THÉORIE DE HODGE DES APPLICATIONS ALGÉBRIQUES
D'APRÈS M.A. DE CATALDO ET L. MIGLIORINI
EXPOSÉS À STRASBOURG, 10 ET 17 MARS 2005

Claude Sabbah

Exposé 1 : théorème de Lefschetz et semi-simplicité des représentations du groupe fondamental

1.a. Le théorème de Lefschetz difficile absolu et en famille. Si X est une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ de dimension n, le théorème de Lefschetz classique affirme que, si $L_X \in H^2(X,\mathbb{Q})$ est la première classe de Chern d'un fibré en droites ample, les applications $L_X^k : H^{n-k}(X,\mathbb{Q}) \to H^{n+k}(X,\mathbb{Q})$ sont des isomorphismes pour tout $k \geqslant 1$. La démonstration transcendante montre plus précisément que ce sont des isomorphismes lorsque les coefficients sont complexes, mais cela revient bien sûr au même, puisque $H^{n+k}(X,\mathbb{C}) \simeq H^{n+k}(X,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Pour la compréhension de la topologie qui se cache derrière ce théorème, je conseille vivement la lecture de [**12**]. Les résultats qui suivent sont expliqués en détail dans [**18**, chap. 16].

Lorsque $f : X \to Y$ est une famille projective de variétés algébriques projectives lisses paramétrée par une variété lisse Y, la famille des cohomologies $H^k(X_y,\mathbb{Q})$ forme, pour tout k, un faisceau localement constant, qu'on note $R^k f_* \mathbb{Q}_X$. Le choix d'un fibré relativement ample (provenant par exemple d'un plongement de la famille $f : X \to Y$ dans une famille $\mathbb{P}^N \times Y \to Y$) donne aussi des isomorphismes de faisceaux $L^k_{X/Y}$: $R^{n-k} f_* \mathbb{Q}_X \xrightarrow{\sim} R^{n+k} f_* \mathbb{Q}_X$ ($k \geqslant 1$), ce qui permet d'affirmer à Deligne en 1968 [**4**] que *le complexe $Rf_*\mathbb{Q}_X$ se décompose en somme directe de ses faisceaux de cohomologie* :

$$Rf_*\mathbb{Q}_X \simeq \oplus_k R^k f_* \mathbb{Q}_X[-k].$$

Lorsqu'on choisit des coefficients complexes, le complexe $Rf_*\mathbb{C}_X$ peut se réaliser comme le complexe image directe par f du complexe de de Rham des formes différentielles C^∞, noté $(f_*\mathscr{E}_X^\bullet, d)$: les sections locales de $f_*\mathscr{E}_X^k$ sur un ouvert V de Y sont les k-formes C^∞ sur $f^{-1}(V)$ et la différentielle d est la différentielle des formes sur X. En général, l'isomorphisme dépend du choix de la classe relativement ample $L_{X/Y}$.

L'énoncé ci-dessus vaut aussi lorsque Y est une variété analytique complexe non compacte. Le théorème de Lefschetz difficile relatif à f s'insère dans un énoncé plus précis (*cf.* [**5**]), disant que chaque faisceau localement constant $R^k f_* \mathbb{C}_X$ sous-tend une variation de structure de Hodge polarisée de poids k. Lorsque Y est elle-même *projective* (ou quasi-projective, mais cela est plus difficile), cela implique que chaque faisceau localement constant $R^k f_* \mathbb{C}_X$ est *semi-simple*, c'est-à-dire correspond à une représentation linéaire de $\pi_1(Y)$ dans un $\mathrm{GL}(d_k, \mathbb{C})$ qui est *somme directe de représentations irréductibles*. On peut remarquer que ceci implique aussi qu'il en est de même à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (une représentation linéaire $\pi \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{Q})$ est semi-simple si et seulement si sa complexifiée $\pi \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ l'est).

Il faut remarquer que le théorème de Lefschetz difficile est intimement lié à une propriété de semi-simplicité d'une représentation du groupe fondamental.

– L'énoncé ci-dessus montre que, grâce à ce théorème, on produit beaucoup de telles représentations (et on ne peut pas produire autre chose à l'aide d'une famille de variétés algébriques projectives lisses).

– D'un autre côté, la méthode originale de Lefschetz pour démontrer le théorème pour une variété projective, même si, au bout du compte la démonstration ne fonctionne pas, consiste à utiliser un pinceau d'hyperplans assez général donnant lieu à une famille X_y paramétrée par $\mathbb{P}^1$ de sections hyperplanes, et à montrer que, si $Y \subset \mathbb{P}^1$ est l'ouvert où les X_y sont lisses, les faisceaux localement constants de fibre $H^k(X_y, \mathbb{Q})$ ($y \in Y$) sont *semi-simples*, et plus précisément la représentation associée se décompose en deux termes : la représentation triviale d'une certaine dimension (cycles invariants) et une représentation *irréductible* non triviale (cycles évanescents). De fait, cet énoncé et le théorème de Lefschetz difficile sont équivalents (*cf.* [**12**]).

1.b. Généralisation pour la cohomologie à coefficients dans un système local. On peut se demander si le théorème de Lefschetz difficile reste vrai, sur une variété projective lisse, pour la cohomologie à coefficients dans un faisceau localement constant (correspondant à une représentation linéaire de dimension finie du groupe fondamental de X dans $\mathrm{GL}(d, \mathbb{Q})$). Si $\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}$ est un tel faisceau, le cup produit avec L_X est un homomorphisme $H^k(X, \mathscr{L}_{\mathbb{Q}}) \to H^{k+2}(X, \mathscr{L}_{\mathbb{Q}})$, et l'énoncé de Lefschetz difficile a un sens.

Il est facile de fabriquer un exemple (une représentation linéaire de rang 2 sur une surface de Riemann de genre $g \geqslant 2$) pour lequel l'énoncé voulu est faux. Ceci tient au fait que la représentation est extension non triviale de deux représentations de rang 1, donc n'est pas semi-simple.

Ici encore, la semi-simplicité intervient :

***Théorème 1.1* (Corlette, Simpson 1988).** *Si la représentation de $\pi_1(X)$ attachée à $\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}$ est* semi-simple*, alors le théorème de Lefschetz à coefficients dans $\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}$ est vrai.*

Le résultat repose sur une extension de la théorie de Hodge (fibrés de Higgs et métriques harmoniques).

1.c. Le langage des faisceaux pervers. Le théorème de Lefschetz difficile ne peut pas être vrai pour toute variété projective singulière, puisqu'en général les espaces H^{n-k} et H^{n+k} n'ont pas même dimension.

La philosophie générale pour traiter ce type de question dans le cas singulier est que *si on remplace dans les énoncés la cohomologie par la cohomologie d'intersection et les faisceaux localement constants par des faisceaux pervers*, ceux-ci restent vrais.

Il est donc utile de faire un petit arrêt sur les faisceaux pervers, qui resteront néanmoins pour cet exposé dans une boîte noire. Je conseille vivement la lecture de quelques chapitres du livre [**7**] pour se faire une idée précise des principaux résultats utilisés ci-dessous.

Un *faisceau pervers* sur X est en fait un complexe de faisceaux sur X (et plus précisément un objet dans la catégorie dérivée des complexes à cohomologie $\mathbb{Q}$-constructible). Je ne donne pas la définition de tels objets, mais plutôt quelques propriétés essentielles, qui les font ressembler à des faisceaux.

(i) Tout morphisme φ (dans la catégorie dérivée) entre deux faisceaux pervers $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ a un *noyau* $\operatorname{Ker}\varphi$ et un conoyau $\operatorname{Coker}\varphi$, qui sont des faisceaux pervers.

(ii) Si tout complexe $\mathscr{F}^\bullet$ à cohomologie constructible a des faisceaux de cohomologie (au sens usuel) qu'on note $\mathscr{H}^j\mathscr{F}^\bullet$, il a aussi des « faisceaux de cohomologie perverse » qu'on note ${}^p\mathscr{H}^j\,\mathscr{F}^\bullet$.

(iii) (Convention de décalage pervers) Il est commode de centrer les complexes sur la dimension complexe de la variété sur laquelle ils vivent. Ainsi, le faisceau constant sur X lisse décalé de $\dim X$ est noté ${}^p\mathbb{Q}_X$ et il est pervers par définition. Le faisceau $\mathbb{Q}_X$ n'est pas pervers, mais il a un seul groupe de cohomologie perverse, en degré $\dim X$. De cette manière, la dimension des variétés disparaît dans les énoncés, et tout est centré en 0.

(iv) Toute suite exacte de complexes à cohomologie constructible (et plus généralement tout triangle distingué) donne lieu à une suite longue de cohomologie, et aussi à une suite longue de cohomologie perverse (le lien entre ces deux suites se fait par une suite spectrale, et n'est pas très simple dans la pratique).

(v) Si $f : X \to Y$ est une application propre entre variétés algébrique, la suite spectrale de Leray classique (théorème de Fubini cohomologique)

$$E_2^{i,j} = H^i(Y, R^j f_*\mathbb{Q}_X) \Longrightarrow H^{i+j}(X, \mathbb{Q}_X)$$

a une variante perverse pour tout faisceau pervers $\mathscr{F}$:

$${}^pE_2^{i,j} = \boldsymbol{H}^i(Y, {}^pR^j f_*\mathscr{F}) \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{i+j}(X, \mathscr{F}),$$

où ${}^pR^jf_*\mathscr{F}$ désigne le j-ième groupe de cohomologie perverse du complexe $Rf_*\mathscr{F}$, aussi noté ${}^p\mathscr{H}^j(Rf_*\mathscr{F})$, et $\boldsymbol{H}$ désigne l'hypercohomologie (nécessaire puisque $\mathscr{F}$ et ${}^pR^jf_*\mathscr{F}$ sont des *complexes*).

(vi) Un faisceau pervers $\mathscr{F}$ sur X peut être nul hors d'un sous-ensemble algébrique fermé Z. Si Z est minimal, on dit que c'est le *support* de $\mathscr{F}$. Il existe alors un ouvert de Zariski dense Z^o de Z et un faisceau localement constant $\mathscr{L}$ sur Z^o tel que $\mathscr{F}_{|Z^o} = {}^p\mathscr{L} \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{L}[\dim Z^o]$.

Par exemple, si Z est localement intersection complète dans une variété lisse X, le faisceau ${}^p\mathbb{Q}_Z$ est pervers. Ce n'est pas le cas en général pour Z quelconque.

(vii) Un faisceau pervers est dit *irréductible* s'il n'a pas de sous-faisceau pervers ni de quotient pervers non trivial (ici, injectif et surjectif sont à entendre au sens pervers). Sur une variété projective, tout faisceau pervers est extension finie (au sens pervers) de faisceaux pervers irréductibles.

Deux raisons peuvent expliquer la non-irréductibilité d'un faisceau pervers $\mathscr{F}$:

– il existe un sous-faisceau ou un quotient pervers à support strictement contenu dans le support du faisceau pervers de départ,

– le faisceau pervers restreint à un ouvert de Zariski dense où c'est un faisceau localement constant décalé peut ne pas être irréductible au sens des faisceaux localement constants, *i.e.*, la représentation linéaire associée n'est pas irréductible.

Ces deux raisons sont les seules :

Théorème 1.2. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau pervers irréductible sur X. Alors son support Z est irréductible et le faisceau localement constant décalé ${}^p\mathscr{L} = \mathscr{F}_{|Z^o}$ est irréductible. De plus, $\mathscr{F}$ est isomorphe au* complexe d'intersection $\mathrm{IC}({}^p\mathscr{L})$ *à coefficients dans ${}^p\mathscr{L}$, dont l'hypercohomologie est la cohomologie d'intersection à coefficients dans ${}^p\mathscr{L}$:*

$$\boldsymbol{H}^k(X, \mathrm{IC}({}^p\mathscr{L})) = \mathrm{IH}^{\dim Z+k}(Z, \mathscr{L}).$$

(On appelle aussi $\mathrm{IC}({}^p\mathscr{L})$ l'extension intermédiaire ou minimale de ${}^p\mathscr{L}$.)

Remarque 1.3. Si $\mathscr{F}$ est pervers irréductible, de la forme $\mathrm{IC}({}^p\mathscr{L})$, alors le dual de Poincaré-Verdier de $\mathscr{F}$ est aussi pervers irréductible, et il est de la forme $\mathrm{IC}({}^p\mathscr{L}^\vee)$, où ${}^p\mathscr{L}^\vee$ est le système local dual de ${}^p\mathscr{L}$.

Par exemple, si Z est localement intersection complète, ${}^p\mathbb{Q}_Z$ est pervers, mais en général non isomorphe à son dual, sauf dans le cas où Z est une $\mathbb{Q}$-variété.

1.d. Les théorèmes de Lefschetz difficile et de décomposition dans le cas singulier. Soit X une variété projective éventuellement singulière et $L_X \in H^2(X, \mathbb{Q})$ la classe d'un fibré ample. On peut définir l'action du cup-produit avec L_X sur les espaces de cohomologie d'intersection $\mathrm{IH}^\bullet(X, {}^p\mathbb{Q})$. En 1981, Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber [**1**] ont donné une démonstration du résultat suivant, en utilisant une méthode arithmétique, c'est-à-dire en se ramenant à des variétés définies sur $\mathbb{Z}$, puis en réduisant modulo p et en montrant le résultat pour des faisceaux pervers ℓ-adiques :

***Théorème 1.4* (de décomposition).** *Soient X et Y des variétés projectives (éventuellement singulières).*

(i) *Pour tout $k \geqslant 1$, $L_X^k : \mathrm{IH}^{-k}(X, {}^p\mathbb{Q}_X) \to \mathrm{IH}^k(X, {}^p\mathbb{Q}_X)$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si $f : X \to Y$ est un morphisme, et $L_{X/Y}$ est la classe d'un fibré relativement ample, alors*

(a) *pour tout $k \geqslant 1$, $L_{X/Y}^k : {}^pR^{-k}f_* \mathrm{IC}({}^p\mathbb{Q}_X) \to {}^pR^k f_* \mathrm{IC}({}^p\mathbb{Q}_X)$ est un isomorphisme,*

(b) *le complexe $Rf_* \mathrm{IC}({}^p\mathbb{Q}_X)$ se décompose en somme directe de ses faisceaux de cohomologie perverse : $Rf_* \mathrm{IC}({}^p\mathbb{Q}_X) \simeq \oplus_k {}^pR^k f_* \mathrm{IC}({}^p\mathbb{Q}_X)[k]$,*

(c) *chaque faisceau de cohomologie perverse ${}^pR^k f_* \mathrm{IC}({}^p\mathbb{Q}_X)$ est* semi-simple*, i.e., somme directe de complexe d'intersection associés à des faisceaux localement constants irréductibles.*

Remarques 1.5

(1) Le point (i) est un cas particulier du point (ii) (faire $Y = \mathrm{pt}$). De plus, en utilisant la résolution des singularités d'Hironaka, on peut ramener la démonstration du point (ii) au cas où X est lisse (donc $\mathrm{IC}({}^p\mathbb{Q}_X) = {}^p\mathbb{Q}_X$).

(2) Dans le point (ii), le (b) résulte du (a) par un argument de Deligne [**4**].

(3) Une application intéressante de (ii)(b) s'obtient lorsque $f : X \to Y$ est une résolution des singularités de Y : on obtient que la cohomologie d'intersection de Y est facteur direct de la cohomologie de X. De manière plus précise, les espaces en question sont munis d'une structure de Hodge (pure) polarisée, et la décomposition est compatible à la structure de Hodge et orthogonale par rapport à la polarisation.

Le théorème de décomposition a reçu une démonstration transcendante en 1988 par M. Saito [**16**], en utilisant la théorie des $\mathscr{D}$-modules. Dans l'article [**3**], les auteurs proposent une nouvelle démonstration de ce théorème, en restant dans le cadre algébrique complexe, mais par des méthodes très différentes de celles de Saito.

1.e. Extension au cas des systèmes locaux de coefficients. M. Kashiwara [**10**] avait conjecturé que le théorème de décomposition reste vrai lorsqu'on y remplace $\mathrm{IC}({}^p\mathbb{Q}_X)$ par un *faisceau pervers semi-simple quelconque*[(1)].

En 2001, Drinfel'd a proposé une démonstration arithmétique du théorème, en s'appuyant sur une conjecture, non encore prouvée à cette époque, de de Jong sur l'irréductibilité de certaines représentations de groupes fondamentaux arithmétiques. Cette conjecture a été démontrée un peu plus tard en 2003 [**2, 8**].

[(1)] Il conjecture plus généralement que le même théorème vaut, une fois traduit en termes de $\mathscr{D}$-modules, pour les $\mathscr{D}$-modules holonomes irréductibles ; je ne parlerai pas de cet aspect, qui reste encore largement ouvert.

Lorsque X est lisse (mais $f : X \to Y$ ne l'est pas nécessairement), j'ai pu montrer dans [**15**], à la même époque que Drinfel'd, le théorème de décomposition pour tout système local de coefficient sur X qui est *semi-simple* par une méthode transcendante généralisant celle de M. Saito. Je ne sais pas si la méthode de [**3**] peut s'adapter à cette situation.

Enfin, T. Mochizuki [**13, 14**] a donné une démonstration transcendante dans le cas général des faisceaux pervers semi-simples.

Exposé 2 : la géométrie du théorème de décomposition

Dans la suite, X désignera toujours une variété projective lisse, de dimension (disons pure) n.

La cohomologie de X est graduée par le degré. Cette graduation est aussi celle par le poids de la structure de Hodge mixte naturelle : chaque $H^k(X, \mathbb{Q})$ est muni d'une structure de Hodge de poids k. On dispose de plus de la dualité de Poincaré. Le choix supplémentaire d'un fibré en droites ample fournit un endomorphisme L_X homogène de degré 2 sur cette cohomologie, à savoir le « cup produit » avec la première la première classe de Chern de ce fibré.

Dans cet exposé, j'aborde la question suivante : comment une telle structure est-elle enrichie par la donnée d'un morphisme projectif $f : X \to Y$? Ou, dit autrement : quelles conditions nécessaires doit satisfaire la cohomologie de X pour qu'un tel morphisme puisse exister.

Dans [**3**], les auteurs donnent toute une famille de conditions. Ils analysent en détail notamment la cohomologie d'une résolution des singularités d'une variété de dimension 3.

2.a. La suite spectrale de Leray. La suite spectrale de Leray classique pour une application continue propre (théorème de Fubini topologique) a pour terme $E_2^{ij} = H^i(Y, R^j f_* \mathbb{Q}_X)$ et converge vers $H^{i+j}(X, \mathbb{Q}_X)$. Cela signifie qu'il existe sur tout $H^k(X, \mathbb{Q}_X)$ une filtration décroissante $\mathrm{Ler}^\bullet H^k(X, \mathbb{Q}_X)$, dite filtration de Leray, telle que, pour tout r assez grand on ait $E_r^{i,j} = \mathrm{gr}^i_{\mathrm{Ler}} H^{i+j}(X, \mathbb{Q}_X)$.

Si X, Y, f sont tous lisses et projectif, Deligne a montré [**4**] (voir aussi [**9**] ou [**18**]), en utilisant le théorème de Lefschetz difficile relatif à f (*cf.* § 1.a) que *la suite spectrale de Leray dégénère en E_2*. Cela signifie que les gradués de la filtration de Leray sur $H^{i+j}(X, \mathbb{Q}_X)$ sont canoniquement isomorphes aux $H^i(Y, R^j f_* \mathbb{Q}_X)$.

En particulier, pour tout k, le morphisme naturel

$$H^k(X, \mathbb{Q}_X) = \mathrm{Ler}^0 H^k(X, \mathbb{Q}_X) \longrightarrow \mathrm{gr}^0_{\mathrm{Ler}} H^k(X, \mathbb{Q}_X) = \Gamma(Y, R^k f_* \mathbb{Q}_X)$$

est surjectif : ceci est connu sous le nom de « théorème global des cycles invariants » (sur une base projective).

Deligne a aussi montré que le choix d'une classe relativement ample $L_{X/Y}$ permet de définir, pour chaque k, un isomorphisme

$$H^k(X,\mathbb{Q}_X) \simeq \bigoplus_{i+j=k} H^i(Y,R^jf_*\mathbb{Q}_X),$$

c'est-à-dire une scission de la filtration de Leray (pour laquelle le morphisme des « cycles invariants » est la projection).

Tout cela n'est plus vrai si f n'est pas lisse mais, suivant le principe général, l'énoncé pervers analogue est vrai, comme il résulte du théorème de décomposition et des mêmes arguments que ceux utilisés par Deligne mais rendus pervers. Explicitons ceci.

Pour la suite, il sera commode de rendre croissante la filtration de Leray : si $\mathrm{Ler}^\bullet H^k(X,\mathbb{Q}_X)$ désigne la filtration de Leray décroissante usuelle, telle que $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{Ler}} H^{i+j}(X,\mathbb{Q}_X) = E^{ij}_\infty$, on posera $\mathrm{Ler}_j H^k(X,\mathbb{Q}_X) = \mathrm{Ler}^{k-j}H^k(X,\mathbb{Q}_X)$, de sorte que $\mathrm{Ler}_\bullet H^k(X,\mathbb{Q}_X)$ est croissante et $\mathrm{gr}^{\mathrm{Ler}}_j H^{i+j}(X,\mathbb{Q}_X) = E^{ij}_\infty$.

D'une manière générale, pour un morphisme algébrique (ou analytique complexe) propre issu de X lisse, il existe une suite spectrale de Leray perverse, de terme $E^{ij}_2 = \boldsymbol{H}^i(Y,{}^pR^jf_*{}^p\mathbb{Q}_X)$ (j'utilise ici la convention de décalage pervers), qui converge vers $H^{i+j}(X,{}^p\mathbb{Q}_X) = H^{n+i+j}(X,\mathbb{Q})$. Ce dernier espace est donc muni d'une filtration de Leray *perverse* (croissante), en générale distincte de la filtration de Leray classique, dont les gradués associés $\mathrm{gr}_j H^{i+j}(X,{}^p\mathbb{Q}_X)$, lorsque X,Y,f sont projectifs et d'après la remarque ci-dessus, sont canoniquement isomorphes aux espaces d'hypercohomologie $\boldsymbol{H}^i(Y,{}^pR^jf_*{}^p\mathbb{Q}_X)$.

Théorème 2.1 **([3]).** *La filtration de Leray perverse de $H^k(X,\mathbb{Q})$ est une filtration par des sous-structures de Hodge de poids k. Les gradués de la filtration de Leray sont donc canoniquement munis d'une structure de Hodge de poids k.*

En utilisant les méthodes de Deligne [**4**], les auteurs de [**3**] démontrent aussi, comme corollaire du théorème de décomposition 1.4, que le choix d'une classe relativement ample $L_{X/Y}$ permet d'obtenir une scission particulière de la filtration de Leray, c'est-à-dire un isomorphisme

$$H^k(X,{}^p\mathbb{Q}_X) \simeq \bigoplus_{i+j=k} \boldsymbol{H}^i(Y,{}^pR^jf_*{}^p\mathbb{Q}_X),$$

mais cette décomposition n'est pas nécessairement compatible à la structure de Hodge.

En conclusion, la présence d'un morphisme $f: X \to Y$ induit « presque » une graduation supplémentaire sur la cohomologie de X. Nous pouvons maintenant considérer la « bi-polarisation » induite par les classes L_X, L_Y de fibrés en droites amples sur X et Y respectivement.

2.b. Filtration monodromique et structure de Lefschetz. Si H est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'un endomorphisme nilpotent L, il existe une unique filtration croissante $M_\bullet(L,H)$ de H, finie, exhaustive et indexée par $\mathbb{Z}$, telles que

(i) $L(M_\ell)\subset M_{\ell-2}$,

(ii) pour tout $k\geqslant 1$, L^k induit un isomorphisme $\mathrm{gr}_k^M H\to \mathrm{gr}_{-k}^M H$ soit un isomorphisme.

On construit facilement cette filtration en utilisant une décomposition de Jordan de L ; la filtration est unique alors que la décomposition de Jordan ne l'est pas ; la donnée d'une décomposition de Jordan revient à celle d'une identification entre H et son gradué $\sum_\ell \mathrm{gr}_\ell^M H$.

On peut reformuler le théorème de Lefschetz difficile en disant que, sur l'espace $H=H^\bullet(X,\mathbb{Q})$, la filtration monodromique associée à L_X est, à un décalage de n près, la filtration par l'opposé du degré (car L augmente le degré de 2, au lieu de le diminuer de 2) ; autrement dit, la filtration par l'opposé du degré est la filtration monodromique *centrée en* $-n$.

2.c. Filtration monodromique relative et structure bi-Lefschetz. Considérons maintenant un morphisme $f:X\to Y$, avec toujours X,Y projectives et X lisse.

Soit L_Y la classe d'un fibré en droites ample sur Y. Alors L_Y définit un endomorphisme nilpotent, encore noté L_Y, sur $H\overset{\text{déf}}{=}H^\bullet(X,\mathbb{Q})$. Il admet donc une filtration $M_\bullet(L_Y,H)$. Comme les endomorphismes L_X et L_Y sont homogènes de degré 2, ils commutent. Mais il y a plus.

Pour expliquer la relation entre L_X et L_Y, introduisons la terminologie générale suivante. Soient L',L'' deux endomorphismes nilpotents d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel H *qui commutent.* On vérifie facilement que L'' préserve la filtration monodromique de L' (et réciproquement), donc induit un endomorphisme nilpotent, encore noté L'', sur chaque gradué $\mathrm{gr}_k^{M(L')}H$. Cet endomorphisme nilpotent admet un filtration monodromique.

On dit que L'' est *bien placé par rapport à* L' si la filtration monodromique $M_\bullet(L'',H)$ induit, sur chaque $\mathrm{gr}_k^{M(L')}H$, la filtration monodromique de L'' agissant sur $\mathrm{gr}_k^{M(L')}H$ *centrée en* k. Autrement dit, en notant $W_\bullet\,\mathrm{gr}_k^{M(L')}H$ la filtration *induite par* $M_\bullet(L'',H)$, on doit avoir pour tout $\ell\in\mathbb{N}$ un isomorphisme

$$\mathrm{gr}^W_{k+\ell}\,\mathrm{gr}_k^{M(L')}H\xrightarrow[\sim]{L''^\ell}\mathrm{gr}^W_{k-\ell}\,\mathrm{gr}_k^{M(L')}H.$$

On peut aussi exprimer ceci par la formule

$$W_\bullet\,\mathrm{gr}_k^{M(L')}H=M_{k+\bullet}(L'',\mathrm{gr}_k^{M(L')}H).$$

Attention, cette propriété n'est pas symétrique en L',L''.

Théorème 2.2 **(théorème de Lefschetz difficile pour un morphisme, [3])**
Pour $f:X\to Y$ et L_X,L_Y comme ci-dessus, l'endomorphisme nilpotent L_X sur $H^\bullet(X,\mathbb{Q})$ est bien placé par rapport à L_Y.

D'autre part, pour tout ℓ, le gradué $\mathrm{gr}_\ell^{M(L_X)} H$ de la filtration $M_\bullet(L_X, H)$ s'identifie (canoniquement) à $H^{n-\ell}(X,\mathbb{Q})$: c'est une façon d'exprimer le théorème de Lefschetz difficile. Comment alors exprimer le théorème de Lefschetz difficile pour un morphisme, c'est-à-dire comment interpréter cohomologiquement (*i.e.*, sans faire appel à un quelconque fibré ample) les espaces bigradués intervenant ci-dessus ? C'est ce que nous allons voir au corollaire 2.3.

Dans [**3**], les auteurs interprètent (et redémontrent) le théorème de Lefschetz difficile comme suit (on note $H = H^\bullet(X, {}^p\mathbb{Q}_X) = H^{n+\bullet}(X,\mathbb{Q})$) :

Corollaire 2.3. *Si L_Y est la classe d'un fibré ample sur Y, la filtration $M_\bullet(L_Y, H)$ est la filtration de Leray perverse (croissante) associée au morphisme f et, pour tout i, j, $\boldsymbol{H}^j(Y, {}^pR^i f_* {}^p\mathbb{Q}_X)$ est canoniquement isomorphe à l'espace bigradué $\mathrm{gr}^W_{-(i+j)} \mathrm{gr}^{M(L_Y)}_{-j} H$.*

On déduit de ce théorème une décomposition bi-Lefschetz de chaque espace $\boldsymbol{H}^j(Y, {}^pR^i f_* {}^p\mathbb{Q}_X)$, dont les termes s'obtiennent à partir de la partie bi-primitive (*i.e.*, $\operatorname{Ker} L_X^{i+1} \cap \operatorname{Ker} L_Y^{j+1}$) en appliquant des monômes $L_X^a L_Y^b$.

Remarque 2.4 **(comportement vis-à-vis de la décomposition)**
Comme indiqué plus haut, le choix d'une classe relativement ample $L_{X/Y}$ induit une scission de la filtration de Leray perverse. Alors l'endomorphisme L_Y est compatible à cette scission, mais L_X ne l'est pas nécessairement.

2.d. Polarisation. Je garde la convention de décalage pervers et, pour X projective lisse, je pose $H = H^*(X, {}^p\mathbb{Q}_X)$. Si X est projective lisse, la forme d'intersection S (=intégration sur la classe fondamentale du cup produit) induit des accouplements non dégénérés $S_\ell = H^{-\ell} \otimes H^\ell \to \mathbb{Q}$ ($\ell \in \mathbb{Z}$). Toute classe ample L_X *polarise* cette donnée (tenant compte des structures de Hodge) au sens suivant : pour tout $\ell \leqslant 0$, définissons l'accouplement $S_\ell^{L_X} : H^{-\ell} \otimes H^{-\ell} \to \mathbb{Q}$ par

$$S_\ell^{L_X}(x,y) = S_\ell(x, L_X^\ell y) = S_\ell(L_X^\ell x, y);$$

alors la décomposition de Lefschetz de $H^{-\ell}$ relative à L_X est orthogonale par rapport à $S_\ell^{L_X}$ et, en posant $\varepsilon(k) = (-1)^{k(k-1)/2}$, la forme $\varepsilon(\dim X - \ell) S_\ell^{L_X}$ induit une polarisation sur la partie primitive $P^{-\ell}$ (qui est une structure de Hodge pure de poids $\dim X - \ell$, pour laquelle on a un opérateur de Weil C, l'assertion voulant dire que $\varepsilon(\dim X - \ell) S_\ell^{L_X}(Cx, \overline{y})$ est hermitienne définie positive sur $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} P^{-\ell}$).

Comment cet énoncé s'étend-il en présence d'un morphisme $f : X \to Y$, et donc d'une classe L_Y ?

Théorème 2.5 **([3])**
(i) *Pour tous i, j, la forme S induit des accouplements non dégénérés $S_{ij} : H^{-i,-j} \otimes H^{i,j} \to \mathbb{Q}$, en posant $H^{i,j} = \boldsymbol{H}^j(Y, {}^pR^i f_* {}^p\mathbb{Q}_X)$ et, pour tous $i, j \geqslant 0$, des accouplements non dégénérés $S_{ij}^{L_X L_Y} \overset{\text{déf}}{=} S_{ij}(\bullet, L_X^i L_Y^j \bullet) : H^{-i,-j} \otimes H^{-i,-j} \to \mathbb{Q}$.*

(ii) *La décomposition bi-Lefschetz de* $H^{-i,-j}$ *est orthogonale relativement à* $S_{ij}^{L_X L_Y}$.

(iii) *Les parties bi-primitives* $P^{-i,-j}$ *sont des sous-structures de Hodge de* $H^{-(i+j)}$ *(de même poids) et la forme* $\varepsilon(\dim X-i-j)S_{ij}^{L_X L_Y}$ *y induit une polarisation (à l'aide de l'opérateur de Weil* C*).*

2.e. Un complément. Si X est projective lisse de dimension n, la partie de la cohomologie qui ne peut être vue par les sections hyperplanes associées au fibré ample correspondant à L_X est la partie primitive $P^0(L_X)=\operatorname{Ker} L_X : H^n(X,\mathbb{Q})\to H^{n+2}(X,\mathbb{Q})$. Ce dernier morphisme étant surjectif (Lefschetz difficile), on voit en particulier que $\dim P^0(L_X)=b_n-b_{n+2}$.

Si on s'est donné X,Y,f projectifs comme plus haut et L_Y ample sur Y, on peut considérer la famille à un paramètre t de classes L_Y+tL_X. Celles-ci sont amples pour $t>0$, d'où une famille d'espaces $P_t^0=P^0(L_Y+tL_X)\subset H^n(X)$ de codimension b_{n+2}. On peut voir cette famille comme une courbe analytique réelle dans la grassmannienne de $H^n(X)$, et elle admet donc une limite P_o^0 (notée Λ dans [**3**]).

Quelle est la relation de P_o^0 avec $\operatorname{Ker} L_Y : H^n(X)\to H^{n+2}(X)$? On a de manière (presque) évidente une inclusion $P_o^0\subset \operatorname{Ker}[L_Y : H^n(X)\to H^{n+2}(X)]$. Je rappelle que, par Lefschetz, L_X est injectif sur $H^{n-2}(X)$. Alors

Théorème 2.6 **([3]).** *On a une décomposition (compatible avec les structures de Hodge)*

$$\operatorname{Ker}[L_Y : H^n(X)\to H^{n+2}(X)] = P_o^0\oplus L_X\big(\operatorname{Ker}[L_Y : H^{n-2}(X)\to H^n(X)]\big).$$

Exposé 3 : quelques commentaires sur les démonstrations

3.a. Une démonstration idéale. Soit X une variété projective lisse et L_X la classe de Chern d'un fibré en droites ample sur X. Supposons que l'on veuille montrer le théorème de Hodge et de Lefschetz difficile pour X, par récurrence sur la dimension de X.

Le cas favorable est celui où il existe un morphisme lisse $f : X\to Y$ vers une autre variété projective lisse Y, munie de L_Y, avec $\dim Y<\dim X$. Commençons par détailler cette situation.

Les faisceaux $R^jf_*\mathbb{Q}_X$ sont localement constants, puisque f est une fibration localement triviale de manière C^∞ (mais pas analytique en général). Il sera commode d'utiliser le décalage pervers pour ne pas s'occuper des dimensions des variétés X et Y. Ici, il s'agit simplement d'un décalage des indices. Je noterai donc ${}^pE_2^{ij}=H^i(Y,{}^pR^jf_*{}^p\mathbb{Q}_X)\Rightarrow H^{i+j}(X,{}^p\mathbb{Q}_X)$.

La démonstration du théorème de Hodge-Lefschetz pourrait alors procéder de la manière suivante :

(i) Par récurrence sur la dimension, le théorème de Hodge-Lefschetz est vrai pour les fibres de f (on les suppose lisses dans le cas favorable). On peut l'appliquer en famille (paramétrée par Y), pour conclure que :

(a) les faisceaux pervers localement constants ${}^pR^j f_* {}^p\mathbb{Q}_X$ sous-tendent une variation de structure de Hodge polarisée de poids $\dim X - \dim Y + j$,

(b) l'action de L_X restreinte aux fibres induit des isomorphismes L_X^r : ${}^pR^{-r} f_* {}^p\mathbb{Q}_X \xrightarrow{\sim} {}^pR^r f_* {}^p\mathbb{Q}_X$.

(ii) La cohomologie $H^i(Y, {}^pR^j f_* {}^p\mathbb{Q}_X)$ est alors la cohomologie de Y à coefficients dans un faisceau localement constant sous-tendant une variation de structure de Hodge polarisée. On ne peut pas appliquer la récurrence, puisque les coefficients sont plus généraux que les coefficients constants. On peut néanmoins étendre la démonstration classique du théorème de Hodge-Lefschetz à un tel système de coefficients :

(a) Si la variation de structure de Hodge était purement de type (p, p), la métrique associée serait plate, et on serait ramené à la démonstration du théorème de Hodge pour un fibré hermitien plat, qui est complètement analogue au cas des coefficients constants.

(b) Sinon, il faut remarquer que la métrique est *harmonique*, et adapter la notion de laplacien et de décomposition de la connexion plate en parties de type $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Deligne avait remarqué cette adaptation pour les variations de structure de Hodge polarisée, et Simpson s'en est inspiré pour l'étendre au cas des métriques harmoniques générales (*cf.* théorème 1.1).

(iii) Deligne a montré que le théorème de Lefschetz de (i)(b) implique que la suite spectrale de Leray dégénère en E_2. Ceci signifie qu'il existe sur $H^{i+j}(X, {}^p\mathbb{Q}_X)$ une filtration dont les gradués sont les ${}^pE_2^{ij}$. Une analyse plus précise de la suite spectrale de Leray montre que la filtration qui est censée être la filtration de Hodge sur $H^{i+j}(X, {}^p\mathbb{Q}_X)$ induit, sur les gradués de la filtration de Leray, la filtration de Hodge des ${}^pE_2^{ij}$. Idem pour la polarisation. Ceci permet de montrer que $H^{i+j}(X, {}^p\mathbb{Q}_X)$, muni de sa filtration (pas encore) de Hodge et de sa forme (pas encore) de polarisation est somme directe des ${}^pE_2^{ij}$ munis de leur filtration de Hodge et de leur polarisation. On en déduit que l'on peut supprimer le « pas encore » ci-dessus.

Adaptation : la méthode des pinceaux de Lefschetz. Un pinceau de sections hyperplanes définit un diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "\widetilde{f}"'] & X \arrow[d, dashed] \\ & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

où e est l'éclatement de la base du pinceau et $\widetilde{f}$ est un morphisme projectif dont les fibres sont les sections hyperplanes de X par les hyperplans du pinceau.

La méthode de M. Saito consiste à montrer que

(i) la cohomologie de X (avec sa structure de Hodge-Lefschetz) est facteur direct de celle de $\widetilde{X}$ (avec sa structure de Hodge-Lefschetz) ;

(ii) le complexe $R\widetilde{f}_*{}^p\mathbb{Q}_{\widetilde{X}}$ se décompose en somme directe de ses faisceaux de cohomologie perverse ;

(iii) chacun de ces faisceaux se décompose en somme directe de complexes d'intersection associés chacun à un faisceau localement constant sur un point de $\mathbb{P}^1$ ou sur un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1$, sous-jacent à une variation de structure de Hodge polarisée ;

(iv) l'hypercohomologie $\boldsymbol{H}^i(\mathbb{P}^1, {}^pR\widetilde{f}_*{}^p\mathbb{Q}_{\widetilde{X}})$ a une structure de Hodge-Lefschetz naturelle.

Le point (iv) repose essentiellement sur le théorème de Zucker [**19**] : c'est un calcul de cohomologie L^2 qui s'appuie lui-même sur les résultats de Schmid [**17**] concernant les limites de variations de structure de Hodge polarisée.

Conclusion. Un des outils essentiels dans la démonstration de Saito est la théorie des cycles évanescents. La démonstration procède par récurrence sur le couple $(\dim X, \dim f(X))$ ordonné lexicographiquement, en utilisant un dévissage par des pinceaux de Lefschetz. Elle permet aussi d'obtenir une structure de Hodge mixte sur les cycles évanescents d'une fonction holomorphe sur une variété algébrique, généralisation des formules de Picard-Lefschetz. L'analyse (théorie de Hodge) n'est utilisée que sur les surfaces de Riemann, *via* un théorème de Zucker : si $\mathscr{L}$ est un système local sur le complémentaire X^* d'un nombre fini de points dans une surface de Riemann compacte X, et si $\mathscr{L}$ est sous-jacent à une variation de structure de Hodge polarisée, alors les espaces $\mathrm{IH}^k(X, {}^p\mathscr{L}) = H^k(X, j_*{}^p\mathscr{L})$, si j est l'inclusion de X^* dans X, portent une structure de Hodge polarisée naturelle, donnée par une réalisation L^2 de la cohomologie d'intersection, à l'aide d'une métrique complète sur X^* ayant un comportement de type Poincaré au voisinage des points de $X \smallsetminus X^*$.

Ainsi, la méthode de Saito permet de retrouver la théorie de Hodge des variétés projectives lisses à partir de la théorie de Hodge (des variétés non compactes) en dimension 1.

3.b. La méthode des sections hyperplanes universelles. La méthode de de Cataldo et Migliorini procède par récurrence sur le couple $(r(f), \dim f(X))$ ordonné lexicographiquement, où $r(f)$ est le défaut de semi-petitesse (*cf.* ci-dessous). Au lieu de considérer un pinceau de Lefschetz, *i.e.*, une famille linéaire à un paramètre de sections hyperplanes de X, les auteurs utilisent la section hyperplane universelle.

Semi-petitesse. Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre variétés projectives. Pour tout $i \geqslant 0$, soit Y^i le sous-ensemble algébrique fermé de Y, adhérence de l'ensemble des points $y \in Y$ tels que $\dim f^{-1}(y) = i$. Pour tout $y \in Y^i$ on a $\dim f^{-1}(y) \geqslant i$, et $\dim f^{-1}(Y^i) = i + \dim Y^i$.

Le *défaut de semi-petitesse* $r(f)$ de f est l'entier

$$r(f) = \max_{i \mid Y^i \neq \varnothing} r_i(f), \quad \text{avec } r_i(f) = \{2i + \dim Y^i - \dim X\}.$$

Remarquons les deux propriétés :

(i) On a $Y^0 \neq \varnothing$ si et seulement s'il existe une réunion X^0 de composantes irréductibles de X telles que la restriction $f_{|X_0}$ soit finie. On a alors, puisque $\dim X \geqslant \dim X_0$, l'inégalité $r_0(f) \leqslant 0$.

(ii) On a $r(f) \geqslant 0$: supposons X irréductible pour simplifier (en général, on remplace X par la composante irréductible de dimension maximum). Soit $i_0 \geqslant 0$ la dimension générique des fibres de f ; on a alors $f(X) = Y^{i_0}$ et $\dim X = i_0 + \dim f(X)$, donc $r_{i_0}(f) = 2i_0 + \dim Y^{i_0} - \dim X = i_0 \geqslant 0$.

On dit que f est *semi-petite* si $r(f) = 0$. Cela implique que f est génériquement finie par l'argument ci-dessus, et le i_0 correspondant est 0.

On dit alors que f est *petite* si $r(f) = 0$ et si le max est atteint pour $i = 0$ uniquement.

Exemples 3.1

(i) Un morphisme fini est une application petite.

(ii) Pour un morphisme lisse f, l'entier $r(f)$ est la dimension des fibres.

(iii) Éclatement d'un point y^o dans $\mathbb{C}^2$: on a $Y^0 = \mathbb{C}^2$ et $Y^1 = \{y^o\}$, donc $r_0(f) = 0$ et $r_1(f) = 0$. Donc f est semi-petite mais pas petite.

(iv) Éclatement d'un point y^o dans $\mathbb{C}^3$: on a $Y^0 = \mathbb{C}^3$, $Y^1 = \varnothing$ et $Y^2 = \{y^o\}$; donc $r_0(f) = 0$ et $r_2(f) = 4 + 0 - 3 = 1$; le défaut de semi-petitesse est 1.

(v) Éclatement d'une courbe C dans $\mathbb{C}^3$: on a $Y^0 = \mathbb{C}^3$, $Y^1 = C$ et Y^2 est un nombre fini de points ; donc $r_0(f) = 0$, $r_1(f) = 2 + 1 - 3 = 0$ et, si $Y^2 \neq \varnothing$, $r_2(f) = 1$ comme ci-dessus. Donc f est semi-petite si et seulement si $Y^2 = \varnothing$, mais f n'est pas petite.

On peut montrer que, si X est lisse,

$$ {}^pR^j f_* {}^p\mathbb{Q}_X = 0 \quad \text{si } |j| > r(f). $$

La section hyperplane universelle. Soit $\mathbb{P}$ un espace projectif et $\mathbb{P}^\vee$ l'espace des hyperplans de $\mathbb{P}$. Considérons un plongement $X \subset \mathbb{P}$ de X dans $\mathbb{P}$. La variété d'incidence $\mathscr{X} \subset X \times \mathbb{P}^\vee$ est l'ensemble des points (x, H) tels que $x \in X \cap H$. C'est une hypersurface de $X \times \mathbb{P}^\vee$. Toute application $f : X \to Y$ donne alors lieu à une application $g : \mathscr{X} \to \mathscr{Y} \overset{\text{déf}}{=} Y \times \mathbb{P}^\vee$ par le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "g"'] & X \times \mathbb{P}^\vee \arrow[d, "f \times \mathrm{Id}"] \\ & Y \times \mathbb{P}^\vee \end{tikzcd}$$

Pour $y \in Y$ et $H \in \mathbb{P}^\vee$, on peut identifier $g^{-1}(y, H)$ au sous-ensemble $f^{-1}(y) \cap H$ de $X = X \times \{H\}$. La possibilité d'une récurrence sur $r(f)$ repose sur la proposition suivante :

Lemme 3.2 **([3], th. 4.7.4)**

– *Si $r(f) > 0$, alors $r(g) < r(f)$;*

– *si $r(f) = 0$, alors g est petite.*

Démonstration. C'est un simple décompte de dimensions. On peut décomposer $\mathscr{Y}^i$ en deux familles de composantes $\mathscr{Y}^{i\prime}$ et $\mathscr{Y}^{i\prime\prime}$.

Le sous-ensemble $\mathscr{Y}^{i\prime}$ est l'adhérence de l'ensemble des (y, H) tels que $y \in Y^i$ et $\dim f^{-1}(y) \cap H \geqslant i$, *i.e.*, H contient une composante de $f^{-1}(y)$. La fibre générale de la projection $\mathscr{Y}^{i\prime} \to Y^i$ est donc de codimension $\geqslant i+1$ dans $\mathbb{P}^\vee$. On en déduit (avec une notation évidente)

$$\begin{aligned} r_i'(f) \overset{\text{déf}}{=} 2i + \dim \mathscr{Y}^{i\prime} - \dim \mathscr{X} &\leqslant 2i + \dim Y^i + \dim \mathbb{P}^\vee - (i+1) - \dim \mathscr{X} \\ &= r_i(f) - i. \end{aligned}$$

Le sous-ensemble $\mathscr{Y}^{i\prime\prime}$ est l'adhérence de l'ensemble de (y, H) tels que $y \in Y^{i+1}$ et $\dim f^{-1}(y) \cap H \geqslant i$. La fibre générale de la projection sur Y^{i+1} est donc $\mathbb{P}^\vee$, et on a

$$\begin{aligned} r_i''(f) \overset{\text{déf}}{=} 2i + \dim \mathscr{Y}^{i\prime\prime} - \dim \mathscr{X} &= 2i + \dim Y^{i+1} + \dim \mathbb{P}^\vee - \dim \mathscr{X} \\ &= r_{i+1}(f) - 1. \end{aligned}$$

On a donc $r_i(g) = \max\{r_i'(g), r_i''(g)\} \leqslant r(f) - 1$ pour tout $i > 0$ et $r_0(g) \leqslant r_0(f)$.

Supposons $r(f) > 0$. Si $Y^0 = \varnothing$, on a $r(g) \leqslant r(f) - 1$. Si $Y^0 \neq \varnothing$, on a $r_0(g) \leqslant r_0(f) \leqslant 0 < r(f)$.

Supposons $r(f) = 0$. Alors $Y^0 \neq \varnothing$ et, puisque $r(g) \geqslant 0$, on a $r(g) = r_0(g) = r_0(f) = 0$, donc g est petite. □

3.c. Quelques éléments de la démonstration de [3]. La démonstration s'appuie sur un certain nombre de résultats en théorie de Hodge :

– la théorie de Hodge des variétés projectives lisses ;

– la théorie de Hodge mixte des variétés ouvertes (Deligne [**5, 6**]) ;

– le théorème de semi-simplicité (Deligne, [**5**]).

Les auteurs de [**3**] utilisent toujours des morphismes dont la base est quasi-projective, quitte à augmenter sa dimension. C'est le cas notamment de la construction de la section hyperplane universelle. En contre partie, ils n'obtiennent pas de résultat sur les cycles évanescents (ils ne redémontrent pas le « théorème local des cycles invariants »). Par contre, ils explicitent bien les polarisations qui interviennent dans la suite spectrale de Leray, et obtiennent des expressions précises (non mentionnées dans ce texte) sur les polarisations qui interviennent dans chaque terme de la décomposition donnée par le théorème 1.4(iic).

La démonstration procède par récurrence sur le couple $(r(f), \dim f(X))$ ordonné lexicographiquement. Les résultats sont vrais pour tous les couples tels que $\dim f(X) = 0$ (théorie de Hodge classique pour les variétés projectives lisses). Je renvoie à [**3**, § 2.6], où la structure de la preuve est bien expliquée. J'indique seulement un point.

Il y a une réduction au cas $r(f) = 0$ par l'utilisation de la section hyperplane universelle (grâce au lemme 3.2). On montre que, si le théorème de décomposition et de semi-simplicité est vrai pour la section hyperplane universelle, il est vrai pour f. Un des ingrédients (qui remplace le théorème de Lefschetz — dit faible — pour les sections hyperplanes génériques) est le « théorème d'Artin relatif » pour les faisceaux pervers. Le théorème « absolu » dit que, si $j : U \to X$ est un morphisme affine et si $\mathscr{F}$ est un faisceau pervers sur U, alors l'extension par 0 de $\mathscr{F}$, notée $j_!\mathscr{F}$, n'a de cohomologie perverse qu'en degrés $\geqslant 0$ (voir par exemple [**7**, p. 137–138]).

3.d. Questions. On peut se demander si la méthode de [**3**] peut s'étendre à des situations de départs plus générales.

Supposons que l'on se donne sur X (toujours projective lisse) un faisceau localement constant sous-jacent à une variation de structure de Hodge polarisée définie sur $\mathbb{Z}$. Il est bien possible que, dans ce cas, la méthode de [**3**] s'adapte directement, en modifiant convenablement les formules de polarisation, prenant en compte la polarisation de la variation de départ.

Si la variation n'est pas définie sur $\mathbb{Z}$ (ni même sur $\mathbb{Q}$), on ne peut plus utiliser le théorème de semi-simplicité pour les images directes sur un ouvert de Zariski dense de Y.

Plus généralement, si on part simplement d'un faisceau localement constant semi-simple (comme c'est le cas dans [**15**]), le même problème se pose. Est-il alors possible d'éviter de faire appel aux résultats de Mochizuki et à la théorie des $\mathscr{D}$-modules de twisteurs polarisables ?

Références

[1] A.A. Beilinson, J.N. Bernstein & P. Deligne – « Faisceaux pervers », in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, Astérisque, vol. 100, Société Mathématique de France, 1982, p. 7–171.

[2] G. Böckle & C. Khare – « Mod ℓ representations of arithmetic fundamental groups. II. A conjecture of A.J. de Jong », *Compositio Math.* **142** (2006), no. 2, p. 271–294, arXiv:math.NT/0312490.

[3] M.A. de Cataldo & L. Migliorini – « The Hodge theory of algebraic maps », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (2005), no. 5, p. 693–750, arXiv:math.AG/0306030.

[4] P. Deligne – « Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **35** (1968), p. 107–126.

[5] ———, « Théorie de Hodge II », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **40** (1971), p. 5–57.

[6] ———, « Théorie de Hodge III », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **44** (1974), p. 5–77.

[7] A. Dimca – *Sheaves in topology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, New York, 2004.

[8] D. Gaitsgory – « On De Jong's conjecture », *Israel J. Math.* **157** (2007), p. 155–191, arXiv:math.AG/0402184.

[9] P.A. Griffiths & J. Harris – *Principles of Algebraic Geometry*, A. Wiley-Interscience, New York, 1978.

[10] M. Kashiwara – « Semisimple holonomic $\mathscr{D}$-modules », in *Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics* [**11**], p. 267–271.

[11] M. Kashiwara, K. Saito, A. Matsuo & I. Satake (éds.) – *Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics*, Progress in Math., vol. 160, Birkhäuser, Basel, Boston, 1998.

[12] K. Lamotke – « The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz », *Topology* **20** (1981), p. 15–51.

[13] T. Mochizuki – « Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules », arXiv:math.DG/0312230, 2003.

[14] ______, « A characterization of semisimple local system by tame pure imaginary pluriharmonic metric », arXiv:math.DG/0402122, 2004.

[15] C. Sabbah – « Polarizable twistor $\mathscr{D}$-modules », prépublication, arXiv:math.AG/0503038, vi+226 pages, 2005.

[16] M. Saito – « Modules de Hodge polarisables », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **24** (1988), p. 849–995.

[17] W. Schmid – « Variation of Hodge structure : the singularities of the period mapping », *Invent. Math.* **22** (1973), p. 211–319.

[18] C. Voisin – *Théorie de de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[19] S. Zucker – « Hodge theory with degenerating coefficients : L_2-cohomology in the Poincaré metric », *Ann. of Math.* **109** (1979), p. 415–476.

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* sabbah@math.polytechnique.fr
Url : http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html