STRUCTURES DE HODGE NON COMMUTATIVES

NICE, 17 MARS 2011

Claude Sabbah

1. Introduction

La terminologie de structure de Hodge non commutative est due à Katzarkov-Kontsevich-Pantev [**4**], car ils espéraient obtenir une telle structure sur la cohomologie cyclique périodique d'une variété algébrique non commutative (algèbre différentielle graduée lisse et compacte). Dans cette direction, il y a eu des résultats de Kaledin, mais l'essentiel de la structure de Hodge n'a pas été encore obtenu.

Le modèle est plutôt la cohomologie $H^\bullet(X,f;\mathbb{Q})$, où $f:X\to\mathbb{A}^1$ est un morphisme propre ou cohomologiquement modéré sur une variété quasi-projective lisse. La version « de Rham » de cette cohomologie est l'hypercohomologie du complexe de de Rham tordu $(\Omega_X^\bullet, d+df)$. La version homologique Betti est définie, au moins quand f n'a que des points critiques isolés, par les onglets de Lefschetz. L'accouplement est donné par les intégrales du type

$$\int_\Gamma e^f\omega$$

Deligne [**1**] a considéré le cas où X est une courbe. Il a observé et montré les résultats suivants :

(1) La formule $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ ($X=\mathbb{C}$, $f=-x^2$) suggère que dx est de filtration de Hodge 1/2, et de même $\int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-x}x^\alpha dx/x=\Gamma(\alpha)$ ($X=\mathbb{C}^*$, $f=-x$, et présence d'un système local) suggère que, pour $0<\alpha<1$, on trouve une filtration de Hodge sautant à $1-\alpha$.

(2) On peut filtrer le complexe $(\Omega_X^\bullet, d+df)$ avec une filtration ayant des indices rationnels, et la suite spectrale associée dégénère en E_1.

(3) La « filtration de Hodge » sur $H^\bullet(X,f;\mathbb{Q})$ obtenue satisfait des propriétés de dualité via l'accouplement non dégénéré $H^1(X,f;\mathbb{Q})\otimes H^1(X,-f;\mathbb{Q})\to\mathbb{Q}$ (intersection des onglets de Lefschetz.

(4) En général, il ne faut pas s'attendre à ce que cette filtration soit 1-opposée à sa complexe conjuguée. Autrement dit, il n'y a plus corrélation parfaite entre filtration de Hodge et décomposition de Hodge.

Une autre motivation vient des travaux de Katz et Laumon [**3**] sur la transformation de Fourier-Deligne : ils montrent que celle-ci préserve la pureté, dans le cadre ℓ-adique, et écrivent : « On aimerait pouvoir énoncer et démontrer un énoncé analogue pour les $\mathscr{D}$-modules, la pureté étant comprise au sens de la théorie de Hodge. »

2. Structure de Stokes

Une structure de Stokes (de pente 1, non ramifiée) sur $\mathbb{C}^d$ est la donnée d'une famille finie $c_1, \dots, c_n$ de nombres complexes et de deux matrices inversibles Σ, Σ' triangulaires par blocs (inf, sup) indexés par $i = 1, \dots, n$. On peut associer à cette donnée (et au choix de $\theta_o \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$), de manière unique à isomorphisme près, une connexion à singularité irrégulière sur $\mathbb{C}(\{z\})^d$. On la note $(\mathscr{G}, \nabla)$. La monodromie de cette connexion est donnée par $\Sigma^{-1}\Sigma'$. On dit que la connexion est définie sur $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$) si Σ et Σ' le sont, à conjugaison près. On a un isomorphisme $(-1)^w$-symétrique de ce fibré à connexion avec $\iota^*(\mathscr{G}, \nabla)^\vee$ si et seulement si, après une conjugaison convenable, $\Sigma' = (-1)^w \cdot {}^t\Sigma$.

3. Recollements

Soit $(\mathscr{H}, \nabla)$ un fibré sur $\mathbb{A}^1$ avec une connexion ayant un pôle au plus en $z = 0$. On pose $\mathscr{G} = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^1}(*0) \otimes \mathscr{H} = \mathscr{H}[1/z]$.

3.1. Recollement $\widetilde{\mathscr{H}}$ avec une structure réelle. Supposons que le système local $\mathscr{L} = \mathscr{H}^\nabla$ soit défini sur $\mathbb{R}$. Soit $\gamma : \mathbb{P}^1 \to \overline{\mathbb{P}}^1$ l'application $z \mapsto 1/\overline{z}$. Alors on peut recoller le fibré $\mathscr{H}$ et le fibré $\overline{\gamma^*\mathscr{H}}$: sur $S^1 = \{|z| = 1\}$, on a $\overline{\gamma^*\mathscr{H}}^\nabla_{|S^1} = \overline{\mathscr{L}}_{|S^1}$ et on utilise la structure réelle, qui donne une identification $\overline{\mathscr{H}}^\nabla_{|S^1} \simeq \mathscr{H}^\nabla_{|S^1}$. On obtient un fibré $\widetilde{\mathscr{H}}$, muni d'une connexion qui a un pôle en 0 et en ∞.

3.2. Recollement $\widehat{\mathscr{H}}$. Supposons donnée une forme ι-hermitienne non dégénérée $\mathcal{C} : \mathscr{L} \otimes \iota^{-1}\overline{\mathscr{L}} \to \mathbb{C}_{|S^1}$, qui induit donc un isomorphisme $\mathscr{L}^\vee \xrightarrow{\sim} \iota^{-1}\overline{\mathscr{L}}$. On remarque que, sur S^1, on a $\iota = \sigma \overset{\text{déf}}{=} \iota \circ \gamma$. Ainsi, $\mathcal{C}$ définit un recollement de $\mathscr{H}^\vee$ avec $\sigma^*\overline{\mathscr{H}}$, et donc un fibré $\widehat{\mathscr{H}}$, muni d'une connexion qui a un pôle en 0 et en ∞. La formule des résidus montre que $\deg \widehat{\mathscr{H}} = 0$.

Puisque $\mathcal{C}$ est ι-hermitienne, on a $\sigma^*\overline{\widehat{\mathscr{H}}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathscr{H}}^\vee$. Si $\widehat{\mathscr{H}}$ est trivial, on en déduit une forme hermitienne sur $\Gamma(\mathbb{P}^1, \widehat{\mathscr{H}})$.

Remarque 3.1. En général, il est difficile de déterminer a priori le type des fibrés $\widetilde{\mathscr{H}}$ ou $\widehat{\mathscr{H}}$, car la relation entre $(\mathscr{H},\nabla)$ et $\mathscr{L}$ est transcendante.

3.3. Relation entre les recollements. Supposons que $\mathscr{L}$ soit défini sur $\mathbb{R}$ et qu'on ait une forme ι-bilinéaire $(-1)^w$-symétrique définissant un isomorphisme $Q_{\mathbb{R}} : \iota^{-1}\mathscr{L}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}_{\mathbb{R}}^{\vee}$. On note $\mathcal{C}$ la forme ι-sesquilinéaire $i^{-w}Q_{\mathbb{C}}(\bullet,\bar{\bullet})$, qui est ι-hermitienne. Une façon d'obtenir ces deux propriétés à la fois est de supposer que $(\mathscr{G},\nabla)$ est défini par le couple de matrices de Stokes $(\Sigma,(-1)^w\cdot{}^t\Sigma)$ avec Σ réelle.

Dans ce cas, les deux fibrés peuvent être reliés : si l'isomorphisme $(\mathscr{G},\nabla) \xrightarrow{\sim} \iota^*(\mathscr{G},\nabla)^{\vee}$ envoie $\mathscr{H}$ dans $z^{-w}\iota^*\mathscr{H}^{\vee}$, alors $\widetilde{\mathscr{H}} \simeq \widehat{\mathscr{H}}(w)$.

4. Structure de Hodge non commutative polarisée de poids w

C'est la donnée de $\big((\mathscr{H},\nabla),(c_1,\dots,c_n,\Sigma_{\mathbb{Q}})\big)$ tels que

(1) le $\mathbb{C}(\{z\})$-espace vectoriel à connexion $(\mathscr{G},\nabla)$ défini par $(\Sigma,(-1)^w\cdot{}^t\Sigma)$ soit isomorphe à $\mathbb{C}(\{z\})\otimes_{\mathbb{C}\{z\}}(\mathscr{H},\nabla)$,
(2) le fibré recollé $\widetilde{\mathscr{H}}$ est isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(w)^d$ (à ce point, on a défini une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge non commutative de poids w),
(3) la dualité $(\mathscr{G},\nabla) \simeq \iota^*(\mathscr{G},\nabla)^{\vee}$ induit un isomorphisme $\iota^*\mathscr{H}^{\vee} \simeq z^w\mathscr{H}$,
(4) d'après (2), $\widehat{\mathscr{H}}$ est trivial ; on demande que la forme hermitienne sur $\Gamma(\mathbb{P}^1,\widehat{\mathscr{H}})$ soit définie positive.

Remarque 4.1. Cette notion est proche de celle introduite par C. Hertling (structure TERP). Le point supplémentaire est que la matrice Σ soit à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$ dans le cas TERP). Par ailleurs, à partir de la donnée $\big((\mathscr{H},\nabla),(c_1,\dots,c_n,\Sigma_{\mathbb{Q}})\big)$, il est en général difficile de vérifier les conditions de pureté et de polarisation.

5. Exemples

5.1. Structure de Hodge polarisée. Soit $(H_{\mathbb{Q}},F^{\bullet}H)$ une structure de Hodge pure de poids w polarisée par $Q : H_{\mathbb{Q}}\otimes H_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$. On a $Q(H^{p,q},H^{p',q'})=0$ si $p'\neq w-p$. On pose $(\mathscr{H},\nabla)=(\bigoplus_k F^kHz^{-k},\mathrm{d})$. On a $n=1$, $c_1=0$, $\Sigma=\mathrm{Id}$, $(\mathscr{G},\nabla)=\mathbb{C}[z,z^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}H$, la monodromie est l'identité.

5.2. Structure sur $H^*(X,f)$. On suppose X affine de dimension $n+1$ et $f : X\to\mathbb{A}^1$ à points critiques isolés et sans point critique à l'infini. On prend pour $(\mathscr{H},\nabla)$ le réseau de Brieskorn de f : $G_0=\Omega^{n+1}(X)[z]/(zd-df)\Omega^n(X)[z]$. La structure rationnelle vient de la structure des onglets de Lefschetz pour f. La propriété de pureté et de polarisation s'obtient en appliquant un résultat général sur la transformation de Fourier-Laplace au système de Gauss-Manin de f, avec sa structure de $\mathscr{D}$-module de Hodge mixte.

5.3. Transformation de Fourier-Laplace. C'est l'outil principal pour montrer qu'une donnée $\big((\mathscr{H},\nabla),(c_1,\dots,c_n,\Sigma_{\mathbb{Q}})\big)$ est une structure de Hodge non commutative pure polarisée.

Soit $(V_{\mathbb{Q}},F^\bullet V,Q)$ une variation de structure de Hodge polarisée de poids w sur $X=\mathbb{C}\smallsetminus\{c_1,\dots,c_n\}$. On associe à cette donnée :

- un faisceau pervers $j_*V_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{A}^1$ muni d'un accouplement $(-1)^w$-symétrique $Q: j_*V_{\mathbb{Q}}\otimes j_*V_{\mathbb{Q}}\to\mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1}$,
- un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module filtré $(M,F^\bullet M)$ tel que $\mathrm{DR}^{\mathrm{an}}\,M\simeq j_*V_{\mathbb{Q}}$ et $(M,F^\bullet M)_{|X}=(V,F^\bullet V)$.

A ces données on associe

- le transformé de Laplace localisé de M : c'est $\mathbb{C}[\partial_t,\partial_t^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}[\partial_t]}M$, qui est un $\mathbb{C}[\partial_t,\partial_t^{-1}]$-module libre ; on pose $z=\partial_t^{-1}$,
- La filtration permet de définir un $\mathbb{C}[z]$-module libre : c'est l'image de $\partial_t^{-p}\otimes F^pM+\partial_t^{-p-1}\otimes F^{p+1}+\cdots$ pour p assez grand ;
- le transformé de Laplace topologique du faisceau pervers $j_*V_{\mathbb{Q}}$ définit une structure de Stokes $(\Sigma_{\mathbb{Q}},\Sigma'_{\mathbb{Q}})$, et le transformé de Laplace de l'accouplement Q donne, dans une base convenable, une identification $\Sigma'_{\mathbb{Q}}=(-1)^w\cdot{}^t\Sigma_{\mathbb{Q}}$.

***Théorème 5.1* (C.S.).** *Les données obtenues par transformation de Fourier-Laplace d'une variation de structure de Hodge polarisée de poids w sur $X=\mathbb{C}\smallsetminus\{c_1,\dots,c_n\}$ forment une structure de Hodge non commutative polarisée pure de poids $w+1$.*

5.4. Positivité de la matrice de Stokes.

***Théorème 5.2* (Hertling-C.S., *cf.* [2]).** *Soit $\{c_1,\dots,c_n\}\subset\mathbb{C}$ et $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ telle que*

(1) *pour tout $i=1,\dots,n$,* $\mathrm{Ker}(\Sigma_{ii}+{}^t\Sigma_{ii})=0$,

(2) *la forme quadratique $\Sigma+{}^t\Sigma$ est positive ou nulle.*

Soit $(\mathscr{G},\nabla)$ associé à $(\Sigma,(-1)^w\cdot{}^t\Sigma)$ et soit $\mathscr{H}$ le réseau de Deligne-Malgrange de $(\mathscr{G},\nabla)$ avec résidus dans $[-(w+1)/2,-(w-1)/2[$. Alors $\big((\mathscr{H},\nabla),(c_1,\dots,c_n,\Sigma_{\mathbb{Q}})\big)$ est une structure de Hodge non commutative polarisée, pure de poids w.

La démonstration s'obtient en montrant que $\big((\mathscr{H},\nabla),(c_1,\dots,c_n,\Sigma_{\mathbb{Q}})\big)$ est obtenue par transformation de Fourier à partir d'un fibré hermitien plat sur $\mathbb{C}\smallsetminus\{c_1,\dots,c_n\}$

Références

[1] P. Deligne – « Théorie de Hodge irrégulière (mars 1984 & août 2006) », in *Singularités irrégulières, Correspondance et documents*, Documents mathématiques, vol. 5, Société Mathématique de France, Paris, 2007, p. 109–114 & 115–128.

[2] C. Hertling & C. Sabbah – « Examples of non-commutative Hodge structures », *Journal de l'Institut mathématique de Jussieu* (2011), à paraître, arXiv : 0912.2754.

[3] N. Katz & G. Laumon – « Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **62** (1985), p. 145–202.

[4] L. Katzarkov, M. Kontsevich & T. Pantev – « Hodge theoretic aspects of mirror symmetry », in *From Hodge theory to integrability and TQFT : tt*-geometry* (R. Donagi & K. Wendland, éds.), Proc. Symposia in Pure Math., vol. 78, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, arXiv : 0806.0107, p. 87–174.

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* sabbah@math.polytechnique.fr
Url : http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah