les cas $\mathbf{Triv}_T \star \bar{X} = \bar{X}_1^+ \oplus \bar{X}_{-1}^+$, ou bien $\mathbf{Triv}_T \star \bar{X} = \bar{X}_0^+$, où \bar{X}_1^+ , \bar{X}_{-1}^+ et \bar{X}_0^+ sont dans $\Pi(\psi^+, G^+)$. Montrons alors que si

$$(11.2) \quad Y^+ = (\star_{i=1}^s \chi_i \circ \det_{a_i}) \star (\star_{j=1}^t \mathbf{Triv}_{b_j}) \star \bar{X}^+$$

est irréductible pour tout $\bar{X}^+ \in \Pi(\psi^+, G^+)$, il en est de même de Y . On raisonne par l'absurde en supposant que Y est réductible. Commençons par supposer qu'il existe $c \leq t$ tel que

$$\left(\star_{j=1}^{c-1} \mathbf{Triv}_{b_j} \right) \star \bar{X}$$

soit irréductible mais

$$Z = \left(\star_{j=1}^c \mathbf{Triv}_{b_j} \right) \star \bar{X}$$

soit réductible. Dans le groupe de Grothendieck, on calcule :

$$\begin{aligned} \mathbf{Triv}_T \star Z &= \mathbf{Triv}_T \star \left(\star_{j=1}^c \mathbf{Triv}_{b_j} \right) \star \bar{X} \\ &= \left(\star_{j=1}^c \mathbf{Triv}_{b_j} \right) \star \mathbf{Triv}_T \star \bar{X} \\ &= \begin{cases} \left(\star_{j=1}^c \mathbf{Triv}_{b_j} \right) \star \bar{X}_1^+ + \left(\star_{j=1}^c \mathbf{Triv}_{b_j} \right) \star \bar{X}_{-1}^+ \\ \text{ou bien } \left(\star_{j=1}^c \mathbf{Triv}_{b_j} \right) \star \bar{X}_0^+ \end{cases} \end{aligned}$$

On déduit du lemme 5.3 que l'un des sous-quotients irréductibles de Z admet un exposant $\chi_{a',b'}$ non-sphérique ($a' \neq b'$) avec a', b' demi-entiers (cas \mathbf{C}_n et \mathbf{D}_n) ou a', b' entiers (cas \mathbf{B}_n et \mathbf{Mp}_n). Il en est donc de même pour l'une des représentations $(\star_{j=1}^c \mathbf{Triv}_{b_j}) \star \bar{X}^+$, avec $\bar{X}^+ = \bar{X}_1^+, \bar{X}_1^-$ ou \bar{X}_0^+ . Or les exposants de cette représentation, irréductible car par hypothèse Y^+ l'est, sont soit des exposants $\chi_{a,b}$ de \bar{X}^+ , donc avec a et b entiers (cas \mathbf{C}_n et \mathbf{D}_n) ou demi-entiers (cas \mathbf{B}_n et \mathbf{Mp}_n), soit des exposants sphériques. On aboutit à une contradiction. Ainsi

$$(\star_{j=1}^t \mathbf{Triv}_{b_j}) \star \bar{X}$$

est irréductible. Supposons maintenant qu'il existe $c \leq s-1$ tel que

$$\star_{i=1}^{c-1} (\chi_i \circ \det_{a_i}) \star (\star_{j=1}^t \mathbf{Triv}_{b_j}) \star \bar{X}$$

soit irréductible, mais

$$Z = \star_{i=1}^c (\chi_i \circ \det_{a_i}) \star (\star_{j=1}^t \mathbf{Triv}_{b_j}) \star \bar{X}$$

soit réductible. Posons $\chi_i = \chi_{a_i, b_i}$, où les a_i, b_i sont des nombres complexes vérifiant $a_i - b_i \in \mathbb{Z}$ et $a_i + b_i \in i\mathbb{R}$ (les χ_i sont des caractères unitaires de \mathbb{C}^\times). On peut aussi supposer que les $|a_i - b_i|$ croissent avec i .

D'après le lemme 5.3, Z admet un sous-quotient irréductible ayant un exposant $\chi_{a',b'}$ avec $|a' - b'| > |a_c - b_c|$. Par un raisonnement analogue à celui ci-dessus, on déduit que l'une des représentations $(\star_{i=1}^c \chi_i \circ \det_{a_i}) \star (\star_{j=1}^t \mathbf{Triv}_{b_j}) \star \bar{X}^+$, avec $X^+ = X_1^+, X_1^-$ ou X_0^+ admet un exposant $\chi_{a',b'}$ avec $|a' - b'| > |a_c - b_c|$ et a', b' demi-entiers (cas \mathbf{C}_n et \mathbf{D}_n) ou entiers (cas \mathbf{B}_n et \mathbf{Mp}_n). Or cette représentation est irréductible car Y^+ l'est par hypothèse, et l'ensemble de ses exposants est l'union des exposants $\chi_{a,b}$ de \bar{X}^+ , qui vérifient $|a - b| \leq \frac{1}{2}$ d'après la proposition 9.1, et d'exposants de la forme χ_{a_i+e, b_i+e} , e entier ou demi-entier, $i \leq c$. On aboutit encore à une contradiction et l'on conclut que Y est irréductible pour tout $\bar{X} \in \Pi(\psi, G)$ si Y^+ l'est pour tout $\bar{X}^+ \in \Pi(\psi^+, G^+)$. Par récurrence, on peut donc supposer que \mathcal{O} vérifie les hypothèses du théorème de Vogan.

Deuxième étape. Ensuite, nous nous ramenons au cas où $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$ n'a pas de "trous", c'est-à-dire que si

$$\mathbf{d}_{\mathcal{U}} = [d_1, \dots, d_k]$$

alors pour tout $i = 1, \dots, k-1$, $d_{i+1} = d_i$ ou $d_i - 2$. La méthode est la même que ci-dessus, si $T < d_1$ n'apparaît pas dans $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$, on ajoute deux blocs de taille T pour obtenir une nouvelle partition $\mathbf{d}_{\mathcal{U}^+}$ vérifiant les mêmes propriétés que $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$, mais avec un trou en moins. L'orbite duale \mathcal{O}^+ est alors égale à $\{0\}_T \star \mathcal{O}$ et l'on obtient $d_{\mathcal{O}^+}$ en ajoutant 2 aux T premiers blocs de $d_{\mathcal{O}}$ (il n'y a pas besoin de prendre le "X-collapse" car \mathcal{O}^+ n'a que des blocs de bonne parité et ajouter 2 aux T premiers blocs conserve cette propriété, c'est-à-dire que \mathcal{O}^+ vérifie encore les hypothèses du théorème de Vogan). Le même argument que ci-dessus montre que

$$Y = (\star_{i=1}^s \chi_i \circ \det_{a_i}) \star (\star_{j=1}^t \mathbf{Triv}_{b_j}) \star \bar{X}$$

est irréductible pour tout $\bar{X} \in \Pi(\psi, G)$ si

$$Y^+ = (\star_{i=1}^s \chi_i \circ \det_{a_i}) \star (\star_{j=1}^t \mathbf{Triv}_{b_j}) \star \bar{X}^+$$

l'est pour tout $\bar{X}^+ \in \Pi(\psi^+, G^+)$. On se ramène donc en un nombre d'étape finie au cas d'une orbite \mathcal{U} sans trou telle que \mathcal{O} vérifie les hypothèses du théorème de Vogan.

Le fait que \mathcal{U} soit sans trou implique que tout élément \bar{X} de $\Pi(\psi, G)$ est obtenu comme sous-quotient irréductible d'une induite d'un caractère (pas nécessairement unitaire) d'un sous-groupe de Levi isomorphe à un produit de \mathbf{GL} . On peut voir ceci en regardant la description explicite des éléments des paquets faites dans la section 7.

Troisième étape. La troisième et dernière étape consiste à se ramener au cas où \bar{X} est de plus induite irréductible d'un caractère unitaire d'un sous-groupe de Levi isomorphe à un

produit de \mathbf{GL} , ce qui nous ramène immédiatement aux hypothèses du théorème de Vogan. Pour cela, utilisons les résultats suivants :

Lemme 11.2. — *Il existe des entiers i_1, \dots, i_ℓ , avec $\ell + 1 \leq k$ et $d_{i_j} = d_{i_j+1} + 2$, et une représentation \bar{Z} induite irréductible d'un caractère unitaire d'un sous-groupe de Levi isomorphe à un produit de \mathbf{GL} tels que \bar{X} soit un sous-quotient irréductible de*

$$(11.3) \quad \left(\star_{j=1}^{\ell} \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \det_{d_{i_j-1}} \right) \star \bar{Z}.$$

Démonstration. On peut préciser que \bar{Z} est une représentation unipotente associée à l'orbite obtenue de \mathcal{U} en enlevant à $d_{\mathcal{U}}$ les blocs d_{i_j} et d_{i_j+1} pour $j = 1, \dots, \ell$.

On raisonne par récurrence sur le nombre de blocs de $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$. Nous allons traiter le cas des groupes symplectiques, les autres cas étant similaires, en utilisant les lemmes de réduction de la section 8 adéquats. Si $d_1 = d_2$, soit \mathcal{U}^- l'orbite nilpotente dont la partition associée $\mathbf{d}_{\mathcal{U}^-}$ est obtenue en enlevant les deux premiers blocs (d_1 et d_2) de $\mathbf{d}_{\mathcal{U}}$. Dans ce cas, il découle des résultats de la section 8.1 que \bar{X} est une induite irréductible de la forme $\bar{X} = \mathbf{Triv}_{d_1} \star \bar{X}^-$, où $\bar{X}^- \in \Pi(\psi^-, G^-)$, et ψ^- est le paramètre d'Arthur correspondant à l'orbite \mathcal{U}^- . On applique ensuite l'hypothèse de récurrence à \bar{X}^- :

Il existe des entiers i_1, \dots, i_ℓ , avec $\ell + 1 \leq k - 2$ et $d_{i_j} = d_{i_j+1} + 2$, et une représentation \bar{Z} induite irréductible d'un caractère unitaire d'un sous-groupe de Levi isomorphe à un produit de \mathbf{GL} tels que \bar{X}^- soit un sous-quotient irréductible de

$$(11.4) \quad \left(\star_{j=1}^{\ell} \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \det_{d_{i_j-1}} \right) \star \bar{Z}^-.$$

Alors \bar{X} est sous-quotient de $\left(\star_{j=1}^{\ell} \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \circ \det_{d_{i_j-1}} \right) \star \bar{Z}$, où $\bar{Z} = \mathbf{Triv}_{d_1} \star \bar{Z}^-$. D'après le corollaire 8.5, \bar{Z} est bien irréductible, et l'on obtient l'assertion voulue.

Si $d_1 = d_2 + 2$, on utilise cette fois le lemme 8.4 et son corollaire 8.5. D'après ce corollaire, \bar{X} est un sous-quotient irréductible de l'induite $\chi \circ \det_{d_1-1} \star \bar{X}^-$, où $\chi = \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$, ou bien $\chi = \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$. On applique l'hypothèse de récurrence à \bar{X}^- et on conclut comme ci-dessus. \square

Lemme 11.3. — *Avec les notations qui précèdent, les sous-quotients irréductibles de*

$$(11.5) \quad \left(\star_{j=1}^{\ell} \chi_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \circ \det_{d_{i_j-1}} \right) \star \left(\star_{j=1}^{\ell} \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \det_{d_{i_j-1}} \right) \star \bar{Z}.$$

sont des induites irréductibles d'un caractère unitaire d'un sous-groupe de Levi isomorphe à un produit de \mathbf{GL}

Démonstration. On a pour les groupes généraux linéaires l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck (cf. [BR10], Prop 14.1, formule de composition des bouts de séries complémentaires)

$$\chi_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \circ \det_n \times \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \det_n = \mathbf{Triv}_{n+1} \times \mathbf{Triv}_{n-1} + \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \circ \det_n \times \chi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \circ \det_n.$$

Tous les caractères apparaissant dans le membre de droite sont unitaires. Comme \bar{Z} est elle-même une induite irréductible d'un caractère unitaire d'un sous-groupe de Levi isomorphe à un produit de \mathbf{GL} , le résultat s'en déduit immédiatement. \square

Revenons à la démonstration du théorème 6.12, ou plutôt de sa réduction au théorème 11.1. D'après les deux lemmes ci-dessus,

$$(11.6) \quad \left(\star_{j=1}^{\ell} \chi_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \circ \det_{d_{i_j-1}} \right) \star \bar{X}$$

a tous ses sous-quotient irréductibles qui sont des sous-quotients irréductibles de (11.5), et sont donc des induites irréductibles d'un caractère unitaire d'un sous-groupe de Levi isomorphe à un produit de \mathbf{GL} . Par le même argument que dans la deuxième étape, (11.1) est irréductible si la même expression avec \bar{X} remplacé par un sous-quotient irréductible \bar{X}^+ de (11.6), en remarquant que ces \bar{X}^+ sont des éléments du paquet d'Arthur attachée à l'orbite obtenue à partir

de \mathcal{U} en ajoutant à $d_{\mathcal{U}}$ les blocs d_{i_j} et d_{i_j+1} pour $j = 1, \dots, \ell$. Ceci termine la démonstration de la réduction du théorème 6.12 au théorème 11.1. \square

11.3. Le cas du caractère infinitésimal régulier. — On fixe ψ_G un paramètre d'Arthur relatif au groupe G .

Théorème 11.4. — *On suppose que le caractère infinitésimal déterminé par ψ_G (cf.(3.7)) est régulier. Alors $\Pi(\psi_G, G)$ est réduit à un élément, la représentation de Langlands à l'intérieur du paquet d'Arthur.*

Démonstration. On reprend la notation $\psi_{u,bp}$ de (6.3). Il est clair que si ψ_G définit un caractère infinitésimal régulier de G , a fortiori, $\psi_{u,bp}$ définit lui aussi un caractère infinitésimal régulier pour un groupe, a priori plus petit mais de même type que G . D'après le théorème 6.12, il suffit de prouver le théorème pour $\psi_{u,bp}$. Dans ce cas, il suffit de remarquer que soit $\psi_{u,bp}$ est nul soit est le paramètre d'un caractère. Dans tous les cas, $\bar{A}(\psi_{u,bp})$ est trivial car $A(\psi_{u,bp})$ l'est déjà. \square

Remarque 11.5. — La conclusion du théorème est vraie sous la seule hypothèse que $\psi_{u,bp}$ définit un caractère infinitésimal régulier. Le théorème s'applique en particulier aux paquets contenant des représentations ayant de la cohomologie pour un bon système de coefficients. Ces paquets sont donc réduits à un élément.

12. Quelques compléments

12.1. Groupes spéciaux orthogonaux versus groupes orthogonaux. — Dans cette section, on suppose que $G = \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$. La théorie de l'endoscopie tordue qui transfère des représentations de G vers des représentations de $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$, ne permet pas de distinguer une représentation irréductible X de G de son image par les automorphismes provenant de $\mathbf{O}_{2n}(\mathbb{C})$ si cette représentation n'est pas invariante sous ces automorphismes. Les paramètres ψ , même complétés par la donnée d'un caractère de $A(\psi)$, ne sont donc pas suffisants. Il y a toutefois un cas très important où le problème ne se pose pas car les représentations attachées à ψ sont invariantes sous l'action de $\mathbf{O}_{2n}(\mathbb{C})$. Pour exprimer le résultat on rappelle la décomposition de (6.3)

$$\psi = \rho \oplus \rho^* \oplus \psi_{u,bp}.$$

Proposition 12.1. — *On suppose que $\psi_{u,bp} \neq 0$, alors les représentations de G attachées à ψ sont invariantes sous l'action de $\mathbf{O}_{2n}(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Toute représentation irréductible attachée à ψ est une induite irréductible d'une représentation $\tau \otimes X_{u,bp}$ où τ est une représentation convenable (unitaire irréductible) d'un produit de groupes \mathbf{GL} et où $X_{u,bp}$ est attachée à $\psi_{u,bp}$. On note $2n_{u,bp}$ la dimension de la représentation de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ définie par $\psi_{u,bp}$. Il suffit donc de montrer que la représentation $X_{u,bp}$ est isomorphe à son image par l'automorphisme extérieur induit par $\mathbf{O}_{2n_{u,bp}}(\mathbb{C})$. Or ceci est vrai car $X_{u,bp}$ s'obtient en considérant l'image par la correspondance de Howe d'une représentation irréductible d'un groupe symplectique de rang strictement plus petit que $n_{u,bp}$. \square

12.2. Effet de la conjugaison complexe. — En considérant G comme le groupe des points complexes d'un groupe déployé défini sur \mathbb{R} , on note σ la conjugaison complexe. Si $G = \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$, on peut aussi choisir une forme quasi-déployée non déployée de G définie sur \mathbb{R} , d'où une conjugaison complexe σ_{nd} ; on sait que si $G = \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$, les conjugaisons σ et σ_{nd} diffèrent par un automorphisme extérieur. Il est donc clair que si $G = \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$, pour déterminer si une représentation est σ ou σ_{nd} invariante il faut pouvoir la distinguer de son image sous $\mathbf{O}_{2n}(\mathbb{C})$, ce que nous n'avons pas fait. C'est ce qui explique l'hypothèse que l'on met dans le cas où $G = \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$

Théorème 12.2. — On fixe ψ comme précédemment et ici on suppose que si $G = \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$, alors $\psi_{u,bp} \neq 0$. Soit X une représentation associée à ψ . Alors $\sigma(X) \simeq X$ pour X une conjugaison complexe définie sur G .

Démonstration. On décompose ψ d'où la partie unipotente de bonne parité $\psi_{u,bp}$. Soit X comme dans l'énoncé. On sait d'après le théorème 6.12 qu'il existe une représentation irréductible $X_{u,bp}$ associée à $\psi_{u,bp}$ et une représentation, ρ , induite de caractères unitaires d'un groupe $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$ tel que X soit l'induite irréductible de $\rho \otimes X_{u,bp}$. Comme ρ est une induite de caractères unitaires, on a $\sigma(\rho) \simeq \rho^*$. Et l'induite de $\rho^* \times X_{u,bp}$ est irréductible isomorphe à X dans tous les cas; c'est ici que l'on utilise l'hypothèse faite quand $G = \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$. Il suffit donc de montrer que $\sigma(X_{u,bp}) \simeq X_{u,bp}$.

Le plus simple est de partir des formules explicites de [BV85]. On rappelle les constructions de loc. cite. On note \mathcal{O} l'orbite duale de l'orbite unipotente associée à $\psi_{u,bp}$. Ici on est en droit de supposer que $\psi = \psi_{u,bp}$. On note W le groupe de Weyl de G , si G est de type B ou C . Dans le cas où $G = \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$, on considère le groupe de Weyl de $\mathbf{O}_{2n}(\mathbb{C})$ au lieu de $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$. Pour $x \in \overline{A}(\mathcal{O})$, en suivant Lusztig, [BV85] associe une représentation σ_x de W ; évidemment, il y a une difficulté dans le cas où $G = \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ que l'on résoud ainsi. Seules nous intéressent les composantes irréductibles de ces représentations ayant des vecteurs invariants sous le stabilisateur dans W de $\lambda_{\mathcal{O}}$ (avec les notations de loc. cite). Or ce stabilisateur contient des éléments de $\mathbf{O}_{2n}(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$; on peut donc étendre uniquement une telle représentation composante irréductible à W en une représentation irréductible. Ensuite [BV85] définit

$$R_x := |\mathrm{Stab}_W(\lambda_{\mathcal{O}})|^{-1} \sum_{w \in W} \mathrm{trace}(\sigma_x(w)) X(\lambda_{\mathcal{O}}, w\lambda_{\mathcal{O}})$$

et pour η un caractère de $\overline{A}(\mathcal{O})$,

$$X_{\eta} := |\overline{A}(\mathcal{O})|^{-1} \sum_{x \in \overline{A}(\mathcal{O})} \eta(x) R_x.$$

L'effet de la conjugaison complexe est de transformer $X(\lambda_{\mathcal{O}}, w\lambda_{\mathcal{O}})$ en $X(w\lambda_{\mathcal{O}}, \lambda_{\mathcal{O}})$ c'est-à-dire $X(\lambda_{\mathcal{O}}, w^{-1}\lambda_{\mathcal{O}})$. Or pour tout $w \in W$, w^{-1} est conjugué dans W de w d'où l'invariance par conjugaison complexe des représentations R_x . \square

12.3. Front d'onde des représentations dans les paquets d'Arthur. — Soit ψ un morphisme comme ci-dessus et soit $\bar{X} \in \Pi(\psi, G)$. On note \mathcal{U}_{ψ} l'orbite nilpotente de ${}^L\mathfrak{g}$ qui est l'orbite de l'image par la différentielle en l'identité de ψ d'un élément nilpotent non trivial de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Corollaire 12.3. — Le front d'onde $WF(\bar{X})$ est l'adhérence de l'orbite duale de \mathcal{U}_{ψ} dans \mathfrak{g} .

Démonstration. On utilise la décomposition de ψ en sous-représentations irréductibles comme dans (6.3). A la composante $\psi_{u,bp}$, on associe une orbite \mathcal{U}' dont on note \mathcal{O}' l'orbite duale. C'est donc une orbite nilpotente spéciale pour un groupe de même type que G mais de rang en général plus petit que l'on note G' . On pose \mathcal{O}_{ψ} l'induite de \mathcal{O}' définie par

$$\mathcal{O}_{\psi} = *_{(\chi_p, N_p)} \{0\}_{N_p} * \mathcal{O}'.$$

C'est une orbite spéciale. On montre que l'adhérence de cette orbite est $WF(\bar{X})$.

Si $\psi = \psi_{u,bp}$ ce corollaire est un corollaire du fait que les représentations de [Art13] sont celles construites par [BV85] et pour les représentations de [BV85] cela fait pratiquement partie de la définition. Le cas général est un corollaire du théorème 6.12.

Il reste à montrer que cette orbite est la duale de \mathcal{U}_{ψ} . On reprend la décomposition complète de ψ

$$\psi = \oplus_{\chi,p} \chi \boxtimes R_p \oplus \chi^{-1} \boxtimes R_p \oplus \psi_{u,bp}.$$

On pose ${}^L M$ le sous-groupe de Levi de ${}^L G$ isomorphe à $\times_{\chi,p} \mathbf{GL}_p(\mathbb{C}) \times {}^L G'$. On remarque que \mathcal{U}_ψ contient l'orbite de ${}^L M$ qui est le produit des orbites nilpotentes principales sur chaque facteur $\mathbf{GL}_p(\mathbb{C})$ et qui est \mathcal{U}' pour le facteur ${}^L G'$. On note \mathcal{U}_M cette orbite. On note M le sous-groupe de Levi de G qui correspond à ${}^L M$ dans la dualité; c'est un produit avec les mêmes notations que ci-dessus $\times_{\chi,p} \mathbf{GL}_p(\mathbb{C}) \times G'$. On remarque encore que l'orbite nilpotente de M qui est triviale sur tous les facteurs $\mathbf{GL}_p(\mathbb{C})$ et vaut \mathcal{O}' sur G' est la duale de \mathcal{U}_M . Pour obtenir le corollaire, il n'y a plus qu'à appliquer un résultat de Spaltenstein que l'on rappelle ci-dessous. \square

12.4. Rappel d'un résultat de Spaltenstein. — En [Spa82], §III.11.7 la dualité et l'induction pour les orbites unipotentes sont reliées. Soit ${}^L M$ un sous-groupe de Levi de ${}^L G$ et soit \mathcal{U}_M une orbite unipotente de ${}^L M$. On considère \mathcal{U}_M comme une orbite unipotente de ${}^L G$ par l'inclusion $i_{M,G}$. On note M le sous-groupe de Levi de G correspond à ${}^L M$ dans la dualité et $j_{M,G}$ l'induction. On note d_G^* la dualité entre orbites unipotentes de ${}^L G$ vers G et d_M^* son analogue pour ${}^L M$, en suivant essentiellement les notations de [Spa82] à ceci près qu'ici la dualité change le groupe (sauf pour $G = \mathbf{SO}_{2n}\mathbb{C}$) qui ici devient donc plus simple) alors que Spaltenstein utilise plutôt l'expression de la dualité sans changer de groupe (cf. [Spa82] III.10.3 pour le rapport).

Théorème 12.4. — (Spaltenstein [Spa82] III.11.7) *L'orbite duale de $i_{M,G}(\mathcal{U}_M)$ est l'orbite induite de l'orbite duale de \mathcal{U}_M , c'est-à-dire que l'on a l'égalité*

$$j_{M,G} \circ d_M^*(\mathcal{U}_M) = d_G^* \circ i_{M,G}(\mathcal{U}_M)$$

Il est dommage que ce ne soit pas exactement l'énoncé de Spaltenstein mais on laisse au lecteur le soin de s'y ramener. Pour l'application qui nous intéresse (corollaire 12.3), on remarque qu'il suffit de traiter, pas à pas, le cas d'un parabolique maximal de la forme $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C}) \times G'$ et d'une orbite de la forme le produit de l'orbite principal sur le facteur \mathbf{GL} est une orbite spéciale sur le facteur G' . Alors cela est un calcul sur les partitions duales analogue à ceux que l'on a fait dans le paragraphe 8.4.

12.5. Intersection entre les paquets d'Arthur. — A tout morphisme ψ comme dans tout ce travail, on va associer un morphisme explicite ψ_{sp} , vérifiant

Théorème 12.5. — (i) *Pour tout morphisme ψ , $\Pi(\psi, G) \subset \Pi(\psi_{sp}, G)$*

(ii) *Soit ψ, ψ' tel que $\Pi(\psi, G) \cap \Pi(\psi', G) \neq \emptyset$ alors $\psi_{sp} = \psi'_{sp}$.*

Cela donne déjà des renseignements assez précis mais on pourrait aller plus loin et décrire vraiment les intersections. Nous ne le faisons pas ici.

Démonstration. Pour montrer le théorème il faut bien sûr décrire ψ_{sp} . On fixe ψ et on note ψ_{bp} la somme des sous-représentations de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ incluses dans ψ de la forme $\mathbf{Triv} \boxtimes R_a$ avec a de bonne parité, ou bien de la forme $\chi_{1/2,-1/2}^{\pm 1} \boxtimes R_a$ avec a de la mauvaise parité. On obtient ainsi une décomposition de ψ sous la forme $\psi = \psi' \oplus \psi_{bp}$. On note m_{bp} la dimension de la représentation ψ_{bp} . En restreignant ψ_{bp} à $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ on obtient une orbite unipotente pour un groupe de même type que ${}^L G$ mais de rang $\lfloor m_{bp}/2 \rfloor$ que l'on note \mathcal{U}_0 . On note \mathcal{U}_{sp} l'orbite biduale de \mathcal{U}_0 . Par définition $\psi_{bp,sp}$ est la représentation de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ de dimension m_{bp} qui définit \mathcal{U}_{sp} par restriction à $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ et qui sur \mathbb{C}^\times est triviale sur les composantes isotypiques des représentations de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ correspondant à une représentation irréductible dont la dimension est de bonne parité et qui pour les autres composantes isotypiques est une somme de caractères $\chi_{1/2,-1/2}$ et $\chi_{-1/2,1/2}$, intervenant en nombres égaux. On pose alors: $\psi_{sp} = \psi' \oplus \psi_{bp,sp}$. On obtient bien ainsi un morphisme de $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ dans ${}^L G$.

On a la caractérisation intrinsèque de \mathcal{U}_{sp} vue comme une orbite nilpotente: cette orbite est l'orbite duale du front d'onde de n'importe quelle représentation associée à ψ_{bp} : en effet on a calculé le front d'onde des représentations attachées à ψ_{bp} en faisant $\psi = \psi_{bp}$ en 12.3. On vient donc de vérifier que $\psi_{bp,sp}$ est uniquement déterminé par n'importe quel élément de $\Pi(\psi_{bp})$.

Pour mieux comprendre la situation, décrivons \mathcal{U}_{sp} du point de vue combinatoire ce qui permettra de caractériser uniquement $\psi_{bp,sp}$ en fonction de ψ_{bp} . On commence par l'orbite $\mathcal{U}_{u,bp}$ qui est définie par la restriction de $\psi_{u,bp}$ à $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$. On a sa partition, $\mathcal{E}_{u,bp}$ formée d'entiers tous de même parité, la bonne. La partition définissant \mathcal{U}_0 (cf. ci-dessus) s'obtient en ajoutant à cette partition des entiers de mauvaise parité chacun un nombre pair de fois. On note \mathcal{E}_{mp} ces entiers avec leur multiplicité. Soit $a \in \mathcal{E}_{mp}$. On dit que a est à échanger si quand on ajoute deux copies de a à la partition de $\mathcal{U}_{u,bp}$ on obtient une orbite qui n'est pas spéciale. On note \mathcal{E}_{mp}^- l'ensemble \mathcal{E}_{mp} dont on a retiré exactement deux fois tout entier a qui est à échanger. Pour être clair si un entier a à échanger intervient avec multiplicité $2r$ dans \mathcal{E}_{mp} , il intervient avec multiplicité $2(r-1)$ dans \mathcal{E}_{mp}^- . La partition de \mathcal{U}_{sp} est alors l'union de \mathcal{E}_{mp}^- avec $\mathcal{E}_{u,bp}$ et de l'ensemble formé des éléments $(a+1, a-1)$ où a parcourt l'ensemble des entiers à échanger. Avec cela, on vérifie facilement que ψ_{sp} définit le même caractère infinitésimal que ψ_{bp} . En particulier il a la même propriété d'intégralité ou de demi-intégralité que le caractère infinitésimal de la représentation triviale. On remarque pour la suite que cette propriété d'intégralité ou de demi-intégralité du caractère infinitésimal ainsi que le fait que la restriction de $\psi_{bp,sp}$ à $W_{\mathbb{C}}$ est par définition une somme de caractères $\chi_{1/2, -1/2}^{\pm 1}$ et de caractères triviaux fait que $\psi_{bp,sp}$ est uniquement déterminé par l'orbite unipotente \mathcal{U}_{sp} (qui détermine la restriction de $\psi_{bp,sp}$ à $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$).

On démontre maintenant la propriété intermédiaire suivante. On a l'inclusion $\Pi(\psi_{bp}) \subset \Pi(\psi_{bp,sp})$. En effet soit X un élément de $\Pi(\psi_{bp,sp})$; X a comme caractère infinitésimal le caractère infinitésimal défini par $\psi_{bp,sp}$. On a vu que le front d'onde de X est la fermeture d'une orbite nilpotente spéciale dont la duale est l'orbite associée à $\psi_{bp,sp}$. Comme la bidualité est l'identité dans l'ensemble des orbites spéciales (Spaltenstein, voir [CM93]), le front d'onde de X est la fermeture de l'orbite duale de \mathcal{U}_{sp} . On en conclut que $X \in \Pi(\psi_{bp,sp})$ en utilisant la définition même de [BV85] à condition que \mathcal{U}_{sp} soit paire. C'est le cas quand \mathcal{E}_{mp}^- , défini ci-dessus, est l'ensemble vide. On se ramène facilement à ce cas puisque si \mathcal{E}_{mp}^- ne fait plus que produire une induction $(*_a \chi_{1/2, -1/2} \circ \det_a) * X'$ où a parcourt l'ensemble des éléments de \mathcal{E}_{mp}^- avec une multiplicité moitié et où X' est convenable. Cela termine la preuve de l'assertion intermédiaire. Au passage cela démontre (i) en toute généralité grâce encore à 6.12.

Montrons (ii) dans le cas particulier où ψ et ψ' vérifient $\psi = \psi_{bp}$ et $\psi' = \psi'_{bp}$. Dans ce cas (ii) résulte du fait que $\psi_{bp,sp}$ est uniquement déterminé par un élément de $\Pi(\psi_{bp}, G) \cap \Pi(\psi'_{bp}, G)$ si cet ensemble est non vide, comme on l'a vu ci-dessus.

Montrons (ii) en toute généralité. On fixe ψ, ψ' comme dans l'énoncé de (ii) et on suppose que $\Pi(\psi, G) \cap \Pi(\psi', G) \neq \emptyset$ et on fixe X dans cette intersection. On a donc défini ψ_{bp} et ψ'_{bp} . On note m la dimension de la représentation ψ qui est aussi la dimension de la représentation ψ' et on note m_{bp} et m'_{bp} les dimensions des représentations ψ_{bp} et ψ'_{bp} . Et on raisonne par récurrence sur $\max(m - m_{bp}, m - m'_{bp})$. Si ce nombre est nul, on vient de démontrer (ii) et cela initialise la récurrence. Supposons que ce nombre ne soit pas nul. On fixe $p \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$ et $a \in \mathbb{N}$ tel que la représentation $\chi_{p, -p} \boxtimes R_a$ intervienne dans ψ ou dans ψ' et pas ni dans ψ_{bp} ni dans ψ'_{bp} ; ceci est tout à fait possible car une représentation irréductible intervenant dans ψ et non dans ψ_{bp} n'intervient par la définition même de ψ_{bp} pas non plus dans ψ'_{bp} . Et on impose en plus à p d'être maximum avec cette propriété. Par symétrie on suppose que $\chi_{p, -p} \boxtimes R_a$ intervient dans ψ et on montre d'abord que cette représentation intervient nécessairement dans ψ' . En effet, on note ψ^- le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant la représentation $\chi_{p, -p} \boxtimes R_a$ et sa contragrédiente. On a montré en 6.12 qu'il existe $X^- \in \Pi(\psi^-)$ tel que X soit l'induite irréductible $\chi_{p, -p} \circ \det_a * X^-$. Cela donne les paramètres de Langlands de X en fonction de ceux de X^- . On a aussi décrit X comme induite à partir d'un élément de $\Pi(\psi'_{bp})$ en utilisant le fait que $X \in \Pi(\psi', G)$ et on voit, en regardant les paramètres de Langlands que cela force le fait que la représentation $\chi_{p, -p} \boxtimes R_a$ et sa contragrédiente interviennent dans ψ' . On note alors ψ'^- l'analogue de ψ^- et on obtient aussi X'^- comme X^- . En regardant les paramètres

de Langlands, on vérifie que $X^- \simeq X'^-$. D'où $\Pi(\psi^-) \cap \Pi(\psi'^-) \neq \emptyset$. Et on obtient alors (ii), en appliquant l'hypothèse de récurrence à ces morphismes. \square

Références

- [ABV92] J. ADAMS, D. BARBASCH & D. A. VOGAN, JR. – *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Progress in Mathematics, vol. 104, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [Art84] J. ARTHUR – “On some problems suggested by the trace formula”, Lie group representations, II (College Park, Md., 1982/1983), Lecture Notes in Math., vol. 1041, Springer, Berlin, 1984, p. 1–49.
- [Art89] ———, “Unipotent automorphic representations: conjectures”, *Astérisque* (1989), no. 171-172, p. 13–71, Orbites unipotentes et représentations, II.
- [Art13] ———, *The endoscopic classification of representations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, Orthogonal and symplectic groups.
- [Bar] D. BARBASCH – “Unipotent representations and theta correspondence”, Notes d'un exposé à Dubrovnik, disponibles à <http://www.math.cornell.edu/~barbasch/>.
- [Bar89] D. BARBASCH – “The unitary dual for complex classical Lie groups”, *Invent. Math.* **96** (1989), no. 1, p. 103–176.
- [Bar03] E. M. BARUCH – “A proof of Kirillov’s conjecture”, *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), no. 1, p. 207–252.
- [BR10] A. I. BADULESCU & D. RENARD – “Unitary dual of $GL(n)$ at Archimedean places and global Jacquet-Langlands correspondence”, *Compos. Math.* **146** (2010), no. 5, p. 1115–1164.
- [BV85] D. BARBASCH & D. A. VOGAN, JR. – “Unipotent representations of complex semisimple groups”, *Ann. of Math. (2)* **121** (1985), no. 1, p. 41–110.
- [CM93] D. H. COLLINGWOOD & W. M. MCGOVERN – *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.
- [GF] W. T. GAN & G. FAN – “The langlands-weissman program for brylinski-deligne extensions”, prépublication, <http://arxiv.org/abs/1409.4039>.
- [KV95] A. W. KNAPP & D. A. VOGAN, JR. – *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Mathematical Series, vol. 45, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
- [Lan79] R. P. LANGLANDS – “Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen”, Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 205–246.
- [LS79] G. LUSZTIG & N. SPALTENSTEIN – “Induced unipotent classes”, *J. London Math. Soc. (2)* **19** (1979), no. 1, p. 41–52.
- [Mœg] C. MŒGLIN – “Paquets d’arthur spéciaux unipotents aux places archimédiennes et correspondance de howe”, prépublication, <http://webusers.imj-prg.fr/~colette.moeglin/pourhowe.pdf>.
- [Mœg96] C. MŒGLIN – “Représentations quadratiques unipotentes des groupes classiques p -adiques”, *Duke Math. J.* **84** (1996), no. 2, p. 267–332.
- [Spa82] N. SPALTENSTEIN – *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 946, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.
- [Tad09] M. TADIĆ – “ $GL(n, \mathbb{C})$ and $GL(n, \mathbb{R})$ ”, Automorphic forms and L -functions II. Local aspects, Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2009, p. 285–313.
- [Vog86] D. A. VOGAN, JR. – “The unitary dual of $GL(n)$ over an Archimedean field”, *Invent. Math.* **83** (1986), no. 3, p. 449–505.
- [Wei] M. WEISSMAN – “ l -groups and parameters for covering groups”, prépublication, <http://arxiv.org/abs/1507.01042>.

- [Zhe74] D. P. ZHELOBENKO – *Garmonicheskii analiz na poluprostykh kompleksnykh gruppakh Li*, Izdat. “Nauka”, Moscow, 1974, Sovremennye Problemy Matematiki. [Current Problems in Mathematics].

February 2, 2017

COLETTE MOEGLIN, CNRS, Institut Mathématique de Jussieu • *E-mail* : `colette.moeglin@imj-prg.fr`

DAVID RENARD, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique

E-mail : `david.renard@polytechnique.edu`